

УДК 534

ВЛИЯНИЕ ПОЛЯ СКОРОСТИ ВИХРЯ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ
АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

Климов В. В.

Рассмотрено рассеяние звука полем скорости вихря с концентрированной завихренностью и предложена методика нахождения поля в приближении геометрической акустики. Обнаружено, что такие вихри обладают свойством фокусировать акустическое поле. Полученные результаты следует учитывать при распространении звука на большие расстояния.

В настоящее время как внутреннее развитие теоретической акустики, так и практические потребности привели к необходимости создания адекватного описания распространения акустических волн через различного рода и масштаба вихревые структуры в океане и атмосфере.

В целом, влияние вихрей на рассеяние звука можно считать обусловленным двумя механизмами. К первому следует отнести механизм рассеяния на неоднородностях показателя преломления. Этот механизм достаточно понятен и не вызывает, по крайней мере в принципе, вычислительных трудностей. Во-вторых, рассеяние звука может происходить на скорости вихря. Хотя последние эффекты обусловлены параметром $v/c \sim 10^{-3}$ (где v — орбитальная скорость вихря, c — скорость звука), значительно меньше обуславливающего параметра в случае рассеяния на неоднородностях показателя преломления ($\Delta c/c \sim 10^{-2}$, Δc — величина вариации скорости звука), их влияние может привести к важным качественным изменениям в структуре поля. В работах [1–3] было рассмотрено в различных приближениях влияние поля скорости течения на распространение акустических волн. При этом было выяснено, что рефракция лучей за счет поля скорости может достигать сотых и даже десятых долей градуса. Однако в вышеуказанных работах не была затронута важная проблема пространственного перераспределения акустической энергии вдали от вихря. В настоящей работе предпринята попытка описать пространственное распределение амплитуды и фазы акустического поля, обусловленное изолированным вихрем.

В качестве модели вихревого течения выбираем вихрь Хилла, поле скорости которого является точным решением уравнений Эйлера и может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t) + \mathbf{V}^*(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t), \\ \mathbf{V}^*(\mathbf{r}) &= \frac{15}{4a^2} (\mathbf{r}^2 - a^2) \mathbf{V}_0 \Theta(a^2 - \mathbf{r}^2), \\ \Phi(\mathbf{r}) &= \left(\frac{a^3}{2r^3} \Theta(r^2 - a^2) + \frac{5a^2 - 3r^2}{4a^2} \Theta(a^2 - \mathbf{r}^2) \right) (\mathbf{V}_0 \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) \mathbf{V}_0 — скорость вихря, a — его радиус, \mathbf{r} — радиус-вектор в системе координат, совмещенной с центром вихря и $\Theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Аналогичное разбиение применимо ко всем вихрям с концентрированной завихренностью, так что описанная ниже методика полностью применима и в этих случаях. Здесь удобно подчеркнуть, что в настоящей работе проводится лишь модельное исследование фокусировки акустической энергии полем скорости вихря, так что непосредственное применение полученных результатов правомерно, например в случае атмосферных термик, и не правомерно в случае рассеяния звука мезомасштабными вихрями в океане.

Хотя уравнения распространения звука в неоднородных движущихся средах не являются вполне установленными в общем случае, в случае малых скоростей и малых длин волн ($V/c \ll 1$, $a/\lambda \gg 1$) неплохим приближением к действительности будет уравнение [4]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\nabla\right)^2 \Psi = c^2 \nabla^2 \Psi, \quad (2)$$

справедливое в первом порядке по числу Маха $M=V/c$. В (2) Ψ — потенциал акустического поля.

Предполагая, что источник можно рассматривать как точечный и монохроматический (зависимость от времени $\sim \exp(-i\omega t)$, ω — частота акустического поля), а процесс рассеяния как квазистационарный, вместо (2) получаем уравнение

$$\frac{1}{c^2} (-i\omega + \mathbf{V}\nabla)^2 \Psi = \Delta \Psi - \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (3)$$

в правую часть которого добавлена δ -функция, описывающая точечный источник акустического поля.

Так как нас здесь интересуют эффекты, связанные с полем скорости, то будем считать, что скорость звука постоянна во всем пространстве.

При условии $\text{div } \mathbf{V} = 0$, а для (1) оно имеет место, выражение (3) эквивалентно с точностью до членов первого порядка по числу Маха уравнению

$$[(\nabla + ik\mathbf{V}/c)^2 + k^2] \Psi = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (4)$$

Хотя члены второго порядка в (4) можно и не учитывать, их будем удерживать так как анализ уравнения (4) облегчается «калибровочной инвариантностью» последнего (см., например, [5], § 18). С учетом этой инвариантности решение (4) может быть представлено в виде

$$\Psi = G^*(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \exp\{-ik(\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{r}_0))/c\}, \quad (5)$$

где G^* — функция Грина уравнения

$$((\nabla + ik\mathbf{V}^*/c)^2 + k^2) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (6)$$

Значительным преимуществом (6) перед (3) является то обстоятельство, что согласно (6) рассеяние происходит в ограниченной сферически-симметричной области пространства.

Решение (6) на больших расстояниях $r \gg ka^2$ найти относительно несложно [6–8]. Более значительный интерес представляют характеристики поля на близких, «френелевских» расстояниях $r \sim ka^2$. Для нахождения поля в этой зоне рассмотрим сначала решение (6) в приближении геометрической акустики, которое в данном случае имеет некоторые особенности по сравнению со стандартным. В этом приближении ($k \rightarrow \infty$, k — волновой вектор акустической волны) решение (6) ищем в виде

$$G^* = (R_0 + R_1/(ik) + R_2/(ik)^2 + \dots) \exp ik\Phi^*. \quad (7)$$

Подставляя теперь (7) в (6), получаем уравнение эйконала

$$(\nabla\Phi^* + \mathbf{A})^2 = 1 \quad (8)$$

и уравнение переноса

$$(\nabla\Phi^* + \mathbf{A}, \nabla) R_0 = -R_0(\nabla, \nabla\Phi^* + \mathbf{A})/2. \quad (9)$$

Более высокие порядки рассматривать не будем. В этих уравнениях положили $\mathbf{A} = \mathbf{V}^*/c$. Для решения (8) и (9) необходимо задать граничные условия, которые в нашем случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi^*(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0) &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)), \\ R_0(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0) &= -1/(4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|). \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (8) является дифференциальным уравнением первого порядка, так что его решение можно свести к решению обыкновенных дифференциальных уравнений [9], которые в нашем случае принимают вид

$$\frac{dr_i}{d\tau} = v_i; \quad \frac{dv_i}{d\tau} = v_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial r_j} - \frac{\partial A_j}{\partial r_i} \right); \quad (11)$$

$$\frac{d\Phi^*}{d\tau} = (\mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{A}).$$

Начальные условия к этим уравнениям определяются постановкой задачи. В случае точечного источника лучи выходят из одной точки, в случае плоской волны падающие лучи параллельны волновому вектору падающей волны.

Решение (11) в связи с пространственной ограниченностью рассеивающего потенциала \mathbf{A} вне ядра вихря будет состоять из прямых линий, что существенно упрощает анализ поля в этой области. Внутри ядра лучевые уравнения имеют также весьма простой вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = -[\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}], \quad (12)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{v}. \quad (13)$$

В (12) $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{A}$ — завихренность поля скорости вихря Хилла (деленная на c), $\boldsymbol{\Omega} = 2[\mathbf{r}, \mathbf{A}_0]\Theta(a^2 - r^2)$ и $\mathbf{A}_0 = 15V_0/4a^2c$. Система уравнений (12) и (13), как можно убедиться, имеет три полных интеграла:

$$v^2 = \text{const}; \quad (\mathbf{A}_0, [\mathbf{v}, \mathbf{r}]) = \text{const}; \quad (14)$$

$$(\mathbf{A}_0, \mathbf{v}) - \mathbf{A}_0^2 r^2 + (\mathbf{A}_0, \mathbf{r})^2 = \text{const}.$$

Первый из них можно привести к виду $v^2 = 1$, что позволяет интерпретировать v как единичный касательный вектор к лучевой траектории. Наличие интегралов движения значительно облегчает нахождение лучевых траекторий. Например, в осесимметричном случае, т. е. когда источник находится на оси вихря, решение (12), (13) легко выражается через эллиптические функции. Несмотря на это будем решать (12), (13) методом теории возмущений с малым параметром $V_0/c \ll 1$. В первом порядке по этому параметру решение принимает весьма простой вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^* + \mathbf{v}^* \tau - [\mathbf{v}^*, [\mathbf{r}^*, \mathbf{A}_0]] \tau^2 - [\mathbf{v}^*, [\mathbf{v}^*, \mathbf{A}_0]] \tau^3/3. \quad (15)$$

В (15) \mathbf{r}^* , \mathbf{v}^* — характеризуют лучевую траекторию вне области завихренности. После прохождения лучом области завихренности он снова становится прямой линией, параметры которой равны параметрам луча (15) при выходе из ядра. Непрерывность как лучевой траектории, так и касательной к ней является следствием непрерывности рассеивающего потенциала (поля скорости вихря Хилла).

Рассмотрим более подробно случай рассеяния плоской волны, падающей вдоль оси z . Случай источника на конечном расстоянии рассматривается аналогично. При этом считаем, что вектор \mathbf{A}_0 имеет координаты $\{\sin \theta, 0, \cos \theta\}A_0$.

В этом частном случае уравнения лучей принимают следующий вид: при $-\infty < \tau < -\tau_0$ (до пересечения с ядром вихря) $x = x_0$; $y = y_0$; $z = \tau$, при $-\tau_0 < \tau < \tau^*$ (внутри ядра)

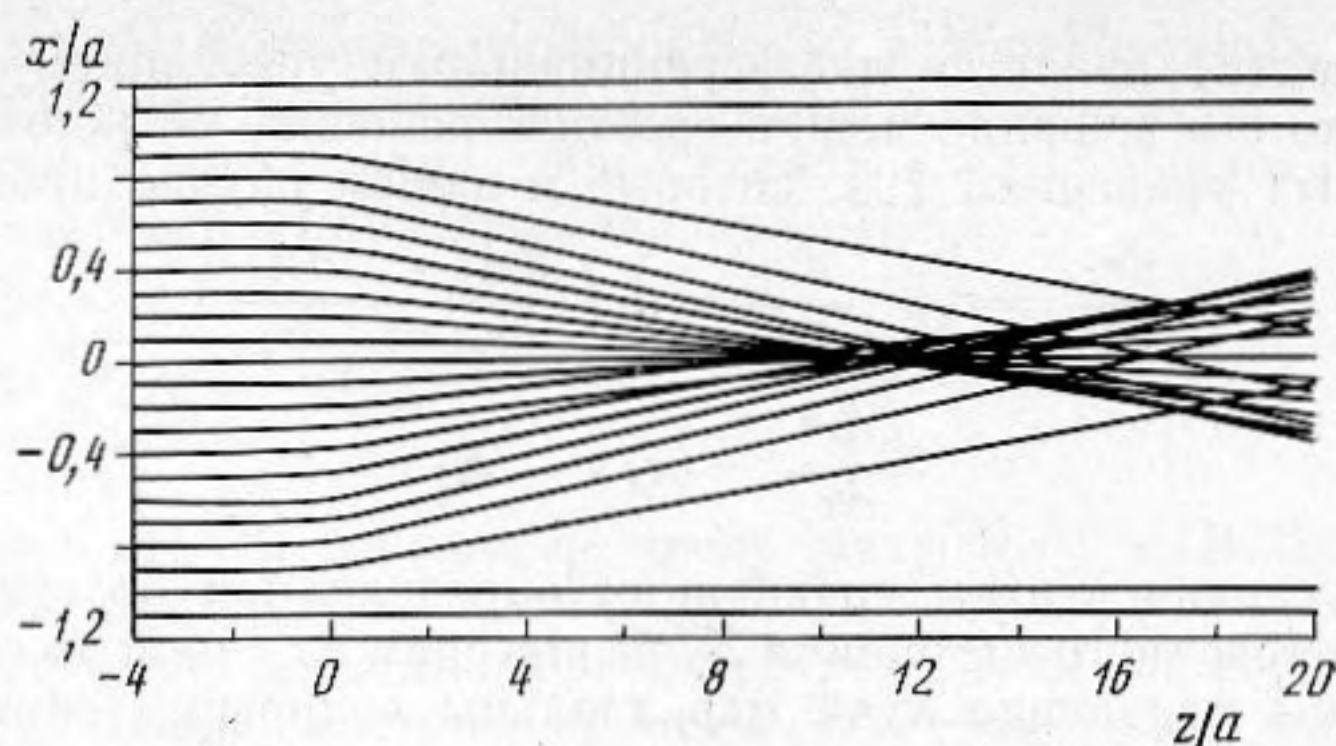
$$x = x_0(1 - A_0 \cos \theta (\tau + \tau_0)^2) + A_0 \sin \theta (\tau - 2\tau_0) (\tau + \tau_0)^2/3$$

$$y = y_0(1 - A_0 \cos \theta (\tau + \tau_0)^2); \quad z = \tau$$

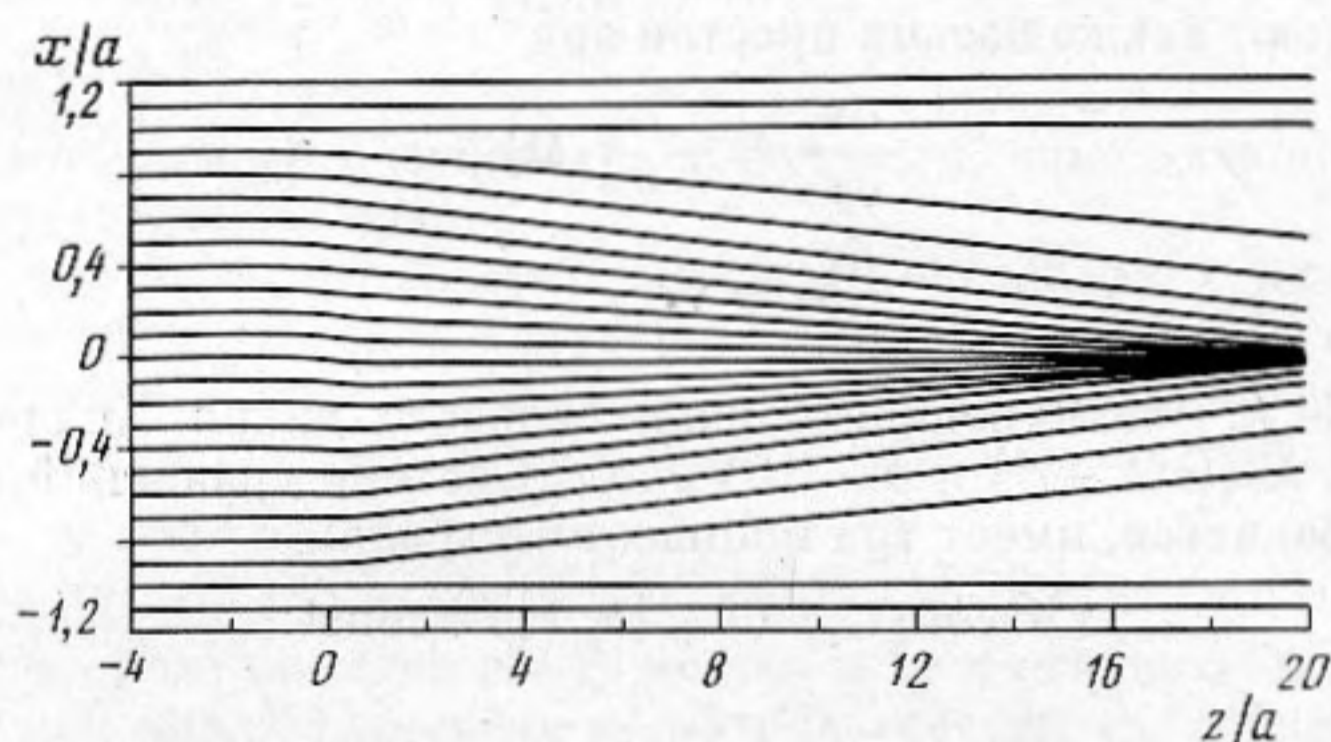
и, наконец, при $\tau > \tau^*$ (после ядра)

$$x = x_0(1 - 4A_0 \cos \theta \tau_0 \tau) - 4A_0 \sin \theta \tau_0^3/3; \quad (16)$$

$$y = y_0(1 - 4A_0 \cos \theta \tau_0 \tau); \quad z = \tau.$$



Фиг. 1. Лучевые траектории при $\theta=0^\circ$, $15V_0/c=0,1$. Центр вихря в начале координат, падающая волна – плоская



Фиг. 2. Лучевые траектории при $\theta=60^\circ$, $15V_0/c=0,1$. Центр вихря – в начале координат, падающая волна – плоская

Здесь

$$\tau_0 = \sqrt{a^2 - x_0^2 - y_0^2}, \quad \tau^* = \tau_0 (1 + 4A_0 \cos \theta (x_0^2 + y_0^2) + 4x_0 \tau_0 A_0 \sin \theta / 3).$$

Система лучевых траекторий, построенная согласно (16), при $\theta=0$ и $\theta=60^\circ$ ($4a^2 A_0=0,1$), представлена на фиг. 1, 2.

На этих фигурах хорошо видна концентрация акустической энергии и даже образование каустических поверхностей. Видна также динамика изменения каустических поверхностей при увеличении угла θ : каустики искажаются и уходят на бесконечность при $\theta \rightarrow \pi/2$. При $\theta > \pi/2$ концентрации акустической энергии не происходит, как этого можно было бы ожидать в случае обычной линзы, что является проявлением нарушения принципа акустической взаимности при распространении звука в течениях.

Уравнения, описывающие каустические поверхности, можно найти из условия пересечения бесконечно близких лучей [10], т. е. из условия

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, \tau)} = D(x_0, y_0, \tau). \quad (17)$$

Вычисляя якобиан D , получим выражение ($\tau > a$)

$$D(x_0, y_0, \tau) = (1 - 4A_0 \cos \theta \tau_0 \tau) (1 + 4A_0 \cos \theta \tau_0 (\tau a^2 / \tau_0^2 + \operatorname{tg} \theta x_0 - 2\tau)), \quad (18)$$

которое имеет при $0 < \theta < \pi/2$ два корня и, следовательно, при $0 < \theta < \pi/2$ определяет два семейства каустик.

Во-первых, – это «осевая» каустическая линия, которая описывается уравнением

$$x = -\sin \theta / (48A_0^2 \cos^3 \theta z^3); \quad y = 0, \quad (19)$$

и, во-вторых, — каустическая поверхность типа «клюв», которая описывается параметрическими уравнениями ($x_0^2 + y_0^2 < a^2/2$):

$$\begin{aligned} x &= x_0 \left(1 - \frac{\tau_0^2}{2\tau_0^2 - a^2} (1 + 4A_0 \sin \theta \tau_0 x_0) \right) - 4A_0 \sin \theta \tau_0^3/3, \\ y &= y_0 \left(1 - \frac{\tau_0^2}{2\tau_0^2 - a^2} (1 + 4A_0 \sin \theta \tau_0 x_0) \right), \\ z &= \frac{\tau_0 (1 + 4A_0 \sin \theta \tau_0 x_0)}{(2\tau_0^2 - a^2)(4A_0 \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (20)$$

В случае осевой симметрии ($\theta=0$) уравнение второй каустической поверхности можно записать в явном виде ($4A_0 z a \geq 1$):

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{32} \frac{(\sqrt{1 + 128A_0^2 a^2 z^2} - 3)^3}{\sqrt{1 + 128A_0^2 a^2 z^2} - 1}. \quad (21)$$

После того как лучевые траектории найдены, интегрированием (11) можно получить выражение для эйконала:

$$\Phi^*(\tau) = \Phi^*(\tau') + \int_{\tau'}^{\tau} d\tau \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}, \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} - \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right), \quad (22)$$

которое в рассматриваемом случае равно

$$\Phi^*(\tau) = \tau + 4A_0 \cos \theta \tau_0^3/3. \quad (23)$$

При переходе от (22) к (23) снова использовали условие $A_0 a^2 \sim V_0/c \ll 1$.

Найдем теперь распределение амплитуды. Для этого рассмотрим уравнение переноса в точке \mathbf{r} , через которую проходит луч $\mathbf{r}(x_0, y_0, \tau)$, и заметим, что согласно лучевым уравнениям

$$(\nabla \Phi^*(\mathbf{r}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}))|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(x_0, y_0, \tau)} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}(x_0, y_0, \tau). \quad (24)$$

Подставляя (24) в (9), получим, что вдоль луча справедливо уравнение

$$\frac{dR_0}{d\tau} = -\frac{1}{2} R_0 (\nabla, \mathbf{v})(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (25)$$

в котором использованы симметричные обозначения лучевых координат $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (x_0, y_0, \tau)$. Имея в виду тот факт, что

$$(\nabla, \mathbf{v})(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \det \hat{A} \quad (26)$$

(в (26) $(\hat{A})_{ij} = \partial x_i / \partial \xi_j$), решение (25) легко находится:

$$R_0 = (\det \hat{A}(\tau = -\infty) / \det \hat{A}(\tau))^{1/2}. \quad (27)$$

Так как $\det \hat{A}$ уже вычислен (см. (18)), то, используя (5), можно выписать окончательное выражение для поля после вихря вдоль луча ($D(\tau = -\infty) = 1$):

$$p(\tau) = \frac{1}{\sqrt{|D(\tau)|}} \exp ik(\Phi^*(\tau) - \Phi(\mathbf{r}(\tau))/c). \quad (28)$$

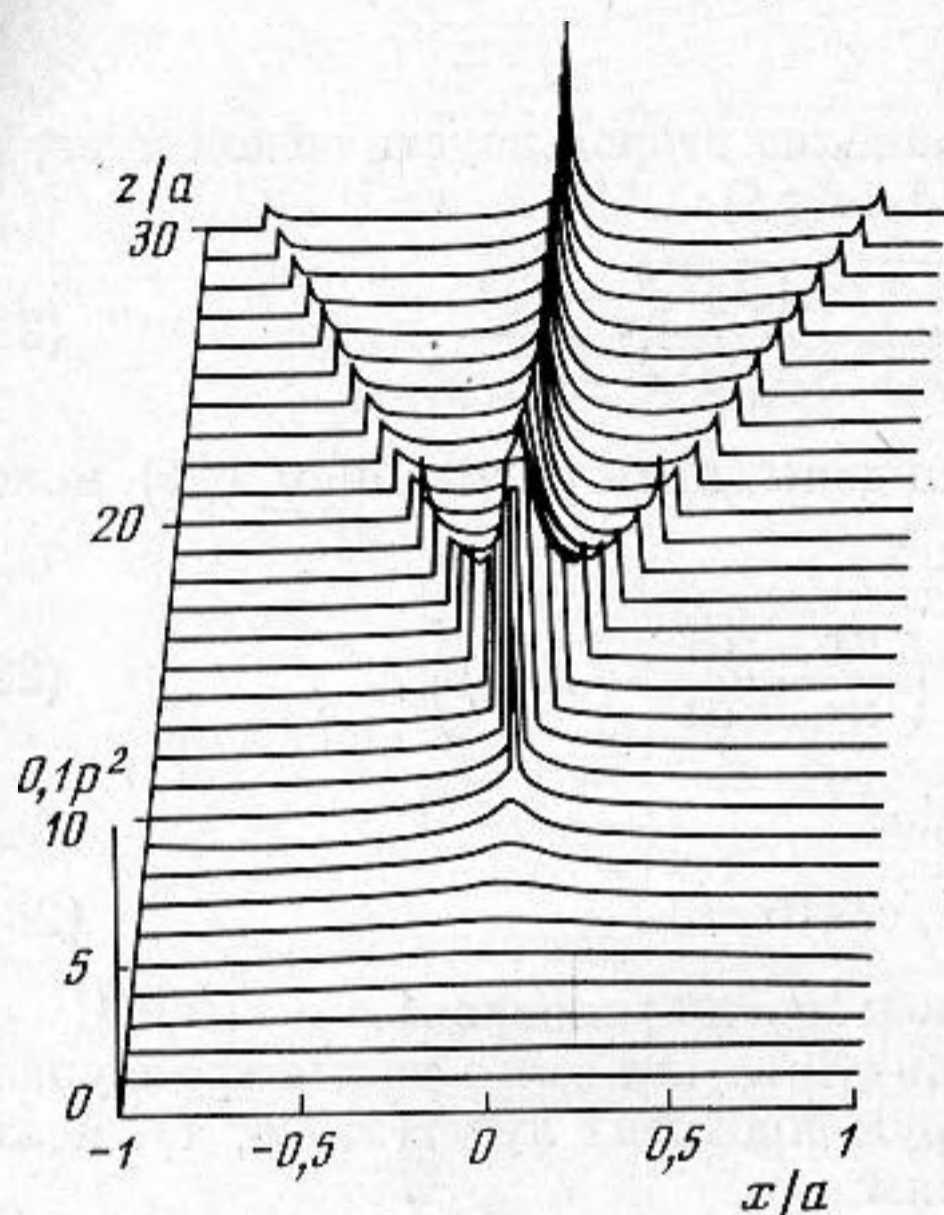
В (28) $\Phi(\mathbf{r})$, $D(\tau)$ и $\Phi^*(\tau)$ определяются выражениями (1), (18) и (23) соответственно. Так как нас интересует поле не вдоль луча, а в заданной точке \mathbf{r} пространства, то следует решить уравнение,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_0, y_0, \tau), \quad (29)$$

найти зависимость $x_0(\mathbf{r})$, $y_0(\mathbf{r})$, $\tau(\mathbf{r})$ и подставить в (28). В тех точках пространства, где (29) имеет несколько решений, т. е. там, где пересекаются несколько лучей (в нашем случае внутри каустической поверхности пересекаются по три луча), надо сложить выражения (28) для каждого луча с учетом каустического сдвига фазы ($-\pi/2$) для лучей прошедших

через каустику [5]. В окрестности каустики выражение (28), естественно, неприменимо и для нахождения поля в этой области следует использовать более мощные вычислительные методы. Результаты анализа рассеяния звука на вихревых структурах с концентрированной завихренностью в рамках приближений Рытова (см., например, [11]) и Фрадкина [12] будут приведены в отдельной публикации.

Пространственное распределение интенсивности акустического поля (т. е. квадрата модуля давления) после прохождения вихря в осесимметричном случае показано на фиг. 3,



Фиг. 3. Распределение интенсивности поля при $\theta=0^\circ$, $15V_0/c=0,1$. Центр вихря — в начале координат, падающая волна — плоская

стоянии порядка $ac/(15V_0)$ от вихря. Полученные результаты следует учитывать при изучении распространения звука в средах, содержащих как когерентные, так и некогерентные вихревые структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Itzikowitz S., Jacobson M. J., Siegmann W. L. Short-range acoustic transmissions through cyclonic eddies between a submerged source and receiver // J. Acoust. Soc. Amer., 1982. V. 71. P. 1131–1144.
2. Baer R. N. Calculation of sound propagation through an eddy // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. V. 67. P. 1180–1185.
3. Полянская В. А. О влиянии поля скорости течений в океане на распространение звука // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 5. С. 628–632.
4. Breton J. R., Middleton D. General theory of acoustical propagation through arbitrary fluid media // J. Acoust. Soc. Amer., 1981. V. 69. P. 1245–1260.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1973.
6. Фабрикант А. Л. Рассеяние звука вихревым течением // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 2. С. 262–267.
7. Громов П. Р. и др. Рассеяние звука тороидальным вихрем // Препринт № 59. Горький.: ИПФ АН СССР, 1982.
8. Климов В. В., Прозоровский В. Л. Рассеяние акустических волн на трехмерном вихре // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 1. С. 128–131.
9. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
10. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. М. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.
11. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981.
12. Фрадкин Е. С. Метод функций Грина в теории квантованных полей // Тр. ФИАН СССР. Т. 29. С. 7–138.

Поступила в редакцию
28.V.1987