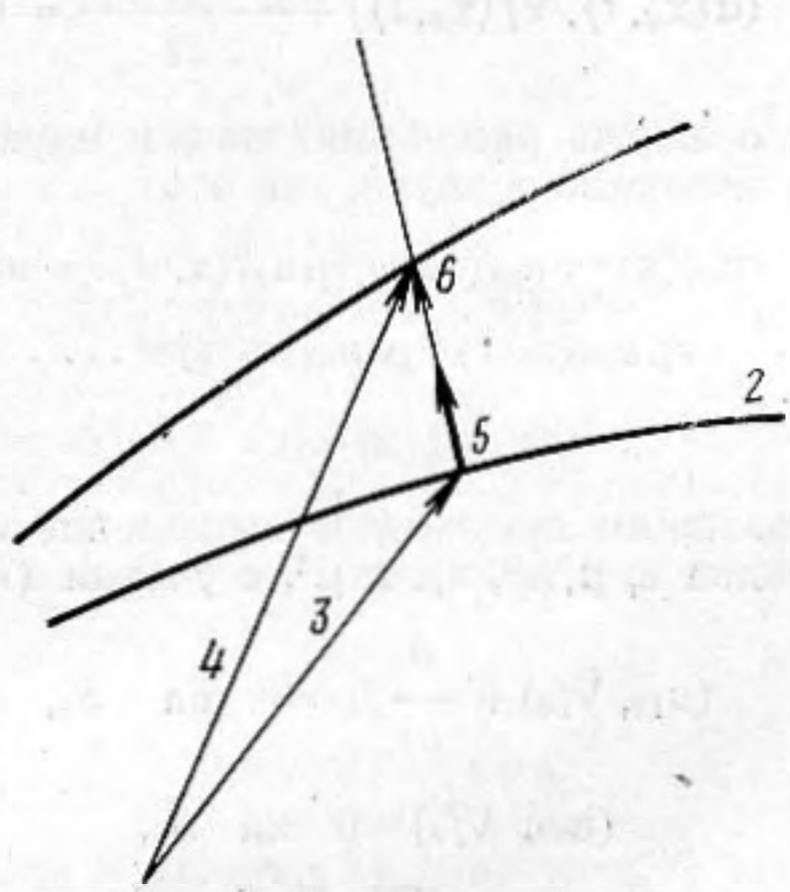
УДК 534.222.2

ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО РАССЕЯНИЯ ЗВУКА НА АКУСТИЧЕСКИ ЖЕСТКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Лямшев Л. М., Саков П. В.

В задачах рассеяния звука движущимися поверхностями, или нелинейного рассеяния звука, присутствуют два типа нелинейности: объемный и поверхностный [1]. Первый обусловлен взаимодействием звукового поля внешних источников с излучением движущейся поверхности [2], второй – взаимодействием звукового поля внешних источников с самой движущейся поверхностью [3].

При исследовании поверхностного нелинейного эффекта ключевое значение имеет используемое граничное условие. Выбор в данном случае приближения движущейся абсолютно жесткой поверхности обусловлен его изначальной корректностью (в отличие, например, от приближения движущейся абсолютно мягкой поверхности).



Геометрия задачи: *1* – $S(t)$, *2* – S_0, *3* – $\mathbf{x}_0$, *4* – $\mathbf{x}_S$, *5* – $\mathbf{n}_0(\mathbf{x}_0)$, *6* – $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0, t)$

Итак, пусть некоторая поверхность $S(t)$ задана функцией $f(\mathbf{x}, t)$, так что

$$f(\mathbf{x}, t)=0 \text{ на } S(t),$$

$$f(\mathbf{x}, t)>0 \text{ вне } S(t) \text{ (в жидкости)},$$

$$f(\mathbf{x}, t)<0 \text{ внутри } S(t).$$

Положим

$$f(\mathbf{x}, t)=f_0(\mathbf{x})+\varepsilon f_1(\mathbf{x}, t)+\varepsilon^2 f_2(\mathbf{x}, t)+\ldots, \tag{1}$$

где ε – малый параметр, характеризующий амплитуду колебаний $S(t)$. Функция f_0 задает некоторую неподвижную («невозмущенную») поверхность S_0: $f_0(\mathbf{x}_0)=0$, $S_0\equiv\{\mathbf{x}_0\}$.
Разложим (1) в ряд относительно S_0:

$$(\mathbf{x}_S-\mathbf{x}_0, \nabla) f_0(\mathbf{x}_0)+\varepsilon f_1(\mathbf{x}_0, t)+\ldots=0, \tag{2}$$

где $\mathbf{x}_S$ – точка поверхности $S(t):\{\mathbf{x}_S\}=S(t)$. Введем вектор $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0, t)$, позволяющий поставить каждой точке поверхности $S(t)$ в соответствие точку поверхности S_0 (фигура):

$$\boldsymbol{\xi}(x_0, t)=\mathbf{x}_S(\mathbf{x}_0, t)-\mathbf{x}_0,$$

$$\xi(x_0, t)=(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0, t), \mathbf{n}_0(\mathbf{x}_0))=\left(\boldsymbol{\xi}(x_0, t), \frac{\nabla f_0(\mathbf{x}_0)}{|\nabla f_0(\mathbf{x}_0)|}\right),$$

где $\mathbf{n}_0$ – внешняя нормаль к S_0. Теперь из (2) получаем

$$\xi(\mathbf{x}_0, t)=-\varepsilon \frac{f_1(\mathbf{x}_0, t)}{|\nabla f_0(\mathbf{x}_0)|}+\ldots. \tag{3}$$

В качестве граничного условия на $S(t)$ потребуем равенства нормальных компонент скоростей движения жидкости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и границы $d\mathbf{x}_S/dt$:

$$\left(\frac{d\mathbf{x}_S}{dt}, \nabla f(\mathbf{x}_S, t)\right) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}_S, t), \nabla f(\mathbf{x}_S, t)). \qquad (4)$$

Запишем условие, что точка поверхности $S(t)$ остается на $S(t)$ со временем

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_S, t) = 0 \quad \text{или}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{x}_S}{dt}, \nabla f(\mathbf{x}_S, t)\right) + \frac{\partial f(\mathbf{x}_S, t)}{\partial t} = 0,$$

что позволяет записать граничное условие (4) в виде

$$(\mathbf{u}(\mathbf{x}_S, t), \nabla f(\mathbf{x}_S, t)) + \frac{\partial f(\mathbf{x}_S, t)}{\partial t} = 0. \qquad (5)$$

Поскольку речь идет о задаче рассеяния, введем параметр μ, характеризующий амплитуду поля внешних источников звука, так что

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_{00}(\mathbf{x}) + \varepsilon\mathbf{u}_{10}(\mathbf{x}, t) + \mu\mathbf{u}_{01}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2\mathbf{u}_{20}(\mathbf{x}, t) +$$
$$+ \varepsilon\mu\mathbf{u}_{11}(\mathbf{x}, t) + \mu^2\mathbf{u}_{02}(\mathbf{x}, t) + \ldots . \qquad (6)$$

Для простоты положим

$$\mathbf{u}_{00}(\mathbf{x}) = 0. \qquad (7)$$

Подставим (6) в (5) и разложим полученное выражение по ξ. Приравняв в отдельности к нулю члены порядка ε, μ, ε^2, $\varepsilon\mu$ и μ^2, с учетом (7) соответственно получим

$$(\mathbf{u}_{10}, \nabla f_0) + \frac{\partial}{\partial t} f_1 = 0 \quad \text{на} \quad S_0, \qquad (8)$$

$$(\mathbf{u}_{01}, \nabla f_0) = 0 \quad \text{на} \quad S_0, \qquad (9)$$

$$(\mathbf{u}_{20}, \nabla f_0) + (\mathbf{u}_{10}, \nabla f_1) + \frac{\partial}{\partial t} f_2 - f_1 \frac{(\nabla f_0, \nabla)}{(\nabla f_0, \nabla f_0)}\left[(\mathbf{u}_{10}, \nabla f_0) + \frac{\partial}{\partial t} f_1\right] = 0 \quad \text{на} \quad S_0, \qquad (10)$$

$$(\mathbf{u}_{11}, \nabla f_0) + (\mathbf{u}_{01}, \nabla f_1) - f_1 \frac{(\nabla f_0, \nabla)}{(\nabla f_0, \nabla f_0)} (\mathbf{u}_{01}, \nabla f_0) = 0 \quad \text{на} \quad S_0, \qquad (11)$$

$$(\mathbf{u}_{02}, \nabla f_0) = 0 \quad \text{на} \quad S_0. \qquad (12)$$

На практике удобнее задавать движущуюся поверхность $S(t)$ не через функцию $f(\mathbf{x}, t)$, а посредством ее нормальных перемещений $\xi(\mathbf{x}_0, t)$ относительно неподвижной поверхности S_0. Положив

$$\xi_1(\mathbf{x}_0, t) = -\frac{f_1(\mathbf{x}_0, t)}{|\nabla f_0(\mathbf{x}_0, t)|},$$

после несложных преобразований из (11) получим

$$(\mathbf{u}_{11}, \mathbf{n}_0) - (\mathbf{u}_{01}, \nabla\xi_1) + \xi_1(\mathbf{n}_0, (\mathbf{n}_0, \nabla)\mathbf{u}_{01}) = 0 \quad \text{на} \quad S_0. \qquad (13)$$

Таким образом, получили кинематическое граничное условие на невозмущенной поверхности S_0 для задач нелинейного рассеяния звука акустически жесткой поверхностью $S(t)$. Для вывода динамического граничного условия воспользуемся уравнением Эйлера:

$$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p, \qquad (14)$$

где ρ – плотность жидкости, p – давление; вязкость жидкости учитывать не будем. Положим

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \varepsilon\rho_{10}(\mathbf{x}, t) + \mu\rho_{01}(\mathbf{x}, t) + \ldots, \qquad (15)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0 + \varepsilon p_{10}(\mathbf{x}, t) + \mu p_{01}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 p_{20}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon\mu p_{11}(\mathbf{x}, t) + \mu^2 p_{02}(\mathbf{x}, t) + \ldots . \qquad (16)$$

Из (14)–(16) получаем

$$\mathbf{u}_{01} = -\frac{1}{\rho_0}\int \nabla p_{01}\, dt, \qquad (17)$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}_{11}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 c_0^2} p_{10}\frac{\partial\mathbf{u}_{01}}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0 c_0^2} p_{01}\frac{\partial\mathbf{u}_{10}}{\partial t} - (\mathbf{u}_{10}, \nabla)\mathbf{u}_{01} - (\mathbf{u}_{01}, \nabla)\mathbf{u}_{10} - \frac{1}{\rho_0}\nabla p_{11}, \qquad (18)$$

где

$$c_0^2 = \lim_{p\to 0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s .$$

Продифференцировав (13) по времени, воспользуемся выражением (18) для $\partial \mathbf{u}_{11}/\partial t$. После преобразований окончательно получаем

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial n_0} + \frac{1}{c_0^2} p_{01} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi_1 + \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial n_0^2} p_{01} - 2 \left(\int \nabla p_{01}\, dt, \frac{\partial}{\partial t} \nabla \xi_1 \right) - (\nabla p_{01}, \nabla \xi_1) = 0 \text{ на } S_0. \quad (19)$$

Выражение (19) является динамическим граничным условием для задач нелинейного рассеяния на жесткой поверхности. Остановимся на двух частных случаях.

Движение границы имеет характер пульсаций, $\nabla \xi_1(\mathbf{x}_0, t) = 0$. В этом случае из (19) получаем

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial n_0} + \frac{1}{c_0^2} p_{01} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi_1 + \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial n_0^2} p_{01} = 0 \quad \text{на} \quad S_0. \quad (20)$$

Движение границы носит квазистатический характер, $\frac{\partial}{\partial t} \xi_1(\mathbf{x}_0, t) = 0$. Здесь получаем

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial n_0} + \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial n_0^2} p_{01} - (\nabla p_{01}, \nabla \xi_1) = 0 \quad \text{на} \quad S_0. \quad (21)$$

Полученные граничные условия существенно отличаются от использовавшихся в работах по нелинейному рассеянию звука ранее (см., например, [3]). Это может привести, в частности, к необходимости уточнения категорической оценки роли поверхностного эффекта в нелинейном рассеянии звука, имеющейся в работах [1, 2, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rogers P. H.* Comments on Scattering by time varying obstacle // J. Sound and Vibr. 1972. V. 28. № 4. P. 764–768.
2. *Piguette Jean C., Van Buren A. L.* Nonlinear scattering of acoustic waves by vibrating surfaces // J. Acoust. Soc. Amer. 1984. V. 76. № 3. P. 880–998.
3. *Censor D.* Harmonic and transient scattering from time varying obstacles // J. Acoust. Soc. Amer. 1984. V. 76. № 5. P. 1527–1534.
4. *Piquette Jean C., Van Buren A. L.* Some further remarks regarding scattering of an acoustic wave by a vibrating surface // J. Acoust. Soc. Amer. 1986. V. 80. № 5. P. 1533–1536.
5. *Myers M. K.* On the acoustic boundary condition in the presence of flow // J. Sound and Vibr. 1980. V. 71. № 3. P. 429–434.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
26.VI.1987