АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 3

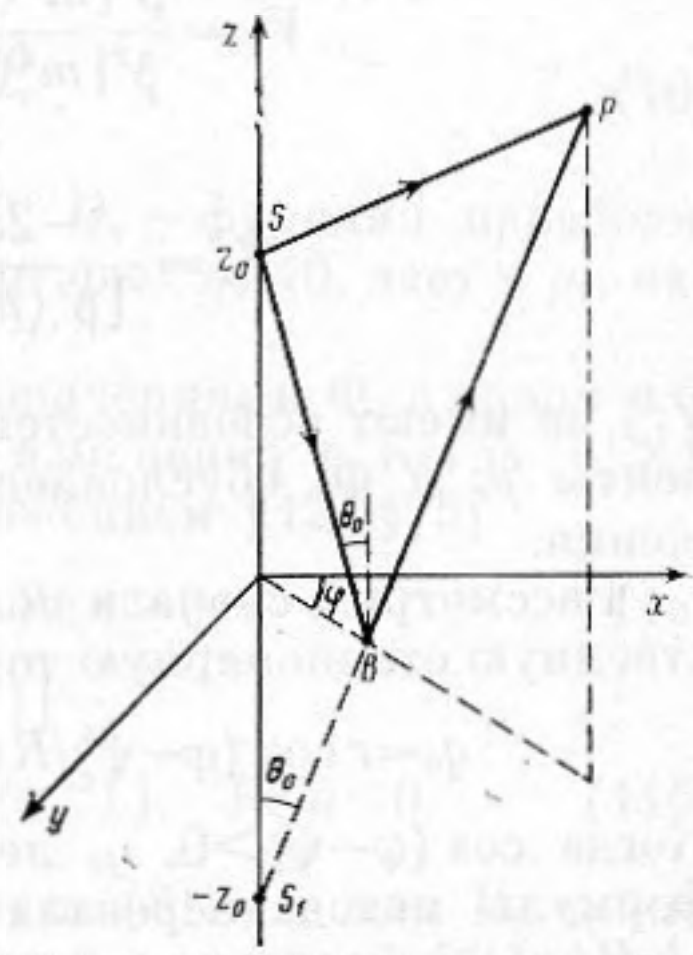
УДК 534.24

ОТРАЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ОТ ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЫ

Годин О. А.

Рассматривается отражение сферической волны от плоской границы однородных жидкостей, движущихся друг относительно друга. Путем разложения падающей волны на плоские и анализа интегрального представления отраженной волны построены локальные высокочастотные асимптотики звукового поля, справедливые вблизи границы области наблюдения боковой волны или вдали от нее, а также равномерная асимптотика. Дана лучевая интерпретация результатов. Сформулированы условия применимости геометрической акустики.

Классической задаче о поле точечного источника звука, расположенного над плоской границей раздела однородных жидкостей, посвящена обширная литература [1—6 и др.]. В то время как отражение цилиндрической и сферической волн от границы неподвижных сред исследовано исчерпывающим образом [1—3, 5, 6], в случае отражения от движущегося полупространства глубоко изучена только двумерная задача [7, 8]. Для точечного источника известные результаты фактически не выходят за рамки первого приближения геометрической акустики [4]. Между тем эта задача, помимо естественного физического интереса в качестве модельной представляет значительную ценность при исследовании распространения звука в движущейся среде, а также генерации шума неоднородными турбулентными струями [9, 10]. В настоящей работе получены дифракционные поправки к геометрическому решению (вблизи границы раздела они дают определяющий вклад в звуковое поле), в том числе боковая волна. Построена равномерная высокочастотная асимптотика отраженного поля, справедливая как в окрестности границы области наблюдения боковой волны, так и вдали от нее.



Фиг. 1. Геометрия задачи. S — источник, S_1 — малый источник, P — точка наблюдения

Пусть нижняя среда, занимающая полупространство $z<0$, движется относительно верхней среды ($z>0$) и находящегося в ней точечного источника со скоростью $\mathbf{v}=(v, 0, 0)$ (фиг. 1). Скорости звука и плотности верхней и нижней сред обозначим соответственно c_1, ρ_1 и c_2, ρ_2. Течение со скачком (тангенциальным разрывом) скорости является неустойчивым [11, § 29]. Будем предполагать, что в среде сформировалось устойчивое течение, отличающееся от течения со скачком скорости лишь в тонком по сравнению с длиной звуковой волны слое в окрестности границы. Влиянием последнего на отражение звука можно пренебречь. Особенности отражения сферической волны от неустойчивого течения будут рассмотрены в отдельной работе.

При падении волны $p_i=R^{-1}\exp(ik_1R)$, где $R=[x^2+y^2+(z-z_0)^2]$, отраженное звуковое поле имеет интегральное представление [1, § 26]

$$p_r(\mathbf{r}, z)=\frac{i}{2\pi}\int d^2\xi \exp\{i[\xi\mathbf{r}+\mu(z+z_0)]\}\mu^{-1}V(\xi),$$

$$\mu=\sqrt{k_1^2-\xi^2},\quad Im\mu\geqslant 0. \tag{1}$$

Здесь $k_{1,2}=\omega/c_{1,2}$ — волновые числа в верхней и нижней средах, ω — частота звука, $\mathbf{r}=(x,\ y)$, $(0,\ 0,\ z_0)$ — координаты источника, $V(\xi)$ — коэффициент отражения плоской волны с горизонтальным волновым вектором ξ, равный [9]

$$V=(m\beta^2\sqrt{k_1^2-\xi^2}-\sqrt{k_2^2\beta^2-\xi^2})/(m\beta^2\sqrt{k_1^2-\xi^2}+$$

$$+\sqrt{k_2^2\beta^2-\xi^2}),\quad m=\rho_2/\rho_1,\quad \beta=1-\xi\mathbf{v}/\omega. \tag{2}$$

Введем полярные координаты $\mathbf{r}=r(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$, $\xi=\xi(\cos\psi,\ \sin\psi)$ и перейдем к интегрированию по безразмерным переменным φ и $q=\xi/k_1$:

$$p_r=\frac{ik_1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Phi(\psi)\,d\psi, \tag{3}$$

$$\Phi(\psi)=\int\limits_0^{\infty}\exp\{ik_1[qr\cos(\psi-\varphi)+\sqrt{1-q^2}(z+z_0)]\}V(q,\psi)\frac{q\,dq}{\sqrt{1-q^2}}. \tag{4}$$

Сложность рассматриваемой задачи состоит в том, что V зависит не только от угла падения плоской волны, но и от азимутального угла ψ. Это нарушает симметрию поля и в отличие от случаев неподвижной среды [1] и отражения цилиндрической волны от движущейся жидкости [7] не позволяет представить p_r в виде однократного интеграла.

Как функция q, коэффициент отражения имеет точки ветвления при $q=\pm1$ и $q=q_{1,2}=n/(M\cos\varphi\pm1)$, где $n=k_2/k_1$, $M=v/c_2$. Будем предполагать, что $M<1$. Тогда точки $q=-1$, $q=q_2$ не попадают на путь интегрирования. Представим V в виде $V=V_1+V_2$:

$$V_1=\frac{\beta^2[m^2(1-q^2)+n^2]-q^2}{\beta^2[m^2(1-q^2)-n^2]+q^2},\qquad V_2=V_3\sqrt{q-q_1},$$

$$V_3=\frac{-2im(1-q^2)^{1/2}[n+q(1+M\cos\psi)]^{1/2}}{[\beta^2(m^2(1-q^2)+n^2)+q^2](1+M\cos\psi)^{-1/2}}, \tag{5}$$

$V_{1,3}$ не имеют особенностей при $q=q_1$. Обозначим $p_1(p_2)$ и $\Phi_1(\Phi_2)$ компоненты p_r и Φ, обусловленные слагаемым $V_1(V_2)$ в коэффициенте отражения.

Рассмотрим сначала поле p_1. Показатель экспоненты в (4) имеет единственную стационарную точку $q=q_0(\psi)$, где

$$q_0=r\cos(\varphi-\psi)/R(\psi),\quad R(\psi)=[r^2\cos^2(\varphi-\psi)+(z-z_0)^2]^{1/2}. \tag{6}$$

Когда $\cos(\varphi-\psi)>0$, q_0 лежит на интервале интегрирования. Используя формулы метода перевала [1, § 27] и пренебрегая величинами порядка $|k_1R(\psi)|^{-2}$ по сравнению с 1, находим

$$\Phi_1=\sqrt{\frac{2\pi}{k_1R(\psi)}}\,e^{ik_1R(\psi)-i\pi/4}\left[q_0V_1(q_0,\psi)-\frac{iN_1(\psi)}{k_1R(\psi)}\right],$$

$$N_1=\left[\frac{q(1-q^2)}{2}\frac{\partial^2V_1}{\partial q^2}+\frac{2-3q^2}{2}\frac{\partial V_1}{\partial q}-\frac{3qV_1}{8}\right]_{q=q_0}. \tag{7}$$

При $\cos(\varphi-\psi)\leqslant0$ $q_0\leqslant0$, и на интервале интегрирования нет стационарных точек. Соответствующий диапазон значений ψ в (3) дает пренебрежимо малый вклад в p_1.

Интеграл, получающийся при подстановке (7) в (3), также допускает оценку методом перевала. Стационарные точки показателя экспоненты находятся из уравнения $\sin2(\psi-\varphi)=0$. Из них на контуре интегрирования лежит единственная точка, удовлетворяющая условию $q_0>0$: $\psi=\varphi$. Вновь используя формулы [1, § 27], находим два первых члена асимпто-

тического разложения p_1 по степеням $1/k_1$:

$$p_1 \approx \frac{\exp(ik_1R_1)}{R_1}\left[V_1(\sin\theta_0, \varphi) - \frac{\hat{N}V_1}{k_1R_1}\right],$$

$$\hat{N} = \frac{i}{2}\left[\frac{1}{q^2}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2} + (1-q^2)\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1-2q^2}{q}\frac{\partial}{\partial q}\right]_{q=\sin\theta_0, \psi=\varphi}. \tag{8}$$

Здесь $\theta_0 = \operatorname{arctg}[r/(z+z_0)]$, $R_1 = [r^2 + (z+z_0)^2]^{1/2}$ (см фиг. 1), $\hat{N}$ — дифференциальный оператор. Отметим, что результат (8) можно получить также, применяя к (1) двумерный метод стационарной фазы.

Оценку p_2 — второй компоненты отраженного поля — не удается найти методом перевала. Если заменить V_1 на V_2, поправочный член $iN_1(\psi)/k_1R(\psi)$ в (8) обратится в бесконечность при ψ таком, что $q_0(\psi) = q_1(\psi)$. Для вывода асимптотики Φ_2 необходимо явно учесть возможность сближения стационарной точки и точки ветвления под интегралом (4). Оценка Φ_2 проводится вполне аналогично выводу равномерной асимптотики p_r в случае $v=0$ [5; 3, гл. 5] и дает

$$\Phi_2 = \frac{4n^3\exp[ik_1R(\psi) + u^2/4 - 9i\pi/8]}{m\left(\frac{1}{\pi}\cos^3\frac{\theta-\delta}{2}\sin^3\delta\cos\right)^{1/2}(k_1R(\psi))^{3/4}}\left[D_{1/2}(u) + \frac{A-1}{u}D_{3/2}(u)\right]\times$$

$$\times\left[1 + O\left(\frac{1}{k_1R(\psi)}\right)\right], \tag{9}$$

$$A = \frac{m^2\sin\theta\cos\theta\cos^2(\theta/2-\delta/2)[0{,}5\sin(\theta+\delta)\sin\delta\cos\delta]^{1/2}}{n^2[\sin^2\theta + (m^2\cos^2\theta - n^2)(1 - Mn^{-1}\sin\theta\cos\psi)^2]},$$

$$u = 2e^{3\pi i/4}[k_1R(\psi)]^{1/2}\sin\frac{\theta-\delta}{2}. \tag{10}$$

Здесь $\delta = \arcsin q_1(\psi)$, $\theta = \arcsin q_0(\psi)$, $q_0(\psi) > 0$, D_ν — функция параболического цилиндра. Диапазон значений ψ, при которых $q_0 \leqslant 0$, дает в p_2, как и в p_1, пренебрежимо малый вклад.

Покажем, что асимптотика p_2 определяется значениями Φ_2 в одном или нескольких узких по сравнению с 1 интервалах изменения ψ. Когда $|u| \gg 1$, $D_\nu(u)$ можно заменить асимптотическим разложением [12, § 5]

$$D_\nu(u) = e^{-u^2/4}u^\nu[1 + O(u^{-2})], \quad \operatorname{Re} u > 0; \tag{11а}$$

$$D_\nu(u) = e^{-u^2/4}u^\nu[1 + O(u^{-2})] -$$

$$-\sqrt{2\pi}\Gamma^{-1}(-\nu)e^{u^2/4 + i\pi\nu\operatorname{sgn}\operatorname{Im}u}u^{-1-\nu}[1 + O(u^{-2})], \quad \operatorname{Re} u < 0. \tag{11б}$$

При подстановке (11а) формула (9) переходит в (8), где под V_1 нужно понимать V_2. Тогда в интеграл (3), как и для p_1, основной вклад дает окрестность стационарной точки $\psi = \varphi$. При $|u| \gg 1$, $\operatorname{Re} u < 0$ асимптотика Φ_2 содержит дополнительное слагаемое с фазовым множителем $\exp[ik_1R \times (\psi)\cos(\theta-\delta)]$. Показатель экспоненты имеет стационарную точку $\psi = \psi_1$. Уравнение на ψ_1 при учете (6) можно записать в виде

$$\sin(\psi_1 - \varphi) = [\operatorname{ctg}\delta(\psi_1)\cos(\psi_1 - \varphi) - \operatorname{ctg}\theta_0]\,\delta'(\psi_1). \tag{12}$$

Ниже будем предполагать, что уравнение (12) имеет единственное решение в области $\varphi - \pi/2 < \psi_1 \leqslant \pi/2 + \varphi$.

Когда $|u| \lesssim 1$, $|(\partial/\partial\psi)D_\nu(u)| \simeq |\partial u/\partial\psi| \lesssim |k_1R(\psi)|^{1/2}$. Поэтому, если ψ не близко к стационарной точке $\psi = \varphi$, множитель при $\exp[ik_1R(\psi)]$ в (9) меняется медленно по сравнению с экспонентой. Следовательно, в интеграл по ψ основной вклад при $|u| \lesssim 1$ вносит окрестность точки $\psi = \varphi$.

Перейдем к оценке интеграла (3) от Φ_2. Рассмотрим сначала случай $|\theta_0 - \delta(\varphi)| \ll 1$. Из (12) находим

$$\psi_1 = \varphi + \delta'(\varphi)[\theta_0 - \delta(\varphi)]/[\sin^2\theta_0 + (\delta'(\varphi))^2] + O([\theta_0 - \delta(\varphi)]^2). \tag{13}$$

Таким образом, $|\psi_1-\varphi|\ll 1$ и весь существенный при интегрировании диапазон значений ψ заключен в малой окрестности точки $\psi=\varphi$. Разложим $u(\psi)$ и $R(\psi)$ по степеням $\psi-\varphi$: $u=u(\varphi)+u'(\varphi)(\psi-\varphi)+\ldots$, $R=R_1[1-0{,}5\sin^2\theta_0(\psi-\varphi)^2+\ldots]$. Для вычисления главного члена асимптотики достаточно ограничиться в этих разложениях выписанными членами, а медленно меняющиеся функции заменить их значениями при $\psi=\varphi$, $\delta(\varphi)=\theta_0$. Переходя к интегрированию по u, имеем

$$p_2=\frac{2n^3\exp[i(k_1R_1-5\pi/8)][1+O(1/k_1R_1+|\theta_0-\delta(\varphi)|)]}{m(\pi\sin^3\theta_0\cos\theta_0)^{1/2}(k_1R_1)^{3/4}u'(\varphi)}\int\limits_{u(\varphi)-\Delta}^{u(\varphi)+\Delta}\Big[D_{1/2}(u)+$$

$$+\frac{A(\varphi)-1}{u(\varphi)}D_{3/2}(u)\Big]e^{u^2/4-ib[u-u(\varphi)]^2}du, \tag{14}$$

где $b=k_1R_1\sin^2\theta_0/2(u'(\varphi))^2$, $\Delta=\pi u'(\varphi)/2$, $|\Delta|\gg 1$. Не меняя оценки погрешности, интегрирование в (14) можно распространить на всю прямую $u=s\exp(-i\pi/4)$, $-\infty<s<+\infty$. Тогда (14) сводится к двум известным интегралам [13, с. 163] вида

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{\alpha^2x^2/4-b(x-y)^2}D_\nu(\alpha x)\,dx=\left(\frac{\pi Q^\nu}{b}\right)^{1/2}e^{\alpha^2y^2/4Q}D_\nu\left(\frac{\alpha y}{Q}\right),$$

$$Q=1-\frac{\alpha^2}{2b^2}. \tag{15}$$

Полагая $\alpha=\exp(-i\pi/4)$, после простых выкладок находим

$$p_2=\frac{2^{3/2}k_1n^3\exp[ik_1R_1+u^2(\varphi)/4Q-7i\pi/8]}{m(\sin^5\theta_0\cos\theta_0)^{1/2}(k_1R_1)^{5/4}Q^{-1/4}}\left\{D_{1/2}(u_1)+\frac{A(\varphi)-1}{u_1}D_{3/2}(u_1)\right\}\times$$

$$\times\left[1+O\left(\frac{1}{k_1R_1}+|\theta_0-\delta(\varphi)\right)\right], \tag{16}$$

$$u_1=u(\psi)Q^{-1/2},\quad Q=1+[\cos(\theta_0/2-\delta(\varphi)/2)\delta'(\varphi)/\sin\theta_0]^2.$$

Рассмотрим теперь другой случай: $|u(\varphi)|\gg 1$, $|u(\psi_1)|\gg 1$. Как показано выше, при этом p_2 можно оценить методом перевала. Вклад стационарной точки $\psi=\varphi$ в p_2 можно вычислить по формулам (8), заменив в них V_1 на V_2. В сумме с p_1 этот вклад дает геометроакустическую компоненту отраженного поля с поправочным множителем $1-\hat{N}V/k_1R_1V(\sin\theta_0,\varphi)+O(|k_1R_1|^{-2})$. При $\theta(\psi_1)>\delta(\psi_1)$ появляется вторая стационарная точка $\psi=\psi_1$. Она дает дополнительный вклад p_l в отраженное поле — боковую волну:

$$p_l=2in^3(k_1m)^{-1}\{[DR^3(\psi)\sin^3(\theta-\delta)\sin^3\delta\cos\delta]^{-1/2}\times$$
$$\times\exp[ik_1R(\psi)\cos(\theta-\delta)]\}_{\psi=\psi_1},$$

$$D=-\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}R(\psi)\cos(\theta-\delta)=r\sin\delta\{\operatorname{ctg}\theta_0[\delta''-(\delta')^2\operatorname{ctg}\delta]+ \tag{17}$$
$$+\cos(\psi-\varphi)[1+(\delta')^2(1+2\operatorname{ctg}^2\delta)-\delta''\operatorname{ctg}\delta]\}.$$

Если $v=0$, то $\delta(\psi)=\arcsin n$, $\psi_1=\varphi$, $D=r\sin\delta$, и p_l (17) переходит в известное [3, гл. 5] выражение для боковой волны у границы неподвижных сред.

Пусть $|\theta_0-\delta(\varphi)|\simeq 1$. Тогда $|u(\varphi)|\gg 1$. Если при этом $|n(\psi_1)|\lesssim 1$, то $|\theta(\psi_1)-\delta(\psi_1)|\ll 1$ и согласно (12) $|\psi_1-\varphi|\ll 1$. Значит, $|\theta_0-\delta(\varphi)|\approx|\theta(\psi_1)-\delta(\psi_1)+[\theta'(\psi_1)-\delta'(\psi_1)](\varphi-\psi_1)|\ll 1$. Полученное противоречие показывает, что рассмотренные выше два случая: $|\theta_0-\delta(\varphi)|\ll 1$ и $|u(\varphi)|\gg 1$, $|u(\psi_1)|\gg 1$ исчерпывают задачу. Три последних неравенства могут выполняться одновременно. Когда углы θ_0 и $\delta(\varphi)$ близки, легко найти в явном виде приближенное решение уравнения (12):

$$\psi_1-\varphi\approx[\theta_0-\delta(\varphi)]\delta'(\varphi)/[\sin^2\theta_0+(\delta'(\varphi))^2]. \tag{18}$$

Отметим, что в этом случае знак разности $\theta(\psi_1)-\delta(\psi_1)$, определяющий область наблюдения боковой волны, совпадает со знаком $\theta_0-\delta(\varphi)$. Подставляя (18) в (17) и заменяя в (16) функции параболического цилиндра их асимптотикой (11), можно убедиться, что в общей области применимости метод перевала и соотношение (16) дают один и тот же результат.

При анализе отраженного поля предполагалось, что q_1 не близко к 1 ($|k_1R(\psi)[1-q_1(\psi)]|\gg 1$ при $\psi=\varphi$ и $\psi=\psi_1$). В противном случае при значениях ψ, дающих основной вклад в p_2, под интегралом (4) сближаются точки ветвления $q=q_1$ и $q=1$. Тогда, а также при резком плотностном контрасте ($m\gg 1$ или $m\ll 1$) как при $v\neq 0$, так и при $v=0$ необходимо специальное рассмотрение.

Полученные выше выражения для поля p_2 можно записать в виде единой формулы

$$p_2=B_1\exp(ik_1R_1+u_2^2/4)\,[D_{1/2}(u_2)+(B_2-1)u_2^{-1}D_{3/2}(u_2)]\,, \tag{19}$$

где функции $B_{1,2}$ и u_2 подлежат определению. При $|u_2|\gg 1$ из (19) и (11) имеем

$$p_2\approx B_1\exp(ik_1R_1)\times$$
$$\times\{B_2u_2^{1/2}-2^{-1/2}(-u_2)^{-3/2}\exp(u_2^2/2)\,[1-\operatorname{sgn}(\operatorname{Re}u_2)]\}. \tag{20}$$

Сравнивая фазы боковой волны в (17) и (20), находим

$$u_2=\exp(3\pi i/4)\,(2k_1R_1)^{1/2}\{1-\cos[\theta(\psi_1)-\delta(\psi_1)]\cos\theta_0/\cos\theta(\psi_1)\}^{1/2}. \tag{21}$$

Формула (20) будет давать правильные значения амплитуд геометроакустической части p_2 и боковой волны, если

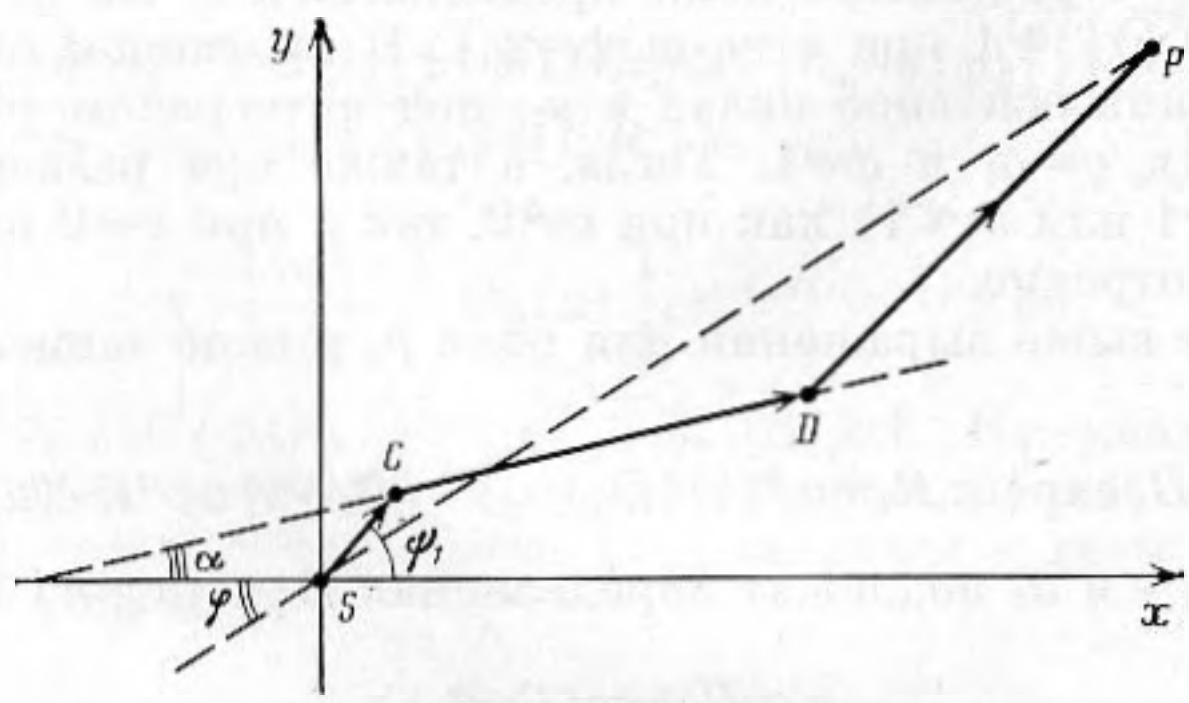
$$B_1=\left(\frac{2u_2}{u(\psi_1)}\right)^{3/2}\left.\frac{\exp(-7\pi i/8)\,n^3(k_1R^3D^2)^{-1/4}}{m[\cos^3(\theta/2-\delta/2)\sin^3\delta\cos\delta]^{1/2}}\right|_{\psi=\psi_1};$$
$$B_2=\left(\frac{2u(\varphi)}{u_2}\right)^{1/2}\left.\frac{\exp(-7\pi i/8)\,n^3k_1(k_1R_1)^{-5/4}A/B_1}{m\sin\theta_0[\cos(\theta/2-\delta/2)\sin^3\delta\cos\delta]^{1/2}}\right|_{\psi=\varphi}. \tag{22}$$

Функции $u(\psi)$ и $A(\varphi)$ определены в (10). Выражения (19), (21), (22) при $|\theta_0-\delta(\varphi)|\ll 1$ переходят в (16), а при $v=0$ сводятся к известной равномерной асимптотике поля [5; 3, гл. 5] в неподвижной среде.

Дадим лучевую интерпретацию полученным асимптотикам p_r. В формулу (8) входит значение коэффициента отражения при $\xi_0=k_1(\sin\theta_0\cos\varphi,\ \sin\theta_0\sin\varphi)$, что соответствует отражению луча по законам геометрической акустики (зеркально) (см. фиг. 1). Вклад в зеркально-отраженную компоненту p_r дают и p_1 и p_2. Главный член асимптотики $-\exp(ik_1R_1)\,V(\sin\theta_0,\ \varphi)/R_1$ — соответствует решению задачи в приближении геометрической акустики. Зеркально-отраженная компонента поля содержит и поправку порядка $1/k_1R_1$ к амплитуде и фазе этого решения. Именно поправки определяют отраженное поле, если ξ_0 близко к значению ξ, при котором V обращается в ноль. В остальных случаях поправки к геометроакустическому выражению для p_r малы при $|k_1R_1|\gg 1$. Они, однако, могут составлять значительную часть полного звукового поля вблизи границы раздела, где главный член p_r по амплитуде близок к падающей волне и сдвинут по фазе примерно на π. Поправками к полному полю можно пренебречь, если $k_1(z+z_0)\gg|n^2\beta^2-1|^{1/2}[k_1r^2|p_l|+|\hat{N}V|]/m\beta^2$, $\beta=1-Mn^{-1}\cos\varphi$. Таким образом, для применимости геометрической акустики необходимо, чтобы суммарное возвышение источника и приемника над границей было велико по сравнению с длиной волны.

Вертикальная компонента волнового вектора p_l (17) равна $k_1\cos\delta(\psi_1)$. Если $\sin\delta(\psi_1)>1$, то боковая волна неоднородна, $|p_l|$ экспоненциально убывает с ростом $z+z_0$. Будем предполагать ниже, что $\sin\delta(\psi_1)<1$. Тогда боковая волна допускает наглядную интерпретацию на основе концепции дифракционных лучей. Рассмотрим луч, выходящий из источника под углом θ к оси Oz и углом ψ к плоскости xz. Согласно уравнениям геометрической акустики движущейся среды [14, § 7], после преломления на

границе раздела луч будет параллелен вектору $\mathbf{v}+c_2\mathbf{v}/v$, где $\mathbf{v}=k_1(\sin\theta\cos\psi,\ \sin\theta\sin\psi,\ -[(n-M\sin\theta\cos\psi)^2-\sin^2\theta]^{1/2})$ — волновой вектор. Преломленный луч будет идти параллельно границе, если $\theta=\delta(\psi)$. Отметим, что для лучей с фиксированным значением ψ $|V|<1$ при $\theta<\delta(\psi)$, $|V|=1$ при $\theta\geqslant\delta(\psi)$, т. е. $\delta(\psi)$ является критическим углом полного отражения. Траектория луча, падающего под углом $\theta=\delta(\psi)$, пока-



Фиг. 2. Проекция дифракционного луча $SCDP$ на плоскость xy. Участки SC и DP трассы боковая волна проходит в верхней, а участок CD — в нижней среде, $|CD|=L$

зана на фиг. 2. В нижней среде этот луч образует с осью Ox угол α такой, что $\operatorname{tg}\alpha=\sin\psi/(M+\cos\psi)$.

Волна, бегущая в нижней среде параллельно границе, как и в случае $v=0$, излучает боковую волну [1, § 30]. После возвращения в верхнюю среду луч образует угол $\delta(\psi)$ с осью Oz и угол ψ с плоскостью xz. Условие попадания дифракционного луча $SCDP$ с углом выхода из источника $\psi=\psi_1$ (фиг. 2) в точку с цилиндрическими координатами $(r,\ \varphi,\ z)$ можно записать в виде

$$r\cos\varphi=(z+z_0)\operatorname{tg}\delta(\psi_1)\cos\psi_1+L\cos\alpha(\psi_1),$$

$$r\sin\varphi=(z+z_0)\operatorname{tg}\delta(\psi_1)\sin\psi_1+L\sin\alpha(\psi_1),$$

где L — длина отрезка луча в нижней среде. Исключая L и подставляя значение $\operatorname{tg}\alpha$, получаем на ψ_1 уравнение

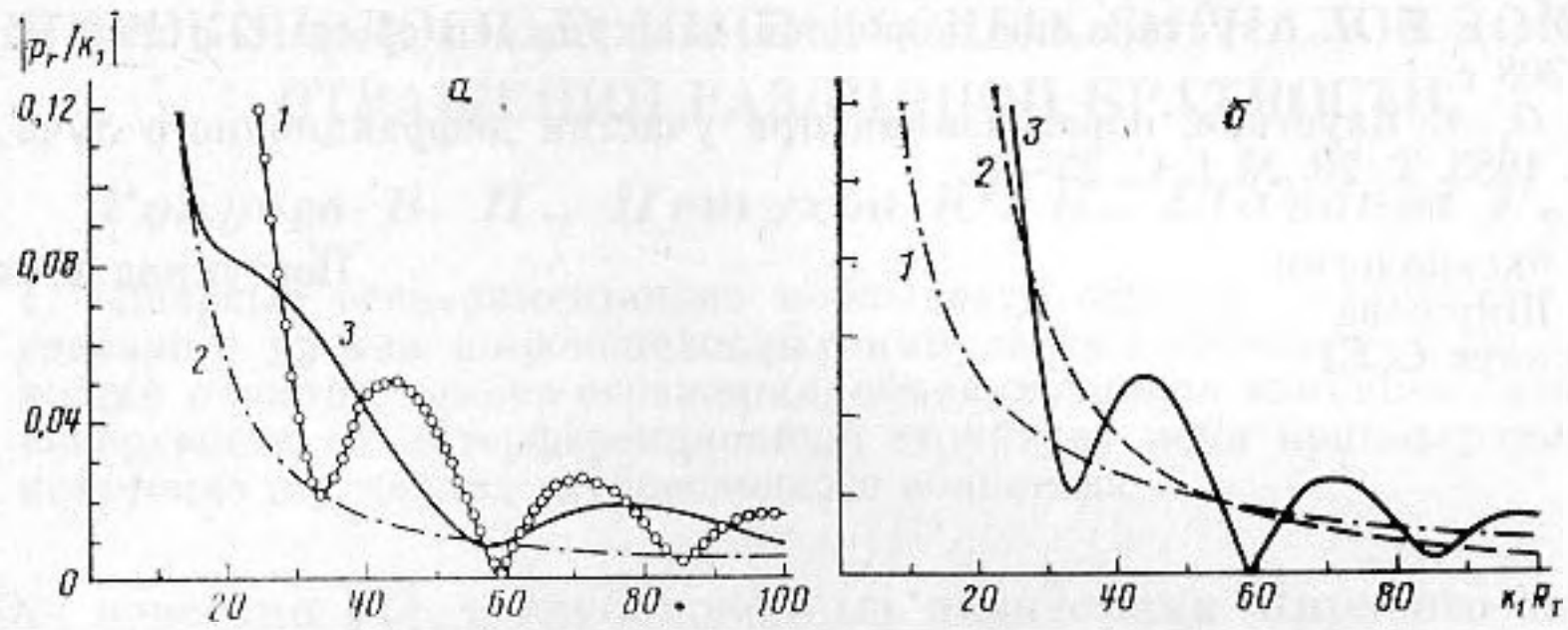
$$\sin(\psi_1-\varphi)=M\,[\sin\varphi-\operatorname{ctg}\theta_0\sin\psi_1\operatorname{tg}\delta(\psi_1)],\tag{23}$$

равносильное уравнению (12).

Найдем набег фазы на луче $SCDP$. Для этого следует проинтегрировать скалярное произведение волнового вектора на элемент длины дуги луча. Длина проекции луча на направление горизонтальной компоненты $\mathbf{v}$ равна $r\cos(\varphi-\psi_1)$ (фиг. 2). Отсюда для фазового набега имеем $k_1(z+z_0)\cos\delta(\psi_1)+k_1r\cos(\varphi-\psi_1)\sin\delta(\psi_1)$, что совпадает с деленным на i показателем экспоненты в (17). Лучевые соображения позволяют вычислить и амплитуду боковой волны, но мы не будем на этом останавливаться.

Как видно при выводе соотношения (17), боковая волна попадает в те точки верхней среды, для которых выполнено неравенство $\theta(\psi_1)>\delta(\psi_1)$. Существование границы области наблюдения боковой волны $\theta(\psi_1)=\delta(\psi_1)$ имеет простой физический смысл. Заметим, что в силу (23) на этой границе $\psi_1=\varphi$ и, следовательно, $\theta(\psi_1)=\theta_0=\delta(\varphi)$, $L=0$. Таким образом, границе области наблюдения соответствует минимально возможная (нулевая) длина участка CD дифракционного луча (см. фиг. 2). Граница области наблюдения представляет собой лежащую в верхней среде часть поверхности некругового конуса с вершиной в мнимом источнике. Боковая волна наблюдается в части верхней среды, лежащей между конусом и границей раздела.

Зависимость акустического давления от координат точки наблюдения иллюстрирует фиг. 3, построенная по формулам (8), (17). При выбранных для расчета значениях параметров боковая волна отсутствует при любых θ_0, если $\varphi=\pi$. В этом случае амплитуда $|p_r|$ монотонно спадает с ростом R_1. Качественно отличная картина наблюдается при $\varphi=0$. Осцилляции $|p_r|$ обусловлены интерференцией зеркально-отраженной компоненты поля и боковой волны. При $k_1R_1<50$ последняя дает основной вклад в p_r. Периоды осцилляций амплитуды отраженного поля различны



Фиг. 3. Амплитуда звукового давления при отражении сферической волны от движущейся среды с параметрами $n=0{,}5$; $m=0{,}1$; $M=0{,}5$ при $\theta_0=\pi/3$ и различных расстояниях от мнимого источника. *а* — полное отраженное поле p_r при распространении звука по течению ($\varphi=0$, кривая *1*), против течения ($\varphi=\pi$, кривая *2*) и в отсутствие течения (кривая *3*). *б* — роль различных компонент поля в формировании p_r при $\varphi=0$. *1* — зеркально-отраженная компонента, *2* — боковая волна, *3* — полное отраженное поле

при различных M, поскольку направление распространения боковой волны зависит от скорости течения в нижней среде.

В окрестности границы области наблюдения боковой волны формулы лучевого типа (8), (17) для зеркально-отраженной компоненты поля и p_l дают расходящиеся значения и неприменимы. Это объясняется образованием каустики обычного и дифракционного лучей [15]. Отметим, что асимптотику поля, пригодную к окрестности границы области наблюдения боковой волны, можно было построить, исходя из поля в лучевом приближении по рецепту «наращивания дифракционного мяса на лучевой скелет», изложенному для каустики рассматриваемого вида в [15]. Согласно формулам (8), (16), при $\theta_0\approx\delta(\varphi)$ главный член асимптотики p_r обусловлен компонентой p_1 поля и по-прежнему совпадает с решением в приближении геометрической акустики. однако поправка к нему будет не порядка $(k_1R_1)^{-1}$, а порядка $(k_1R_1)^{-1/4}$, т. е. значительно больше, чем вдали от каустики. Эту поправку дает p_2.

Автор благодарит Л. М. Бреховских за плодотворное обсуждение результатов работы и С. В. Харькина за помощь в численных расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. Изд. 2-е, доп. и перераб. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. *Banos A.* Dipole radiation in the presence of a conducting half-space. New York etc.: Pergamon Press, 1966. 246 p.
3. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т. 2/Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 557 с.
4. *Войт С. С.* Отражение и преломление сферических звуковых волн при переходе из неподвижной среды в движущуюся // Прикл. мат. мех. 1953. Т. 17. № 2. С. 157–164.
5. *Bleistein N.* Uniform asymptotic expansion of integrals with a stationary point near an algebraic singularity // Comm. Pure Appl. Math. 1966. V. 19. № 4. P. 353–370.
6. *Годин О. А.* Боковые волны в средах с поглощением // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 2. С. 173–180.
7. *Jones D. S., Morgan J. D.* The instability of a vortex sheet on a subsonic stream under acoustic radiation // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1972. V. 72. № 3. P. 465–491.
8. *Миронов М. А.* Воздействие гармонического источника объемной скорости на те-

чение с плоским тангенциальным разрывом (плоская задача) // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 1. С. 79–85.
9. *Miles J. W.* On the reflection of sound at an interface of relative motion // J. Acoust. Soc. Amer. 1957. V. 29. № 2. P. 226–228.
10. *Голдстейн М. Е.* Аэроакустика/Пер. с англ. М.: Машиностроение. 1981. 295 с.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. Изд. 3-е, перераб. М.: Наука, 1986. 736 с.
12. *Миллер Дж. Ч. П.* Таблицы функций Вебера (функций параболического цилиндра)/Пер. с англ. М.: ВЦ АН СССР, 1968. CXVI+143 с.
13. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 751 с.
14. *Блохинцев Д. И.* Акустика неоднородной движущейся среды. 2-е изд. М.: Наука, 1981. 208 с.
15. *Годин О. А.* Каустика, образованная при участии дифракционного луча // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 1. С. 23–31.

Институт океанологии
им. П. П. Ширшова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
6.X.1987