

УДК 534.222

КИНЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ОДНОМЕРНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Руденко О. В., Хохлова В. А.

Получено кинетическое уравнение, описывающее эволюцию функции распределения параметров случайной последовательности слабых ударных волн с учетом движения разрывных фронтов и их парных соударений. Исследована трансформация различных функций распределения, спектров интенсивности ансамбля ударных волн с конечной шириной фронта.

Как известно, процесс слияния двух слабых ударных волн, бегущих в одном направлении, аналогичен парному столкновению абсолютно неупругих частиц (см., например, [1]). Естественно, возникает идея использовать методы кинетической теории газов в задачах нелинейной акустики. Элементы кинетического подхода присутствуют в серии работ С. Н. Гурбатова [2] с соавторами, посвященных теории одномерной акустической турбулентности с учетом многократного слияния фронтов треугольных импульсов. В работе [3] эволюция статистических характеристик ансамбля плоских *N*-волн рассматривалась на основе кинетических уравнений, однако столкновения разрывов при этом не учитывались. Насколько нам известно, до сих пор не удалось предложить кинетическое уравнение типа уравнения Больцмана, которое описывало бы эволюцию функции распределения ансамбля слабых ударных волн как из-за переноса вероятности (вследствие движения фронтов), так и ее рождения — уничтожения при парных соударениях. Ясно, что для корректного описания взаимодействия разрывов требуется ввести в кинетическое уравнение интеграл столкновений.

Заметим, что существует аналогия между излагаемой ниже теорией и ранними работами по акустической турбулентности (см., например, [4–7]). Эта аналогия, однако, является чисто внешней. Если в упомянутых работах в качестве частиц брался фононный газ или ансамбль слабо взаимодействующих квазимонохроматических волн, то ниже речь пойдет о сильно нелинейных объектах — ударных волнах, для описания которых спектральный подход неудобен. В этом смысле более близкими можно считать работы по солитонным газам [1], где «частицами» также считаются сильно нелинейные образования.

Рассмотрим случайную последовательность слабых ударных волн (фиг. 1), эволюция которой описывается уравнением Бюргерса [8]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}. \tag{1}$$

Здесь *u* — колебательная скорость в волне, бегущей вдоль оси *x*, $\tau = t - x/c_0$; ε , *b* — параметры нелинейности и диссипации; *c*₀, ρ_0 — равновесные скорость звука и плотность среды. Воспользуемся известной аналогией между слабыми ударными волнами и газом абсолютно неупругих частиц [1], справедливой для больших чисел Рейнольдса. Сопоставим высоте каждой «ступеньки» (фиг. 1) $(u_{i+1} - u_i)$ — массу частицы *m*_{*i*}, а изменению ее сопровождающей координаты $d\tau_i/dx$ — скорости *v*_{*i*} этой частицы. Согласно (1), движение каждого разрыва идет по закону

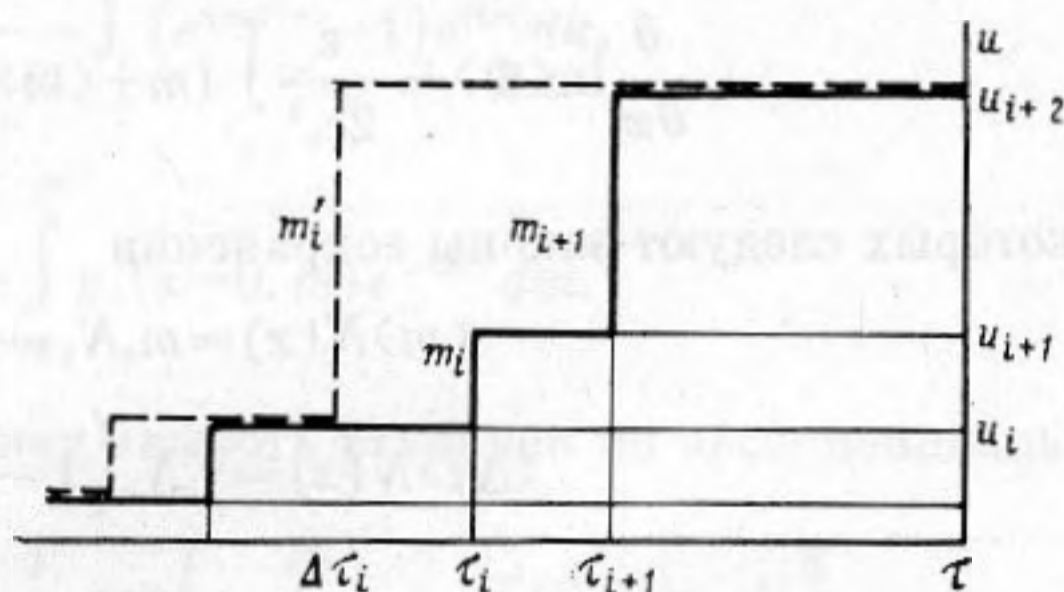
$$v_i = \frac{d\tau_i}{dx} = - \frac{\varepsilon}{2c_0^3 \rho_0} (u_i + u_{i+1}). \tag{2}$$

Как нетрудно проверить, при столкновении двух разрывов с номерами i , $i+1$ сохраняются масса и количество движения ассоциированных с ними частиц:

$$\begin{aligned} m_i' &= m_i + m_{i+1}, \\ m_i' v_i' &= m_i v_i + m_{i+1} v_{i+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть вероятность появления i -й ступеньки высотой m_i зависит только от промежутка времени $\Delta\tau_i$, прошедшего с момента возникновения $(i-1)$ -й ступеньки (фиг. 1). Введем функцию распределения $g(x; \Delta\tau, m)$ — плотность вероятности того, что между двумя соседними разрывами прошло

Фиг. 1. Отрезок реализации случайного процесса, состоящего из последовательности слабых ударных волн, на различных расстояниях $x_1 < x_2$ (соответственно сплошная и штриховая линии)



время $\Delta\tau$ и величина второго из них равна m . Эволюция g происходит как за счет свободного движения разрывов в соответствии с (2), так и в результате их парных соударений.

Вывод кинетического уравнения для функции g в рамках данной статьи можно дать лишь схематически; удобно следовать идеям, использованным при получении уравнения Больцмана [9]. Выделим достаточно длинный отрезок реализации случайного процесса, состоящий из многих ступенек $N(x) \gg 1$. Тогда плотность вероятности g можно представить как отношение числа разрывов $n(x; \Delta\tau, m)$ с фиксированными параметрами $(\Delta\tau, m)$ к их общему числу $N(x)$. Последнее изменяется только за счет столкновений внутри отрезка реализации; крайними эффектами, если $N \gg 1$, можно пренебречь.

При увеличении пройденного волной расстояния на величину Δx значение

$$n(x + \Delta x; \Delta\tau, m) = N(x + \Delta x) g(x + \Delta x; \Delta\tau, m) = (L + I_+ + I_-) n(x; \Delta\tau, m). \quad (4)$$

Здесь L — оператор переноса, изменяющий $n(x; \Delta\tau, m)$ вследствие свободного движения разрывов. Интеграл столкновений I_+ описывает такие соударения, в результате которых образуются ступеньки с нужными параметрами $(\Delta\tau, m)$ и n увеличивается. Напротив, I_- описывает столкновения с участием ступенек $(\Delta\tau, m)$, из-за чего n уменьшается. Устремляя в выражении (4) Δx к нулю, получим нелинейное интегродифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{2c_0^2} (m + \langle m \rangle) \frac{\partial g}{\partial \Delta\tau} &= \frac{\varepsilon}{2c_0^2} \left\{ m \int_0^m g(x; \Delta\tau, m') \times \right. \\ &\times g(x; 0, m - m') dm' - (m - \langle m \rangle) g \int_0^\infty g(x; 0, m') dm' \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Обсудим вначале общие свойства решений полученного кинетического уравнения (5). Нетрудно видеть, что для любой функции распределения g , удовлетворяющей (5), выполнено условие нормировки

$$\int_0^\infty \int_0^\infty g(x; \Delta\tau, m) d\Delta\tau dm = 1.$$

Статистическое усреднение интересующей нас зависимости $\Phi(x; \Delta\tau, m)$ проводится обычным способом:

$$\langle \Phi \rangle = \iint_0^{\infty} \Phi g(x; \Delta\tau, m) d\Delta\tau dm.$$

Если в качестве Φ взять одну из функций

$$m, 1/N, \Delta\tau [1 - (\varepsilon m_0 / c_0^2 \tau_0) x]^{-1},$$

получим простые соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \langle \Phi \rangle = \frac{\varepsilon}{2c_0^2} \int_0^{\infty} (m + \langle m \rangle) g(x; 0, m) dm,$$

из которых следуют законы сохранения

$$\langle m \rangle N(x) = m_0 N_0 = \text{const},$$

$$\langle \Delta\tau \rangle N(x) = \tau_0 N_0 \left(1 - \frac{\varepsilon m}{c_0^2 \tau_0} x \right).$$

Здесь τ_0, m_0, N_0 — значения средних $\langle \Delta\tau \rangle, \langle m \rangle$ и N при $x=0$. Видна общая закономерность: с ростом x средняя высота сталкивающихся разрывов $\langle m \rangle$ увеличивается, поскольку число их уменьшается.

Удается построить ряд точных и приближенных решений кинетического уравнения (5). Рассмотрим здесь одно точное решение, отвечающее пуассоновскому процессу

$$g(x; \Delta\tau, m) = \frac{1}{\tau_0} \exp\left(-\frac{\Delta\tau}{\tau_0}\right) g_0(x, m).$$

Неизвестная функция g_0 определится из уравнения

$$\frac{\partial g_0}{\partial x} + \frac{\varepsilon m}{c_0^2 \tau_0} g_0 = \frac{\varepsilon m}{2c_0^2 \tau_0} \int_0^m g_0(x, m') g_0(x, m-m') dm'. \quad (6)$$

Не решая (6), можно найти явные выражения для моментов, например

$$\langle \Delta\tau \rangle = \tau_0, \quad \langle \Delta\tau^2 \rangle = 2\tau_0^2,$$

$$\langle m \rangle = \frac{m_0}{1-x/x_p}, \quad \langle m^2 \rangle = \frac{m_0^{(2)}}{(1-x/x_p)^3}. \quad (7)$$

Здесь $x_p = c_0^2 \tau_0 / \varepsilon m_0$ — среднее расстояние, на котором «схлопывается» реализация случайного процесса. Чтобы решить (5), введем функцию $f(x, m)$ и ее изображение Лапласа $\tilde{f}(x, s)$:

$$\tilde{f} = \int_0^{\infty} f e^{-sm} dm = \int_0^{\infty} g_0(x, m) \exp\left[\frac{\varepsilon x}{c_0^2 \tau_0} m - sm\right] dm.$$

Для изображения \tilde{f} получим уравнение типа простых волн

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c_0^2 \tau_0} \tilde{f} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s} = 0,$$

решение которого дается неявной функцией

$$\tilde{f} = \Phi(s - \kappa \tilde{f}), \quad \kappa = \frac{\varepsilon x}{c_0^2 \tau_0}, \quad (8)$$

где вид Φ определяется из условия на границе

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} f(x=0, m) e^{-sm} dm = \int_0^{\infty} g_0(x=0, m) e^{-sm} dm.$$

Выполняя обратное преобразование по формуле Меллина, воспользуемся свойством аналитичности Φ и деформируем контур в комплексной плоскости, сводя расчет к интегрированию по мнимой оси. Переходя к переменной $s=ik$, получим

$$g_0 = \frac{e^{-km}}{2\pi km} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{km\Phi(k)} - 1] e^{ikm} dk, \quad (9)$$

$$\Phi(k) = \int_0^{\infty} g_0(x=0, m) e^{-ikm} dm.$$

Для исходного распределения «высот» ступенек по экспоненциальному закону

$$g_0(0, m) = f(0, m) = \frac{1}{m_0} \exp\left(-\frac{m}{m_0}\right), \quad \tilde{f}(0, s) = \frac{1}{1+sm_0} \quad (10)$$

явная функция типа (8) разрешима относительно \tilde{f} :

$$\tilde{f} = \frac{x_p}{2x} \left[(1+sm_0) - \sqrt{(1+sm_0)^2 - 4\frac{x}{x_p}} \right]. \quad (11)$$

По изображению (11) удастся рассчитать оригинал; возвращаясь к g_0 , находим распределение на расстоянии x :

$$g_0 = \frac{1}{m_0} \sqrt{\frac{x_p}{x}} \frac{m_0}{m} \exp\left[-\frac{m}{m_0} \left(1 + \frac{x}{x_p}\right)\right] I_1\left(2\frac{m}{m_0} \sqrt{\frac{x}{x_p}}\right). \quad (12)$$

Точное выражение (12) нетрудно получить также из общего представления (9) решения кинетического уравнения (6).

В случае больших значений $m \gg m_0$ выражение (12) упрощается:

$$g_0 \approx \frac{1}{m_0} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{x_p}{x}\right)^{3/4} \left(\frac{m_0}{m}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{m_0} \left(1 - \sqrt{\frac{x}{x_p}}\right)^2\right].$$

Видно, что при $x \rightarrow x_p$ экспоненциальная асимптотика переходит в степенную: $g_0 \sim (m/m_0)^{-3/2}$. Эта зависимость не связана с конкретным видом (10) исходного распределения. Пользуясь методом перевала, можно показать, что закон $m^{-3/2}$ получается из общего решения (8) для произвольного вида $g_0(x=0, m)$.

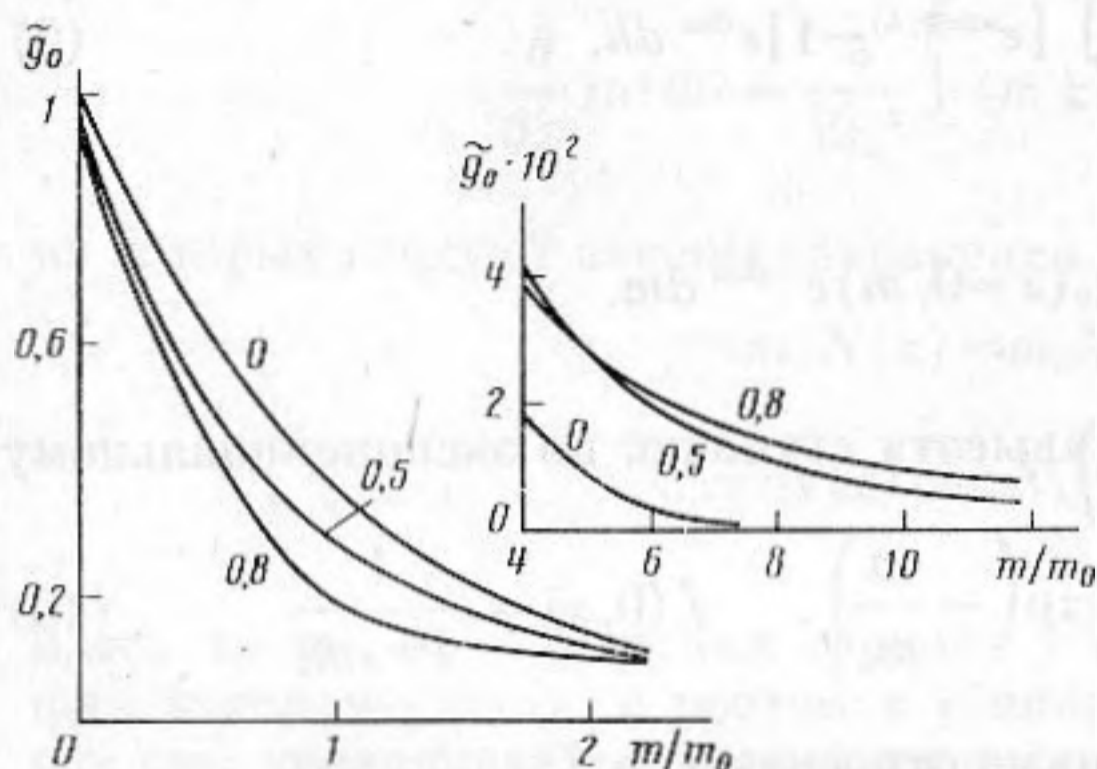
На фиг. 2 изображены зависимости $g_0(x, m)$ на различных расстояниях $x/x_p = 0; 0,5; 0,8$. Видны характерные тенденции в изменении функции распределения: уменьшение плотности вероятности вблизи среднего значения $m=m_0$, замедление (с ростом x) скорости убывания вероятности больших значений m . Действительно, так как распределение промежутков времени Δt между разрывами не зависит от амплитуд m , наиболее активно будут взаимодействовать «тяжелые частицы» с $m \gg m_0$ — относительные скорости движения у них выше.

Приведем еще два примера, иллюстрирующие процесс трансформации распределения амплитуд m , происходящий из-за слияния разрывов. Пользуясь решением (9), рассмотрим предельные случаи «узкого» начального распределения (амплитуды разрывов близки к среднему значению m_0)

и более «широкого» распределения:

$$g_0(0, m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}} \exp\left[-\frac{(m - m_0)^2}{2\gamma^2}\right], \quad \gamma \ll m_0; \quad g_0(0, m) = \frac{m}{m_0^2} e^{-\frac{m}{m_0}}. \quad (13)$$

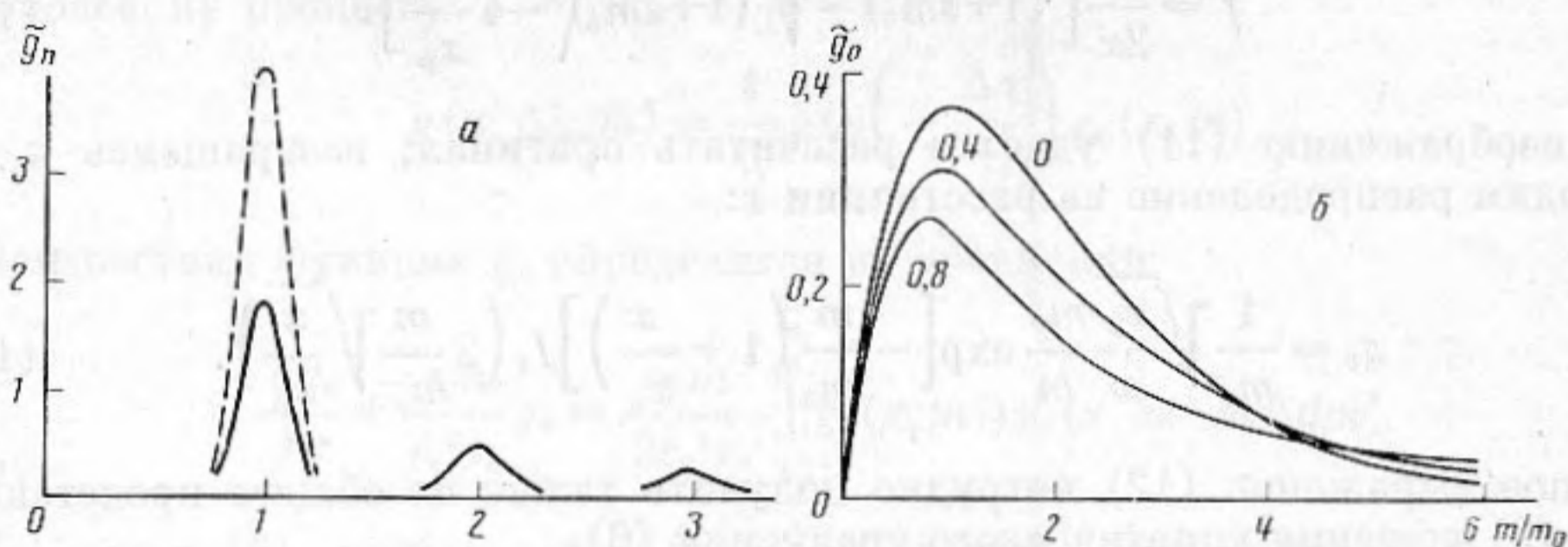
Ясно, что в первом случае, когда сталкивающиеся разрывы при $x \rightarrow 0$ имеют преимущественную амплитуду m_0 , будут образовываться ступеньки высотой $2m_0$ (парные соударения), $3m_0$ (слияния трех разрывов), ..., nm_0 . Таким образом, при $x > 0$ функция распределения представляет собой набор равноотстоящих друг от друга пиков, а плотность вероятности с ро-



Фиг. 2

Фиг. 2. Зависимости нормированной функции распределения $\tilde{g}_0 = g_0(x, m)m_0$ от параметра m/m_0 на различных расстояниях x/x_p (цифры у кривых)

Фиг. 3. Зависимости нормированных функций распределения от параметра m/m_0 на различных расстояниях в случаях: а — «узкого» начального распределения; штриховая линия соответствует $x=0$, сплошные линии — $x=0,8x_p$; б — «широкого» начального распределения. Цифры у кривых — значения x/x_p



Фиг. 3

стом x «перетекает» в сторону больших значений m :

$$g_0 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n, \quad g_n = \frac{1}{n! \sqrt{n} \sqrt{2\pi\gamma^2}} \left(\frac{m}{m_0} \frac{x}{x_p}\right)^{n-1} \exp\left[-\frac{(m - nm_0)^2}{2n\gamma^2} - \frac{m}{m_0} \frac{x}{x_p}\right]. \quad (14)$$

На фиг. 3, а изображены зависимости $\tilde{g}_n = g_n m_0$ (14), построенные для $n=1, 2, 3$ на расстояниях $x=0$ (штриховая кривая) и $x=0,8x_p$ (сплошные кривые). Видно, что с ростом x происходит уменьшение исходной функции распределения, образуются ее «гармоники», причем их форма более гладкая, а ширина линий увеличивается с номером $n \sim \sqrt{n}$.

Процесс трансформации «широкого» распределения (вторая из формул (13)) показан на фиг. 3, б. С увеличением расстояния ($x/x_p = 0; 0,4; 0,8$) здесь наблюдается сдвиг максимума влево, но в основном, как и на фиг. 3, а, вероятность «перетекает» в сторону больших m .

Полученные выше функции распределения можно использовать для расчета средних характеристик случайного процесса. Остановимся здесь на анализе высокочастотных асимптотик спектра интенсивности. Решение уравнения Бюргерса (1) — одиночная стационарная ударная вол-

на — имеет вид [7]

$$u_j = u_{0j} + \frac{m_j}{2} \operatorname{th} \left(\frac{\varepsilon c_0 \rho_0}{2b} m_j (\tau - \tau_j) \right). \quad (15)$$

Здесь τ_j , m_j — момент возникновения и высота ударного фронта, u_{0j} — скорость его движения в сопровождающей ($\tau = t - x/c_0$) системе координат, Фурье-образ (15) равен

$$S_j(\omega) = 2\pi u_{0j} \tau_0 \delta(\omega \tau_0) - i\pi m_0 \tau_0 \Gamma \operatorname{sh}^{-1} \left(\pi \omega \tau_0 \frac{m_0}{m_j} \Gamma \right) e^{-i\omega \tau_j}. \quad (16)$$

Здесь $\Gamma^{-1} = \varepsilon c_0 \rho_0 m_0 \tau_0 / b$ — акустическое число Рейнольдса; считаем $\Gamma \ll 1$ — фронты узкие, их ширина мала по сравнению с расстоянием между ними. При этом из последовательности ступенек (16) можно сформировать реализацию по типу изображенной на фиг. 1, и ее эволюция будет происходить по тем же законам.

Если процесс стационарный и вероятность появления фронта равномерна по τ , то спектр представим как

$$\langle S(\omega) S^*(\omega') \rangle = G(\omega) \delta(\omega - \omega') \quad [10],$$

где

$$G(\omega) = 2\pi^3 m_0^2 \tau_0 \Gamma^2 \int_0^\infty \frac{g_0(x, m) dm}{\operatorname{sh}^2(\pi \omega \tau_0 \Gamma m_0 / m)}. \quad (17)$$

Рассмотрим изменение формы спектра интенсивности $G(\omega)$ с расстоянием в случаях регулярного распределения ступенек по высоте, когда все они имеют одинаковую величину $\langle m \rangle$, и широкого распределения, например экспоненциального (10). Для регулярной волны, т. е. когда $g_0(x, m) = \delta(m - \langle m \rangle)$, непосредственное вычисление интеграла (17) позволяет выделить в спектре два характерных участка. При $\omega \ll \Omega_* = (\pi \tau_0 \Gamma m_0 / \langle m \rangle)^{-1}$ спектральная плотность $G(\omega) \sim \omega^{-2}$ и не зависит от Γ ; при $\omega \gg \Omega_*$ величина $G(\omega) \sim \Gamma^2 \exp(-2\pi \omega \tau_0 \Gamma m_0 / \langle m \rangle)$.

Для случайной последовательности ударных волн (10) поведение спектра имеет существенные отличия. При низких частотах $\omega \ll \Omega_* = (\pi \tau_0 \Gamma m_0 / \langle m \rangle)^{-1}$ спектр $G(\omega) \approx 4\pi (1 - x/x_p)^{-3} \omega^{-2}$ и спадает как ω^{-2} независимо от значения параметра Γ , аналогично спектральной плотности регулярной волны. Эта асимптотика является универсальной и характеризует присутствие крутых участков фронта волны в реализации процесса.

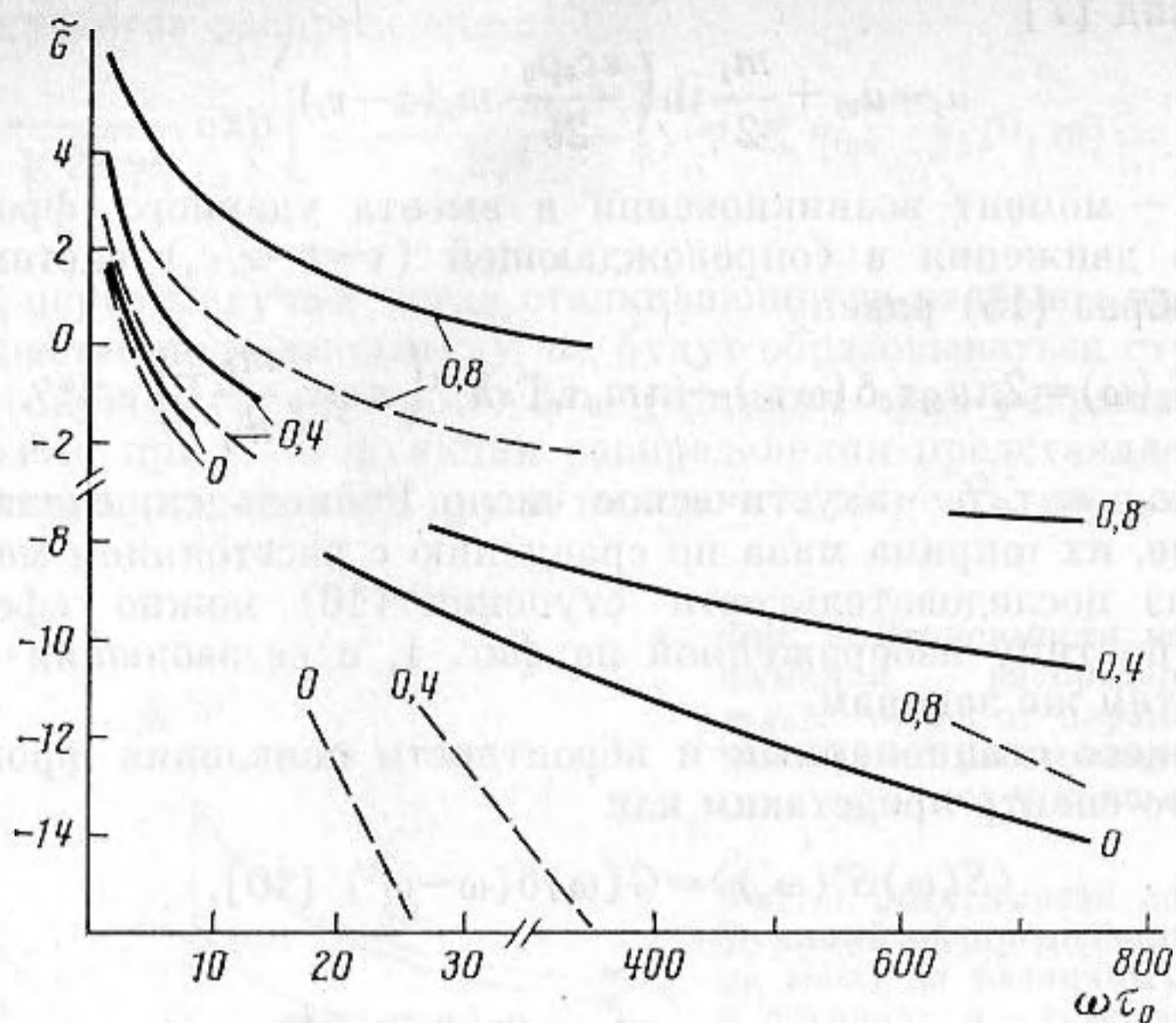
При высоких частотах $\omega \gg \Omega_*$

$$G(\omega) \approx 4\pi^3 m_0^2 \tau_0 (x_p/x)^{3/2} \Gamma^2 (2\pi \omega \Gamma \tau_0)^{-1/2} \exp[-2\sqrt{2\pi \omega \Gamma \tau_0} (1 - \sqrt{x/x_p})],$$

спектральная плотность убывает как $\sim \exp(-\gamma \sqrt{\omega}) / \sqrt{\omega}$. Более медленное уменьшение G при $\omega \rightarrow \infty$ для случайных волн объясняется, по-видимому, влиянием разрывов с большой амплитудой m , спектр которых имеет асимптотику ω^{-2} вплоть до очень высоких частот.

На фиг. 4 изображены частотные зависимости спектра интенсивности в логарифмическом масштабе $\bar{G} = \ln [G(\omega) / m_0^2 \tau_0]$ случайной волны с исходным экспоненциальным распределением (10) (сплошные линии) на различных расстояниях x/x_p (цифры у кривых) для значения $\Gamma = 0,01$. Низкочастотные (НЧ) и высокочастотные (ВЧ) асимптотики определялись соответственно в диапазонах $\omega < 0,25\Omega_* = (\pi \Gamma \tau_0 m_0 / \langle m \rangle)^{-1} = (\pi \Gamma \tau_0 (1 - x/x_p))^{-1}$ и $\omega > 4\Omega_*$ и построены в различных масштабах. Штриховые линии — зависимости спектра интенсивности регулярной по m волны: $g_0(x, m) = \delta(m - \langle m \rangle)$, где среднее $\langle m \rangle$ выбрано равным среднему значению амплитуды перепада в случайной последовательности: $\langle m \rangle = m_0 (1 - x/x_p)^{-1}$ (7).

На фиг. 4 с увеличением расстояния x/x_p кривые сдвинуты вправо, так как в соответствии с определением Ω_* граница, разделяющая НЧ- и ВЧ-ветви, смещается в сторону более высоких частот пропорционально $(1 - x/x_p)^{-1}$. Из графика видно, что с ростом x/x_p происходит увеличение значения спектральной плотности $G(\omega)$ и более медленный ее спад с



Фиг. 4. Частотные зависимости спектра интенсивности случайной последовательности ударных волн с конечной шириной фронта (сплошные линии) и регулярной по m последовательности (штриховые линии) на различных расстояниях (цифры у кривых). График построен в логарифмическом масштабе: $\tilde{G} = \ln [G(\omega)/m_0^2 \tau_0]$

ростом частоты. Наиболее резкое отличие спектра регулярной и случайной по m последовательности ударных волн наблюдается в ВЧ-области (см. фиг. 4): спектр случайной волны убывает медленнее.

В данной работе исследовалось лишь одно частное решение полученного кинетического уравнения (5). Существуют возможности построения других решений (в частности, автомодельных [9]) и обобщения уравнения (5) на ансамбли разрывных возмущений иной, не «ступенчатообразной» формы. Заметим также, что полученные результаты могут найти применение в ряде других задач физики нелинейных волн. Так, например, в последнее время обнаружена аналогия между поведением ударных волн и дрейфом частиц в поле резонансного светового излучения. На основе уравнения Бюргерса разработана нелинейная теория дрейфа частиц [11]. Полученные выше результаты могут быть использованы для обобщения регулярной задачи на случай хаотически расположенных сгустков поглощающего газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений. М.: Мир, 1985.
2. Гурбатов С. Н., Саичев А. И., Якушкин И. Г. Нелинейные волны и одномерная турбулентность в средах без дисперсии // УФН. 1983. Т. 141. Вып. 3. С. 221–225.
3. Макаров С. Н., Филиппов Б. В. Акустика течений, содержащих большое число коротких волн конечной амплитуды // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 4.
4. Ландау Л. Д., Румер Ю. Б. О поглощении звука в твердых телах // Ландау Л. Д. Собрание трудов. Т. 1/Под ред. Лифшица Е. М. М.: Наука, 1969. С. 227–233.
5. Брезовский Л. М., Гончаров В. В., Наугольных К. А., Рыбак С. А. Волны в океане // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19. № 5, 6. С. 842–863.
6. Захаров В. Е., Сагдеев Р. З. О спектре акустической турбулентности // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. № 2. С. 297–300.
7. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. О звуковой турбулентности // Докл. АН СССР. 1973. Т. 208. № 4. С. 794–796.
8. Руденко О. В., Солюян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
9. Уравнение Больцмана/Пер. с англ. под ред. Бобылева А. В., Зубарева Д. Н. М.: Мир, 1986.
10. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966.
11. Гельмуханов В. Х., Пархоменко А. И. Нелинейная теория дрейфа частиц в поле резонансного излучения // ЖЭТФ. 1987. Т. 92. № 3. С. 813–830.