АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 5

УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗВУКА В РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Есипов И. Б., Степанов Ю. С.

Решена задача о комбинационном рассеянии плоской низкочастотной волны и высокочастотного звукового поля, созданного источниками произвольной конфигурации. Показано, что комбинационное рассеяние определяется двумя механизмами: рассеянием звука комбинационной частоты, созданного взаимодействием первичных волн, и взаимодействием рассеянного звука с первичным полем.

Комбинационное рассеяние звука на звуке при взаимодействии волн двух различных частот интенсивно исследуется начиная с «пионерских» работ [1, 2]. Известно, что решение, описывающее волну комбинационной частоты, содержит вековые члены при коллинеарном распространении плоских первичных волн в однородной среде без дисперсии. В рассеивающих средах взаимодействие волн происходит более сложным образом.

Настоящая работа является теоретическим исследованием взаимодействия звуковых волн в следующих условиях: звуковое поле частотой ω создается источниками с пространственной плотностью $Q(\mathbf{x})$; в среде распространяется плоская волна частотой Ω, волновым вектором $\boldsymbol{K}$ и амплитудой звукового давления P_Ω, причем выполняется условие $\omega\gg\Omega$; среда содержит рассеивающие частицы, размеры которых малы по сравнению с длиной волны высокочастотного звука, частицы являются монопольными рассеивателями. Рассматривается механизм комбинационного рассеяния звука, вызванный взаимодействием звуковых волн в объеме среды. Исследуются характеристики сигнала комбинационной частоты, снимаемого с выхода акустического преобразователя с пространственной чувствительностью $R(\mathbf{x})$.

Решение поставленной задачи описывается уравнением, содержащим две поправки к волновому оператору: квадратичную форму q, учитывающую нелинейность уравнений гидродинамики и уравнения состояния среды, и оператор $\xi(\mathbf{x}, t)$, учитывающий рассеяние звука на мелких неоднородностях:

$$\Box p(\mathbf{x}, t)+\xi(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t)+q(p(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t))=Q(\mathbf{x})e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Оператор q имеет простой вид [1]: $q(p(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t))=(\varepsilon/c^4\rho)\partial^2/\partial t^2\times \times(p(\mathbf{x}, t))^2$, где ε — нелинейный параметр, c — скорость звука, ρ — плотность среды. Фурье-преобразование оператора рассеяния $\xi(x, t)$ определяется выражением [3]

$$\xi(\mathbf{x}, \omega)=\sum_i A_i(\omega)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i). \quad (2)$$

В выражении (2) $A_i(\omega)$ — коэффициент рассеяния i-й частицы, $\mathbf{x}_i$ — ее радиус-вектор. При условии, что частицы распределены в объеме равномерно и независимо, $\xi(\mathbf{x}, \omega)$ является пуассоновским случайным полем, для которого справедливы выражения

$$\langle\varepsilon(\mathbf{x}, \omega)\rangle=\nu\langle A(\omega)\rangle, \quad (3)$$

$$\langle(\xi(\mathbf{x}_1, \omega)-\langle\xi(\mathbf{x}_1, \omega)\rangle)(\xi^*(\mathbf{x}_2, \omega)-\langle\xi^*(\mathbf{x}_2, \omega)\rangle)\rangle= =\nu\langle|A(\omega)|^2\rangle\delta(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2), \quad (4)$$

где ν — средняя концентрация рассеивателей. В дальнейшем будем считать, что выполняется условие $\langle\xi(\mathbf{x},\omega)\rangle=0$, предполагающее отсутствие дисперсии. Выражение (4) при этом принимает вид

$$\langle\xi(\mathbf{x}_1,\omega)\xi^*(\mathbf{x}_2,\omega)\rangle=\nu\langle|A(\omega)|^2\rangle\delta(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2). \tag{5}$$

Учитывая, что оператор рассеяния ξ и квадратичная форма q являются малыми поправками к волновому оператору, уравнение (1) естественно решать методом последовательных приближений, используя в качестве нулевого приближения $p_0(\mathbf{x},t)$ — решение уравнения $\Box p_\omega(\mathbf{x},t)=$ $=Q(\mathbf{x})\exp(-i\omega t)$ и плоскую низкочастотную волну $p_\Omega(\mathbf{x},t)=$ $=P_\Omega\exp(i\mathbf{K}\mathbf{x}-i\Omega t)$. Система уравнений для первой и второй поправок к первичному полю приобретает вид

$$\Box p_1(\mathbf{x},t)=-\xi(\mathbf{x},t)p_0(\mathbf{x},t)-q(p_0(\mathbf{x},t),p_0(\mathbf{x},t))$$
$$\Box(p_1(\mathbf{x},t)+p_2(\mathbf{x},t))=-\xi(\mathbf{x},t)(p_0(\mathbf{x},t)+p_1(\mathbf{x},t))-$$
$$-q(p_0(\mathbf{x},t)+p_1(\mathbf{x},t),p_0(\mathbf{x},t)+p_1(\mathbf{x},t)).$$

Уравнение для первой поправки p_1 содержит в правой части виртуальные источники однократно рассеянного звукового поля $-\xi(\mathbf{x},t)p_0(\mathbf{x},t)$ и виртуальные источники нелинейной поправки $-q(p_0(\mathbf{x},t),\ p_0(\mathbf{x},t))$. Обозначим эти известные ранее решения символами p_ξ и p_q соответственно. Уравнение для второй поправки приобретает вид $\Box p_2(\mathbf{x},t)=-\xi p_\xi-$ $-\xi p_q-q(p_0,p_q)-q(p_0,p_\xi)-q(p_\xi+p_q,p_\xi+p_q)$.

В силу линейности полученного уравнения можно рассматривать независимо каждый член в его правой части. Ограничим рассмотрение членами комбинационных частот $\omega_\pm=\omega\pm\Omega$. Член $-\xi p_\xi$ описывает двукратно рассеянное поле частотой ω и Ω, поэтому он исключается из дальнейшего рассмотрения. Член $-\xi p_q$ описывает рассеяние нелинейной поправки и содержит в себе члены на комбинационных частотах. Виртуальные источники $-q(p_0,\ p_q)$ исключаются из рассмотрения, так как содержат члены на частотах, состоящих из комбинаций двух групп частот ω, Ω и 2ω, 2Ω, $\omega_\pm$, а эти вторичные комбинации не содержат частоты $\omega_\pm$. Следующий член $-q(p_0,\ p_\xi)$ описывает нелинейное взаимодействие однократно рассеянного поля с первичным полем и содержит члены комбинационных частот. Оставшийся член $-q(p_\xi+p_q,\ p_\xi+p_q)$ — величина следующего порядка малости по сравнению с членом $-q(p_0,\ p_\xi)$.

Таким образом, необходимо рассмотреть два механизма формирования рассеянной компоненты звукового поля комбинационной частоты, зависящей от конфигурации случайного поля рассеивателей: рассеяние регулярной части нелинейной поправки к первичному полю, которому соответствует пространственная плотность виртуальных источников $-\xi p_q$; и нелинейное взаимодействие регулярной и рассеянной компонент звукового поля, которому соответствуют виртуальные источники $-q(p_0,\ p_\xi)$.

Рассмотрим первый механизм комбинационного рассеяния, который описывается уравнением

$$\Box p^{(1)}(\mathbf{x},t)=-\xi(\mathbf{x},t)p_q(\mathbf{x},t). \tag{6}$$

Нелинейная поправка к первичному полю p_q состоит из независимых звуковых полей на частотах 2ω, 2Ω и $\omega_\pm$, которым соответствуют виртуальные источники $q(p_\omega,\ p_\omega)$, $q(p_\Omega,\ p_\Omega)$ и $q_\pm(p_\Omega,\ p_\omega)$. Обозначим звуковое поле с гармонической зависимостью $\exp(-i\omega_\pm t)$, которое является результатом взаимодействия плоской низкочастотной волны с регулярной частью звукового поля, созданного источниками Q, символом $P^{(Q)}_{\mathbf{K},\omega\pm}$. Оно является решением уравнения Гельмгольца:

$$(\Delta+k_\pm^2)P^{(Q)}_{\mathbf{K},\omega_\pm}(\mathbf{x})=q_\pm(p_\Omega(\mathbf{x}),p_\omega(\mathbf{x}))$$

где $k_\pm=\omega_\pm/c$.

Оставив в правой части уравнения (6) виртуальные источники, описывающие рассеяние нелинейной поправки комбинационной частоты $-\xi(\mathbf{x},t)P^{(Q)}_{\mathbf{K},\omega+}(\mathbf{x})\exp(-i\omega_\pm t)$, перейдем к уравнению Гельмгольца для нерегулярной части поля комбинационного рассеяния:

$$(\Delta+k_{\pm}^2)\,p_{\pm}^{(1)}(\mathbf{x})=-\xi(\mathbf{x},\omega_{\pm})\,P_{\mathbf{K},\omega_{\pm}}^{(Q)}(\mathbf{x}). \qquad (7)$$

Прием рассеянного звука осуществляется акустическим преобразователем с пространственной чувствительностью $R(\mathbf{x})$, при этом амплитуда сигнала комбинационной частоты $u_{\pm}$ равна интегралу от произведения функции пространственной чувствительности R на амплитуду рассеянного поля. Учитывая, что решение уравнения (7) выражается через свертку правой части с функцией Грина $G_{\pm}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)=-\exp(ik_{\pm}|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|)/$ $/(4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|)$, выражение для сигнала $u_{\pm}^{(1)}$ получаем в виде

$$u_{\pm}^{(1)}=-\int d^3x\,R(\mathbf{x})\int d^3x_1\,G_{\pm}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\,P_{\mathbf{K},\omega_{\pm}}^{(Q)}(\mathbf{x}_1)\,\xi(\mathbf{x}_1,\omega_{\pm}).$$

Сменив порядок интегрирования и проинтегрировав по переменной x, получим

$$u_{\pm}^{(1)}=-\int d^3x\,P_{\omega_{\pm}}^{(R)}(\mathbf{x})\,P_{\mathbf{K},\omega_{\pm}}^{(Q)}(\mathbf{x})\,\xi(\mathbf{x},\omega_{\pm}), \qquad (8)$$

где символом $P_{\mathbf{K},\omega\pm}^{(R)}$ обозначено звуковое поле частотой $\omega_{\pm}$, которое создает акустический преобразователь с пространственной плотностью источников $R(\mathbf{x})$. Выражение для среднего квадрата модуля принимаемого сигнала, учитывая (5), имеет вид

$$\langle|u_{\pm}|^2\rangle=\nu\langle|A(\omega_{\pm})|^2\rangle\int d^3x\,|P_{\omega_{\pm}}^{(R)}|^2\,|P_{\mathbf{K},\omega_{\pm}}^{(Q)}|^2$$

Второй механизм комбинационного рассеяния звука описывается уравнением: $\Box p^{(2)}(\mathbf{x},t)=-q(p_0(\mathbf{x},t),\,p_{\xi}(\mathbf{x},t))$.

Пренебрегая рассеянием низкочастотного звука, выделим из правой части уравнения виртуальные источники комбинационной частоты $q_{\pm}=$ $=q(p_{\Omega}(\mathbf{x},t),\,p_{\xi}(\mathbf{x},t))$.

Для рассеянного звука $p_{\pm}^{(2)}(x_1)$ с гармонической зависимостью $\exp(-i\omega_{\pm}t)$ справедливо уравнение Гельмгольца, решение которого выражается через свертку функции Грина $G_{\pm}$ с правой частью уравнения

$$p_{\pm}^{(2)}(\mathbf{x}_1)=-\int d^3x\,G_{\pm}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x})\,q_{\pm}(p_{\Omega}(\mathbf{x}),\,p_{\xi}(\mathbf{x})). \qquad (9)$$

Учитывая, что квадратичная форма $q_{\pm}$ линейна по каждому из входящих в нее полей p_{Ω} и p_{ξ}, а также то, что рассеянное поле $p_{\xi}(\mathbf{x})$ выражается через свертку функций виртуальных источников $-\xi(\mathbf{x}_2,\omega)\times$ $\times P_{\omega}^{(\Omega)}(\mathbf{x}_2)$ с функцией Грина $G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)=-\exp(ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|)/(4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|)$, преобразуем функцию виртуальных источников $q_{\pm}$ следующим образом: $q_{\pm}(p_{\Omega}(\mathbf{x}),\ \int d^3x_2\xi(\mathbf{x}_2,\omega)P_{\omega}^{(Q)}(\mathbf{x}_2)G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2))=\int d^3x_2\xi(\mathbf{x}_2,\omega)P_{\omega}^{(Q)}(\mathbf{x}_2)q_{\pm}\times$ $\times(p_{\Omega}(\mathbf{x}),\,G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2))$.

Подставив полученное выражение в (9) и проинтегрировав по переменной x, получим

$$p_{\pm}^{(2)}(\mathbf{x}_1)=-\int d^3x_2\,G_{\pm}(\mathbf{K};\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\,\xi(\mathbf{x}_2,\omega)\,P_{\omega}^{(Q)}(\mathbf{x}_2). \qquad (10)$$

где

$$G_{\pm}(\mathbf{K};\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\int d^3x\,G_{\pm}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x})\,q_{\pm}(p_{\Omega}(\mathbf{x}),\,G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)) \qquad (11)$$

— функция Грина для вычисления поля комбинационной частоты по источникам высокочастотного поля, зависящая от волнового вектора **K** низкочастотной волны. Физический смысл полученного выражения — звуковое поле комбинационной частоты в точке $\mathbf{x}_1$, которое является результатом взаимодействия поля точечного источника частотой ω, расположенного в точке $\mathbf{x}_2$ с полем плоской низкочастотной волны. Проделав замену переменной интегрирования $\mathbf{x}'=-\mathbf{x}+\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2$ в выражении (11), получим преобразование функции Грина $G_{\pm}(\mathbf{K};\,\mathbf{x}_1,\,\mathbf{x}_2)$ при перестановке переменных $x_1 \rightleftarrows x_2$:

$$G_\pm(\mathbf{K};\ \mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2)=\exp(\pm i\mathbf{K}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2))\,G_\pm(-\mathbf{K};\ \mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_1). \tag{12}$$

Учитывая (10) и (12), найдем выражение для сигнала комбинационной частоты $u_\pm^{(2)}$ на выходе приемника R:

$$u_\pm^{(2)}=-\int d^3x P_{-\mathbf{K},\,\omega_\pm}^{(R(\mathbf{x})\exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{x}))}(\mathbf{x})\,P_\omega^{(Q)}(\mathbf{x})\,\xi(\mathbf{x},\omega)\,e^{\pm i\mathbf{K}\mathbf{x}} \tag{13}$$

где символом $P_{-\mathbf{K},\,\omega_\pm}^{(R(\mathbf{x})\exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{x}))}$ обозначено поле комбинационной частоты, созданное взаимодействием поля источников пространственной плотностью $R(\mathbf{x})\exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{x}-i\omega t)$ плоской волной $p_\Omega{}'=P_\Omega\exp(-i\mathbf{K}\mathbf{x}-i\Omega t)$.

Выражение для среднего квадрата модуля сигнала принимает вид

$$\langle|u_\pm^{(2)}|^2\rangle=\nu\langle|A(\omega)|^2\rangle\int d^3x\,|P_{-\mathbf{K},\,\omega_\pm}^{(R(\mathbf{x})\exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{x}))}|^2\,|P_\omega^{(Q)}|^2.$$

Рассмотрим более подробно случай узконаправленных акустических преобразователей Q и R. Пусть их характеристики направленности в существенной части перекрываются, например при приеме звука, рассеянного назад. Сигнал $u_\pm$, вообще говоря, равен сумме сигналов, обусловленных первым и вторым механизмами взаимодействия, которые, однако, не могут действовать одновременно. В самом деле, волновые векторы $\mathbf{k}_Q$ и $\mathbf{k}_R$ направлены в одну сторону, а эффективное взаимодействие по первому и второму механизмам происходит при противоположных $\mathbf{K}$ и $-\mathbf{K}$ направлениях волнового вектора низкочастотной волны. Поэтому для среднего квадрата модуля сигнала комбинационной частоты будет справедливо равенство $\langle|u_\pm|^2\rangle=\langle|u_\pm|^2\rangle^{(1)}+\langle|u_\pm|^2\rangle^{(2)}$.

Для анализа такого положения сделаем следующие упрощения: учитывая, что $\omega_\pm\simeq\omega$, считаем коэффициент рассеяния среды $\nu\langle|A(\omega_\pm)|^2\rangle$ равным коэффициенту рассеяния на частоте ω; размеры акустических преобразователей Q и R малы по сравнению с длиной волны низкочастотного звука $\Lambda=2\pi/K$. При этом справедливы следующие равенства:

$$|P_{\omega_\pm}|=|P_\omega| \quad \text{и} \quad |P_{-\mathbf{K},\,\omega_\pm}^{(R(\mathbf{x})\exp(\pm i\mathbf{K}(x))}|=P_{-\mathbf{K},\,\omega_\pm}^{(R)}|.$$

Асимптотическое выражение для функции Грина $G_\pm(\mathbf{K};\ \mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2)$, полученное [4] при условии, что $\omega/\Omega\to\infty$, имеет вид

$$G_\pm(\mathbf{K};\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=-i\frac{\varepsilon\omega_\pm P_\Omega}{8\pi\rho c^3}e^{ik_\pm|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}e^{\pm iM}\frac{\sin M}{M},$$

где $M=K|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|\sin(\theta/2)$, θ — угол между векторами $\mathbf{K}$ и $\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2$. Учитывая, что формально выполняется равенство

$$G_\pm(\mathbf{K};\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=i\frac{\varepsilon\omega\pm P_\Omega}{2\rho c^3}|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|e^{\pm iM}\frac{\sin M}{M}G_\pm(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2),$$

при сделанных предположениях справедливы выражения

$$P_{\mathbf{K},\omega_\pm}^{(Q)}=i\frac{\varepsilon\omega_\pm P_\Omega}{2\rho c^3}|\mathbf{x}-\mathbf{x}_Q|e^{\pm iM_Q}\frac{\sin M_Q}{M_Q}P_{\omega_\pm}^{(Q)}, \tag{14}$$

$$P_{-\mathbf{K},\omega_\pm}^{(R)}=i\frac{\varepsilon\omega_\pm P_\Omega}{2\rho c^3}|\mathbf{x}-\mathbf{x}_R|e^{\pm iM_R}\frac{\sin M_R}{M_R}P_{\omega_\pm}^{(R)}, \tag{15}$$

где $\mathbf{x}_Q$, $\mathbf{x}_R$ — координаты излучателя и приемника соответственно.

$$M_Q=K|\mathbf{x}-\mathbf{x}_Q|\sin(\theta_Q/2),$$
$$M_R=K|\mathbf{x}-\mathbf{x}_R|\sin(\theta_R/2),$$

где θ_Q и θ_R — углы между векторами $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_Q)$, $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_R)$ и $\mathbf{K}$, $-\mathbf{K}$ соответственно. При условии, что акустические преобразователи Q и R расположены в начале координат, выражение для среднего квадрата модуля сигнала комбинационной частоты принимает вид

$$\langle|u_\pm|^2\rangle=\nu\langle|A(\omega)|^2\rangle\left(\frac{\varepsilon\omega_\pm P_\Omega}{2\rho c^3}\right)^2\int d^3x\,|\mathbf{x}|^2\times$$
$$\times\left(\frac{\sin^2 M_R}{M_R{}^2}+\frac{\sin^2 M_Q}{M_Q{}^2}\right)|P_\omega^{(R)}|^2\,|P_\omega^{(Q)}|^2.$$

Полученное выражение симметрично относительно акустических преобразователей Q и R, т. е. при регистрации средней мощности сигнала два механизма комбинационного рассеяния звука эквивалентны. При приеме звука комбинационной частоты, рассеянного назад, диаграмма направленности имеет два узких максимума, разнесенных на 180°. Первый максимум диаграммы соответствует рассеянному назад звуку комбинационной частоты, созданному взаимодействием первичных волн, второй максимум соответствует звуку комбинационной частоты, созданному взаимодействием рассеянного назад первичного поля с плоской волной, которое происходит при противоположном направлении волнового вектора плоской волны.

В рассматриваемых условиях взаимодействие звуковых волн проявляется в виде фазовой модуляции высокочастотной волны низкой частотой. Модуляция выделяется сравнением фазы сигнала $u_\pm$ с фазой рассеянного сигнала u частотой ω. Величину $\langle u_\pm u^*\rangle$ — средний по ансамблю рассеивающих сред сигнал комбинационной частоты, гетеродинированный рассеянным сигналом частотой ω, можно рассматривать как среднюю амплитуду модуляции рассеянного сигнала, которая, будучи отнормирована к величине среднего квадрата модуля рассеянного сигнала частотой ω, имеет физический смысл средней глубины фазовой модуляции.

Вычислим среднюю амплитуду модуляции сигнала $\langle u_\pm u^*\rangle^{(1)}$ — соответствующую первому механизму комбинационного рассеяния. Однократно рассеянный звук частотой ω создает на выходе акустического преобразователя R сигнал

$$u=\int d^2x\,P_\omega^{(R)}(\mathbf{x})\,P_\omega^{(Q)}(\mathbf{x})\,\xi(\mathbf{x},\omega). \tag{16}$$

Учитывая (8) и (16), выражение для средней амплитуды модуляции приводим к виду

$$\langle u_\pm u^*\rangle^{(1)}=\nu\langle A(\omega_\pm)A(\omega)^*\rangle\int d^3x\,P_{\mathbf{K},\omega_\pm}^{(Q)}P_\omega^{(Q)*}P_{\omega_\pm}^{(R)}P_\omega^{(R)*}.$$

При условии, что размеры акустических преобразователей малы по сравнению с длиной волны Λ, справедливы следующие приближенные равенства:

$$P_{\omega_\pm}^{(Q)}=\exp(\pm iK|\mathbf{x}-\mathbf{x}_Q|)\,P_\omega^{(Q)}, \tag{17}$$

$$P_{\omega_\pm}^{(R)}=\exp(\pm iK|\mathbf{x}-\mathbf{x}_R|)\,P_\omega^{(R)}, \tag{18}$$

учитывая которые, выведем следующее выражение для средней амплитуды модуляции сигнала:

$$\langle u_\pm u^*\rangle^{(1)}=\nu\langle|A(\omega)|^2\rangle\int d^3x\,P_{\mathbf{K},\omega_\pm}^{(Q)}P_{\omega_\pm}^{(Q)*}\,|P_\omega^{(R)}|^2\exp(\pm iK|\mathbf{x}-\mathbf{x}_R|\pm iK|\mathbf{x}-\mathbf{x}_Q|). \tag{19}$$

Рассмотрим второй механизм комбинационного рассеяния. Из уравнения (13) для сигнала частотой $\omega_\pm$ и уравнения (16) для сигнала частотой ω следует выражение для средней амплитуды модуляции: выполнив операцию усреднения, получим

$$\langle u_\pm u^*\rangle^{(2)}=\nu\langle|A(\omega)|^2\rangle\int d^3x\,P_{-\mathbf{K},\,\omega_\pm}^{(R(\mathbf{x})\exp(\pm i\mathbf{Kx}))}\,P_\omega^{(R)*}\,|P_\omega^{(Q)}|^2 e^{\pm i\mathbf{Kx}} \tag{20}$$

с учетом (18), уравнение (20) принимает вид

$$\langle u_\pm u^* \rangle^{(2)} = \nu \langle |A(\omega)|^2 \rangle \int d^3x\, P^{(R)}_{-\mathbf{K},\omega_\pm} P^{(R)*}_{\omega_\pm} \times$$

$$\times |P^{(Q)}_\omega|^2 \exp(\pm i\mathbf{K}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_R) \mp iK|\mathbf{x}-\mathbf{x}_R|). \qquad (21)$$

Для двух механизмов взаимодействия волн выражение для средней амплитуды модуляции сигнала имеет вид $\langle u_\pm u^* \rangle = \langle u_\pm u^* \rangle^{(1)} + \langle u_\pm u^* \rangle^{(2)}$. Анализ выражения (19) показывает, что первый механизм комбинационного рассеяния не оказывает влияния на амплитуду модуляции сигнала, так как в подынтегральное выражение входит осциллирующий множитель $\exp(\pm iK|\mathbf{x}-\mathbf{x}_R| \pm iK|\mathbf{x}-\mathbf{x}_Q|)$. Второй механизм дает основной вклад при волновых векторах $\mathbf{k}_R$ и $\mathbf{K}$, направленных навстречу, что соответствует встречному распространению первичных волн, так как при этом фазовый множитель $\exp(\pm i\mathbf{K}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_R) \mp K|\mathbf{x}-\mathbf{x}_R|)$ в подынтегральном выражении постоянен вдоль оси рабочей области приемного акустического преобразователя. Учитывая (15) и (21), выражение для средней амплитуды модуляции сигнала приведем к виду

$$\langle u_\pm u^* \rangle = \nu \langle |A(\omega)|^2 \rangle \left(\frac{\varepsilon \omega_\pm P_\Omega}{2\rho c^3} \right) \int d^3x\, |\mathbf{x}|\, |P^{(R)}_\omega|^2 \times$$

$$\times |P^{(Q)}_\omega|^2 e^{\pm i\mathbf{K}\mathbf{x} \mp iK|\mathbf{x}|} \frac{\sin M_R}{M_R}. \qquad (22)$$

Выражение (22) имеет максимум при единственном направлении волнового вектора низкочастотной волны.

В заключение перечислим основные результаты теоретического исследования взаимодействия акустических волн в рассеивающей среде. В работе получены характеристики нерегулярной части сигнала комбинационной частоты, снимаемого с акустического преобразователя с пространственной чувствительностью $R(x)$, средний квадрат модуля сигнала комбинационной частоты — $\langle |u_\pm|^2 \rangle$ и средняя модуляция рассеянного сигнала — $\langle u_\pm u^* \rangle$. Показано, что нерегулярная часть сигнала комбинационной частоты формируется двумя механизмами: рассеяние регулярной части сигнала комбинационной частоты, созданной взаимодействием первичных звуковых полей и взаимодействием рассеянного звука с первичным звуковым полем. При регистрации средней мощности сигнала комбинационной частоты первый и второй механизмы эквивалентны, при регистрации средней модуляции рассеянного звука влияние оказывает только второй механизм комбинационного рассеяния. В работе делалось дополнительное предположение об отсутствии дисперсии в рассеивающей среде, которое не ограничивает общности полученных результатов. Аналогичные результаты можно получить и при наличии в среде дисперсии $\langle \xi(x, \omega) \rangle \neq 0$; для этого в качестве нулевого приближения необходимо использовать регулярную часть решения задачи рассеяния, а расчет [5] регулярной части звукового поля комбинационной частоты и функции Грина $G_\pm(\mathbf{K};\ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ проводить с учетом дисперсионного уравнения $k^2(\omega) = \omega^2/c^2 + \langle \xi(\mathbf{x}, \omega) \rangle$. В работе рассматривается взаимодействие волн в объеме среды, вызванное нелинейностью уравнений гидродинамики и уравнения состояния среды. Другой тип взаимодействия, связанный с движением рассеивающих частиц в поле низкочастотной волны, рассмотрен авторами в работе [6]. Глубина фазовой модуляции высокочастотного звука, соответствующая взаимодействию волн в объеме среды, относится к глубине фазовой модуляции, вызванной движением рассеивающих частиц, как εKL, где L — размер области параметрического взаимодействия в направлении синхронизма. Для протяженных областей взаимодействия ($\varepsilon KL \gg 1$, в качестве L можно использовать длину затухания высокочастотного звука) взаимодействие волн в объеме среды имеет определяющее значение. Величина рассмотренного эффекта зависит от произведения двух малых параметров: коэффициента рассеяния и амплитуды модуляции звука звуком. Однако глубина фазовой модуляции рассеянного излучения может быть заметной величиной, так как зависит от произведения малого параметра — числа Маха низкочастотного звука на большую величину — размер области взаимодействия, выраженный в длинах волн высокочастотного звука.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Westervelt P. J.* Parametric acoustic array // J. Acoust. Soc. Amer. 1963. V. 35. № 4. P. 535–537.
2. *Зверев В. А., Калачев А. И.* Модуляция звука звуком при пересечении акустических волн // Акуст. журн. 1970. Т. 16. № 2. С. 245–251.
3. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. М.: Наука, 1978.
4. *Truchard J. J.* The detection of low frequency plane wave with parametric receiving array // Finite amplitude wave effects in fluids. Proceeding of the 1973 Symposium. Copenhagen, 1973. P. 184–189.
5. *Westervelt P. J.* Nonlinear interaction of a spherical wave with a plane wave // Abstracts of papers submitted to seventh international symposium on nonlinear acoustics. Blacksburg, Virginia, U. S. A., 1976. P. 31–34.
6. *Есипов И. Б., Степанов Ю. С.* Нелинейное взаимодействие звука в рассеивающей среде // XI Междунар. симпоз. по нелинейной акустике. Ч. 1. Новосибирск: СО АН СССР, 1987. С. 428–432.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
12.X.1987