

УДК 535.41

**АНАЛИЗ ГОЛОГРАФИЧЕСКИХ ИНТЕРФЕРОГРАММ
УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПЬЕЗОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ**

Василяускас Р. С., Палявичюс А. П., Рагульскис К. М.

На основе экспериментальных данных голографической интерферометрии и теории колебаний механических систем представлена методика расчета амплитуд нормальной и тангенциальных компонент вектора пространственных колебаний любой точки поверхности ультразвуковых преобразователей.

При исследовании колебаний ультразвуковых пьезопреобразователей возникает задача определения амплитудно-частотных характеристик излучающей поверхности, которая в большинстве случаев совершает пространственные колебания. Разработка методов расчета характеристик пространственных колебаний позволит решить актуальные задачи исследования, проектирования, контроля и диагностики ультразвуковых преобразователей.

В статье представлен метод расчета амплитуд нормальной и тангенциальных компонент вектора пространственных колебаний поверхности деформируемых пьезопреобразователей на основе экспериментальных данных голографической интерферометрии и теории колебаний механических систем. В отличие от известных работ [1–3], посвященных данному вопросу, предлагаемый метод при расчете колебаний по голографическим интерферограммам позволяет на несколько раз уменьшить количество исходных данных. Рассмотрим суть метода.

На поверхности колеблющегося пьезопреобразователя (см. фиг. 1), задана точка i , вектор пространственных колебаний которой представлен в виде

$$\bar{\mathbf{R}}_i(t) = U_i(t)\hat{\mathbf{i}} + V_i(t)\hat{\mathbf{j}} + W_i(t)\hat{\mathbf{k}}. \quad (1)$$

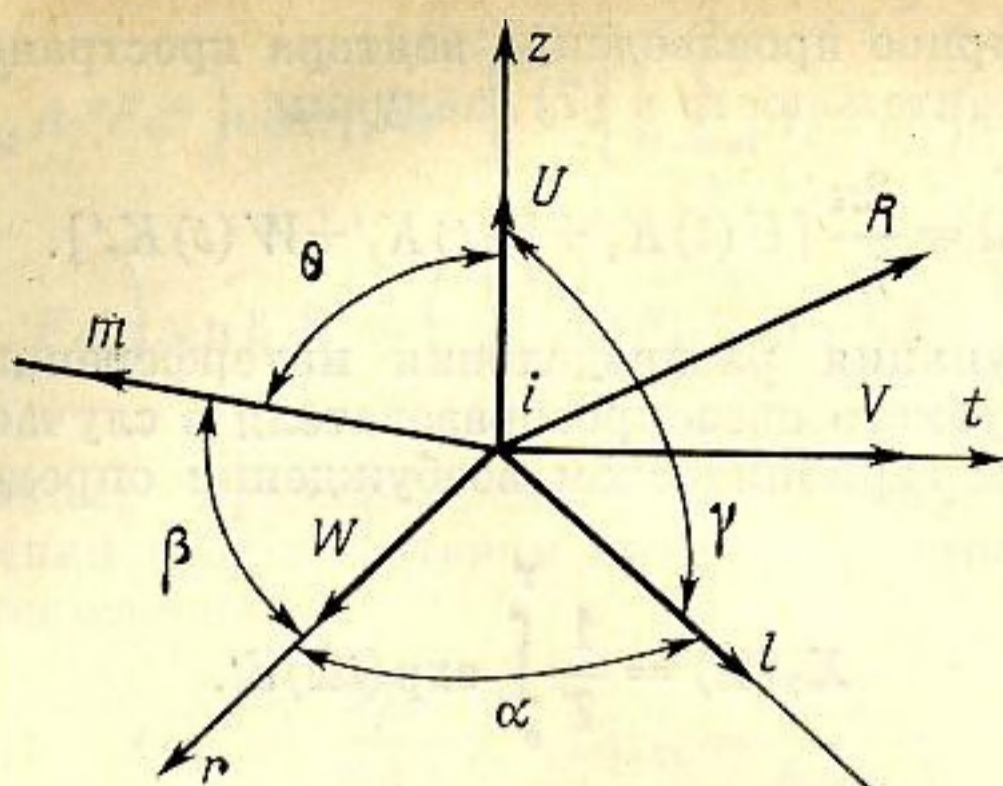
Тангенциальные U , V и нормальную W компоненты вектора $\bar{\mathbf{R}}_i(t)$ в i -й точке представим в виде

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0^i \cos(\omega t + \alpha_i), & V(t) &= V_0^i \cos(\omega t + \beta_i), \\ W(t) &= W_0^i \cos(\omega t + \gamma_i), \end{aligned} \quad (2)$$

где U_0^i , V_0^i , W_0^i — амплитуды вынужденных колебаний точки i соответственно по координатным осям z , t , r . Амплитуды вынужденных колебаний точек твердого тела приближенно определяются разложением по k собственным формам колебаний [4]. С учетом этого U_0^i , V_0^i , W_0^i выразим соответственно

$$\begin{aligned} U_0^i &= \sum_1^k A_j^u F_{ij}^u; & V_0^i &= \sum_1^k A_j^v F_{ij}^v; \\ W_0^i &= \sum_1^k A_j^w F_{ij}^w; & j &= 1, 2, \dots, k, \end{aligned} \quad (3)$$

где F_{ij} — значение j -й собственной формы колебаний для i -й точки; A_j — коэффициент влияния j -й собственной формы; k — число рассматриваемых собственных форм колебаний.



Фиг. 1. Схема интерпретации измерений колебаний точки i : r, t, z — оси ортогональной системы координат; R — вектор пространственных колебаний пьезопреобразователя i -й точки; U, V, W — компоненты вектора пространственных колебаний i -й точки соответственно по координатным осям z, t, r (в тексте $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$); L — единичный вектор освещения точки i (в тексте \hat{K}_i); m — единичный вектор наблюдения точки i (в тексте \hat{K}_0); α, β — соответственно углы единичных векторов освещения и наблюдения с координатной осью r (в тексте соответственно θ_1^i, θ_2^i); γ, θ — соответственно углы между координатной осью z и единичными векторами освещения и наблюдения (в тексте φ_1^i, φ_2^i)

Таким образом, для расчета компонент вектора пространственных колебаний необходимо определить значения $F_{ij}^u, F_{ij}^v, F_{ij}^w, A_j^u, A_j^v, A_j^w, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$.

Амплитуды первых k собственных форм можно рассчитать по аналитическим выражениям собственных форм колебаний, приведенных в работе [4–6], с учетом геометрии рассматриваемого пьезопреобразователя и граничными условиями его крепления.

Рассмотрим вопрос определения $A_j^u, A_j^v, A_j^w, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ на основе данных голографической интерферометрии. Для этого обратимся к фиг. 1. Обозначим единичный вектор наблюдения точки i через k_0 и единичный вектор, обратный вектору освещения k_i , тогда вектор чувствительности \bar{K} можно записать в виде [7]

$$\bar{K} = \hat{K}_i + \hat{K}_0 \quad (4)$$

или через компоненты в базисе z, t, r в виде

$$\bar{K}^i = K_r^i \hat{r} + K_t^i \hat{t} + K_z^i \hat{z}, \quad (5)$$

где K_r^i, K_t^i, K_z^i — проекции вектора чувствительности соответственно на оси r, t, z .

Проекции K_r^i, K_t^i, K_z^i вектора чувствительности \bar{K} могут быть выражены через тригонометрические функции углов $\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2$, которые образуют с координатными осями единичные векторы \bar{K}_i и \bar{K}_0 следующими соотношениями:

$$K_z^i = \cos \varphi_2^i + \cos \varphi_1^i, \quad K_t^i = \sin \theta_1^i \sin \varphi_1^i - \sin \theta_2^i \sin \varphi_2^i, \quad (6)$$

$$K_r^i = \cos \theta_1^i \sin \varphi_1^i + \cos \theta_2^i \sin \varphi_2^i.$$

Изменение фазы волны при прохождении света от источника до точки i на поверхности деформируемого пьезопреобразователя и обратно к голографической интерферограмме в результате колебаний поверхности будет [1]

$$\Omega = \frac{2\pi}{\lambda} \bar{R}_i(t) \bar{K}^i, \quad (7)$$

где λ — длина волны лазерного света, использованного при записи голографических интерферограмм.

Подставив скалярное произведение вектора пространственного колебания и вектора чувствительности в (7), получим

$$\Omega = \frac{2\pi}{\lambda} [U(t)K_z^i + V(t)K_t^i + W(t)K_r^i]. \quad (8)$$

Характерная функция распределения интерференционных полос на поверхности исследуемого пьезопреобразователя в случае метода усреднения во времени при гармоническом возбуждении определяется по выражению [7]

$$X_\Phi(\Omega) = \frac{1}{T} \int_0^T \exp(i\Omega t) dt. \quad (9)$$

Подставив (8) в (9) и с учетом (2), (3), получим

$$X_\Phi(\Omega) = \frac{1}{T} \int_0^T \exp[in(\Omega_1 \cos \omega t - \Omega_2 \sin \omega t)] dt, \quad (10)$$

где n — волновое число, определяемое $n = 2\pi/\lambda$:

$$\Omega_1 = U_0^i \cos \alpha_i K_z^i + V_0^i \cos \beta_i K_t^i + W_0^i \cos \gamma_i K_r^i, \quad (11)$$

$$\Omega_2 = U_0^i \sin \alpha_i K_z^i + V_0^i \sin \beta_i K_t^i + W_0^i \sin \gamma_i K_r^i.$$

С учетом этого характерную функцию распределения интерференционных полос на поверхности деформируемого пьезопреобразователя запишем в виде $X_\Phi(\Omega) = J_0[n(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^{1/2}]$. Сравнивая аргументы функции с учетом (11), получаем алгебраическое нелинейное уравнение для определения компонент $A_j^u, A_j^v, A_j^w, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$:

$$\begin{aligned} \frac{\Omega^2 \lambda^2}{4\pi} = & \left[\left(\sum_1^k A_j^w F_{ij}^w \right) \cos \gamma_i K_r^i + \left(\sum_1^k A_j^v F_{ij}^v \right) \cos \beta_i K_t^i + \right. \\ & \left. + \left(\sum_1^k A_j^u F_{ij}^u \right) \cos \alpha_i K_z^i \right]^2 + \left[\left(\sum_1^k A_j^w F_{ij}^w \right) \sin \gamma_i K_r^i + \right. \\ & \left. + \left(\sum_1^k A_j^v F_{ij}^v \right) \sin \beta_i K_t^i + \left(\sum_1^k A_j^u F_{ij}^u \right) \sin \alpha_i K_z^i \right]^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Известными уравнениями являются: Ω — вычисляемый в центрах темных интерференционных полос по голографическим интерферограммам деформируемых пьезопреобразователей из выражения (7)

$$\Omega_p = (p - 0,25)\pi + 0,125/\pi(p - 0,25), \quad (13)$$

где p — номер очередности интерференционной полосы на голографической интерферограмме, в центре которой расположена i -я точка, отсчитываемая от наиболее светлой узловой линии; K_r^i, K_t^i, K_z^i — вычисляются по формулам (6); $F_{ij}^u, F_{ij}^v, F_{ij}^w$ — определяются расчетным путем по аналитическим выражениям собственных форм колебаний пьезопреобразователей в зависимости от геометрической формы и конструктивных особенностей.

Для решения нелинейного уравнения (12) используем методику, приведенную в работе [2]. В рассматриваемом случае для определения неизвестных уравнений необходимо получение нескольких голографических интерферограмм при разных значениях углов освещения и наблюдения исследуемого пьезопреобразователя. Расхождения, полученные в результате ошибок эксперимента с учетом (12), получим из уравнения

$$f_i = \left[\left(\sum_1^k A_j^u F_{ij}^u \right) \cos \alpha_i K_z^i + \left(\sum_1^k A_j^v F_{ij}^v \right) \cos \beta_i K_t^i + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_1^k A_j^w F_{ij}^w \right) \cos \gamma_i K_r^i \Big]^2 - \left[\left(\sum_1^k A_j^u F_{ij}^u \right) \sin \alpha_i K_z^i + \right. \\
& \left. + \left(\sum_1^k A_j^v F_{ij}^v \right) \sin \beta_i K_i^i + \left(\sum_1^k A_j^w F_{ij}^w \right) \sin \gamma_i K_r^i \right]^2 - \left[\frac{\Omega_i}{n} \right]^2. \quad (14)
\end{aligned}$$

Данное уравнение продифференцируем относительно неизвестных компонент уравнения (12) и составим матрицу G , столбцы которой будем формировать соответственно

$$\begin{aligned}
G_j^{(i)} = \frac{\partial f_i}{\partial A_j^u}; \quad G_{j+k}^{(i)} = \frac{\partial f_i}{\partial A_j^v}; \quad G_{j+2k}^{(i)} = \frac{\partial f_i}{\partial A_j^w}; \quad j=1, 2, \dots, k; \\
G_{1+3k}^{(i)} = \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_i}; \quad G_{2+3k}^{(i)} = \frac{\partial f_i}{\partial \beta_i}; \quad G_{3+3k}^{(i)} = \frac{\partial f_i}{\partial \gamma_i}. \quad (15)
\end{aligned}$$

Если для i -й точки снято q число голографических интерферограмм при разных направлениях освещения и наблюдения, по данным которых формируется q число наборов данных, то матрица G будет размерности $q \times 3(2k+3)$.

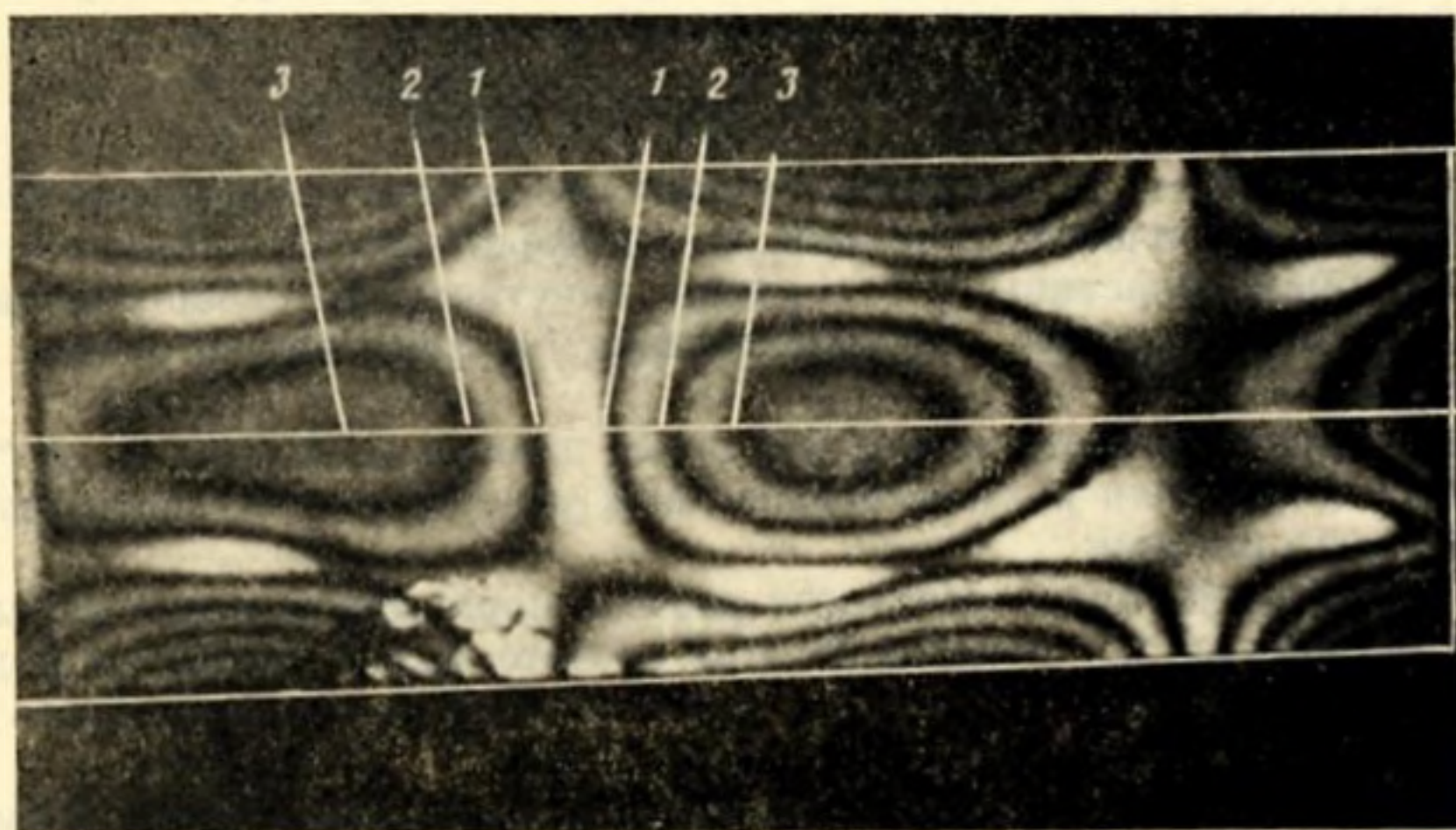
При произвольно заданном векторе неизвестных

$$B_n = [A_1^u, A_2^u, \dots, A_k^u, A_1^v, A_2^v, \dots, A_k^v, A_1^w, A_2^w, \dots, A_k^w, \alpha, \beta, \gamma] \quad (16)$$

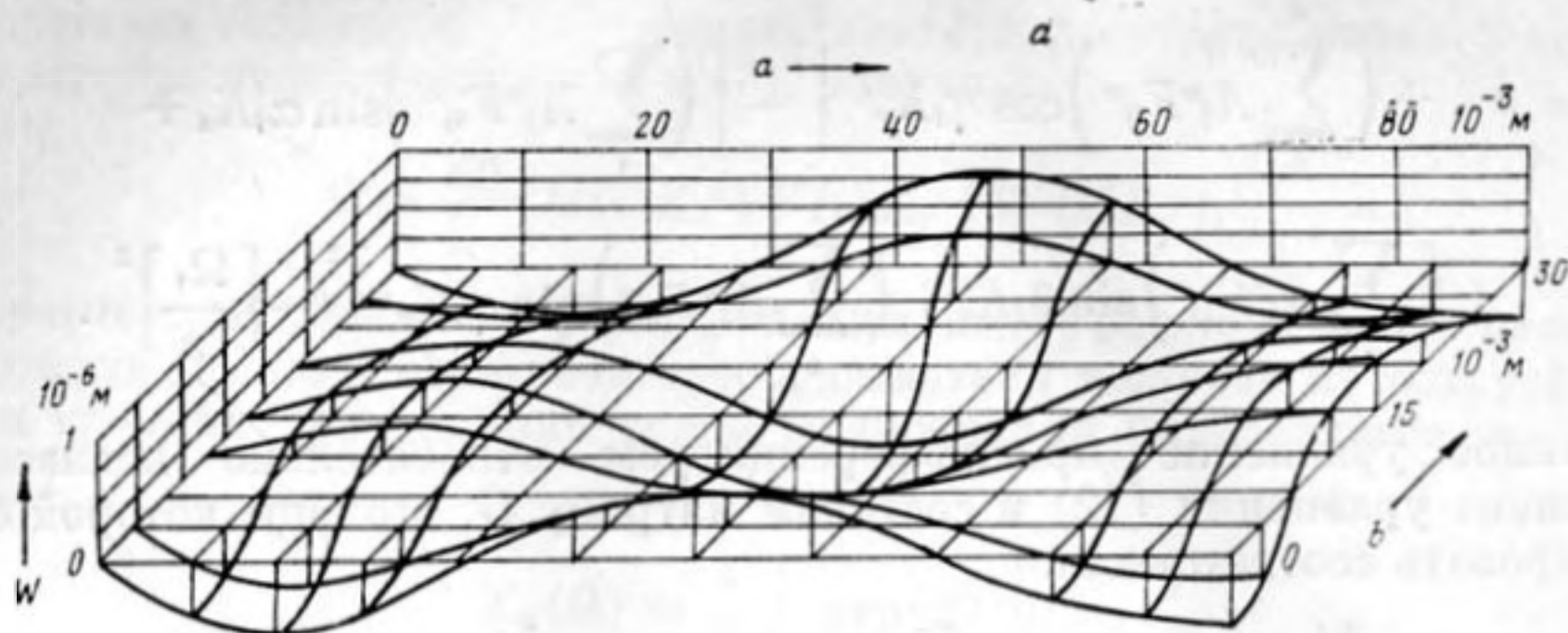
решения будем искать путем итерации в виде $\sigma = \Gamma^{-1}P$:

$$\Gamma_{ij} = \sum_1^q G_i^{(i)} G_j^{(i)}; \quad P_j = - \sum_1^q f_i G_j^{(i)}, \quad j=1, 2, \dots, (3+3k). \quad (17)$$

На основе представленного метода произведен расчет колебаний пьезо-керамического пластинчатого пьезопреобразователя. Для этого было получено несколько голографических интерферограмм с разными направлениями вектора чувствительности относительно нормали к поверхности пьезопреобразователя. На фиг. 2 представлена голографическая интерферограмма, вектор чувствительности которой направлен по нормали к поверхности пьезопреобразователя. Значение углов при записи голографической интерферограммы были соответственно $\theta_1 = \theta_2 = 0^\circ$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 90^\circ$. Подставив значения углов в формулу (6), вычисляем компоненты вектора чувстви-



Фиг. 2. Голографическая интерферограмма колебаний пластинчатого пьезопреобразователя на частоте 45,8 кГц, вектор чувствительности которой направлен по нормали к поверхности



Фиг. 3. Распределение амплитуд колебаний нормальных к поверхности пьезопреобразователя

тельности K_r , K_t , K_z . Изменение фазы волны Ω определяется по голографической интерферограмме при помощи формулы (13). Для этого на фотографии голографической интерферограммы находим наиболее светлую, так называемую узловую полосу, номер которой принимается равным нулю. От этой узловой полосы производим отсчет номеров темных интерференционных полос интерферограммы. Например, на фиг. 2 для заданных точек 1–3 номера очередности темных интерференционных полос будут равны соответственно $p=1, 2, 3$; при этом по обе стороны узловой полосы они будут отличаться знаком ввиду различных направлений смещения. Подставляем эти значения в формулу (13), вычисляем Ω . Аналитические выражения расчета F_{ij}^u , F_{ij}^v , F_{ij}^w представлены в работах [4–6]. Как пример представим аналитическое выражение для расчета колебаний в нормальном к поверхности направлении. В частности, для прямоугольной пластины, шарнирно опертой по двум противоположным краям, значения собственных форм колебаний точек пластины имеют вид

$$F_{ij}^w = \Phi_j(y_i) \sin(j\pi x_i/a_x), \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (18)$$

где x_i , y_i — координаты i -й рассматриваемой точки пластины (пьезопреобразователя); a_x — размер пластины по оси x ; j — номер собственной формы колебаний пластины, а Φ_j определяется из выражения

$$\Phi_j = C_{1j} \cos(\gamma_{1j}y_i) + C_{2j} \sin(\gamma_{1j}y_i) + C_{3j} \operatorname{ch}(\gamma_{2j}y_i) + C_{4j} \operatorname{sh}(\gamma_{2j}y_i). \quad (19)$$

В уравнении (19) обозначено C_{1j} , C_{2j} , C_{3j} , C_{4j} — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий закрепления двух других противоположных краев пластины, параллельных оси x :

$$\gamma_{1j} = \sqrt{(\rho h \omega_j / D)^{1/2} - \gamma^2 \pi^2 / d_x}, \quad \gamma_{2j} = \sqrt{(\rho h \omega_j / D)^{1/2} + j^2 \pi^2 / a_x}, \quad (20)$$

где $D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$ — цилиндрическая жесткость пластины; E — модуль упругости материала пластины; ν — коэффициент Пуассона; ρ — плотность материала пластины; h — толщина пластины; ω_j — собственная частота колебаний пластины, соответствующая j -й собственной форме колебаний.

Таким образом определенные исходные данные Ω , K_r , K_t , K_z , F_{ij}^u , F_{ij}^v , F_{ij}^w используются для расчета неизвестных уравнения (12) согласно описанной выше методики.

На фиг. 3 представлен результат расчета нормальной компоненты вектора пространственных колебаний. При расчете был использован модифицированный пакет программ [8], позволяющий автоматизировать процесс анализа голографических интерферограмм.

Приведенная методика анализа голографических интерферограмм позволяет оптимизировать работу ультразвуковых пьезопреобразователей в реальных конструкциях. Она также применена при анализе голографических интерферограмм пространственных колебаний твердых деформируемых тел любой геометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рагульскис К. М., Арутюнян М. Г., Палявичюс А. П. Исследование пространственных вибраций звеньев вибромеханизмов с помощью голографической интерферометрии // Проблемы машиностроения и автоматизации. Международный центр научной и технической информации, Институт машиноведения им. А. А. Благонравова АН СССР, Информационный центр промышленности, Информэлектро. Москва — Будапешт, 1986. Вып. 8. С. 18—29.
2. Tonin R., Bies D. General theory of timeaverage holography for the study of three-dimensional vibrations at a single frequency // J. Opt. Soc. Amer. 1978. V. 68. N 7. P. 924—931.
3. Tuschak P. A., Allaile R. A. Axisymmetric vibrations of a cylindrical resonator measured by holographic interferometry // Experim. Mechan. 1975. N 15. P. 81—88.
4. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек. Справочник. Киев: Наук. думка, 1964. 288 с.
5. Вибрации в технике. Справочник в шести томах. Колебания механических систем / Под ред. Болотина В. В. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
6. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
7. Вест И. Голографическая интерферометрия / Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 504 с.
8. Кулев М. К., Палявичюс А. П. Пакет программ для анализа голографических интерферограмм колебаний пластины // Инф. листок о научно-техн. достижениях. Сер. 50. Вильнюс. Лит. НИИНТИ, 1983. № 83—26. С. 1—4.

Каунасский политехнический институт
им. Антанаса Снечкуса

Поступила в редакцию
22.III.1986