АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXV 1989 Вып. 1

УДК 551.463.21

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МОД, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ НАД НАКЛОННЫМ ДНОМ

Буренков С. В.

Статья посвящена вопросам распространения звука в двумерно-неоднородном волноводе. Рассмотрено взаимодействие локальных мод над наклонным дном. Получено условие малости взаимодействия мод, приведены расчеты на ЭВМ трансформации мод в клине.

Одной из общепринятых математических моделей, описывающих распространение звука в двумерных и трехмерных волноводах, является адиабатическое приближение (АП), введенное впервые в гидроакустику в 1965 г. Пирсом [1]. В рамках этого приближения поле в каждой точке волновода представляется в виде суммы локальных невзаимодействующих мод, каждая из которых распространяется по своему пути, т. е. по «горизонтальному лучу». Поэтому данная модель позволяет наглядно представить себе сущность происходящих в океане акустических процессов, исследовать и предсказать основные черты звукового поля. Это особенно полезно в сложных, близких к реальному океану, волноводах (подробнее см. [2]). Но получать реальную пользу от какого-либо приближения можно лишь в том случае, когда известно, что и каким образом может помешать его применению, и где тот предел, до которого еще получаются достоверные результаты.

Проблемам применимости адиабатического приближения посвящено множество работ. Вопрос о взаимодействии мод в волноводе постоянной глубины с изменяющимся по трассе профилем скорости звука был решен в 1969 г. Майлдером [3]. Случай с наклонным дном оказался значительно сложнее.

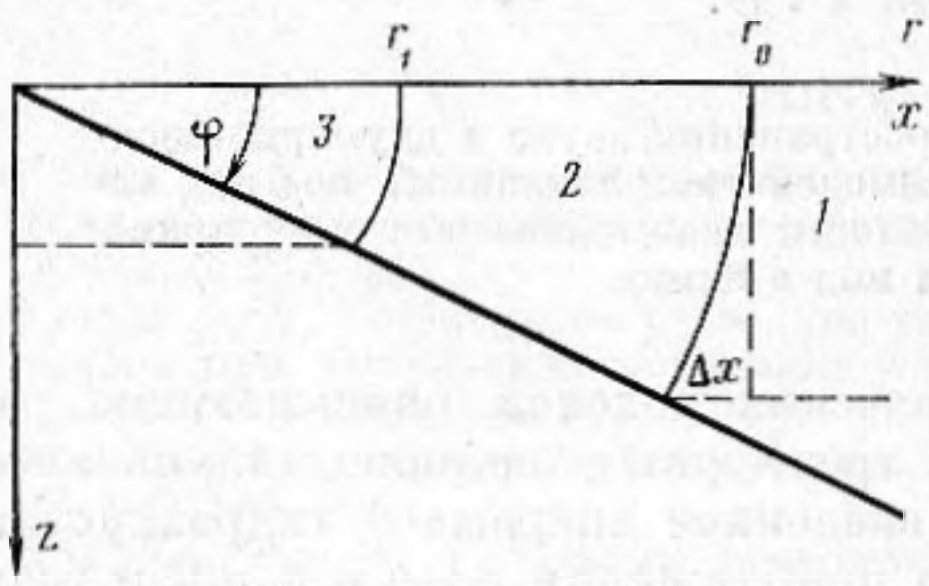
В радиофизике и волоконной оптике подробно рассматривается вопрос о поле в нерегулярном идеальном волноводе (подробный обзор этих работ см. в [4]). С точки зрения гидроакустики наиболее интересны подходы, изложенные в работах [5–7]. В [5] задача о преобразовании мод рассматривается с помощью лучевого представления, в [6] асимптотически интегрируется система уравнений метода поперечных сечений. Однако методы [5, 6] работают только при достаточно больших номерах мод, т. е. при углах Бриллюэна $\beta_n \sim 1$. В реальных условиях прибрежной зоны такие моды, как правило, являются затухающими. В работе [7] с помощью параболического уравнения теории дифракции получено решение как для малых, так и для больших номеров мод, но при этом используются два разных приближения, области применимости которых перекрываются. Кроме того, решение имеет простой асимптотический вид только при $kh(x)dh/dx \sim 1$ ($h(x)$ — глубина, k — волновое число), т. е. фактически только при слабом взаимодействии мод.

В зарубежной литературе [8–15] взаимодействие мод рассматривается, как правило, на примере клиновидной области с дном в виде полупространства. В этих работах либо сравнивается (с помощью ЭВМ) поле адиабатических мод с полем, вычисленным другим методом ([8, 10]), либо выписываются выражения для коэффициентов связи мод и численно интегрируются уравнения метода поперечных сечений [9, 11, 13, 14].

К сожалению, такой подход не может претендовать на общность результатов. Отсутствие соглашения о том, что считать взаимодействующими модами, а что адиабатическими, интегрирование системы дифференциальных уравнений при различных упрощающих предположениях при-

водит к противоречивым результатам. Так, например, в работах [8, 10] говорится, что при углах наклона дна $\alpha<10°$ адиабатические моды описывают распространение звука в основном верно. В работе [9] сделан вывод о том, что взаимодействие мод над песчаным дном начинается при $0{,}057°<\alpha<0{,}57°$. Имеются и промежуточные варианты: $\alpha=2{,}8°$ ([13]), $\alpha=1{,}55°$ [12]. В работе же [14] предсказывается, что АП применимо при $\alpha<1°$, но в то же время приводится расчет по адиабатическому методу для $\alpha=5{,}7°$.

Из сказанного выше следует, что, несмотря на большое количество работ, вопрос о том, когда взаимодействуют моды, а когда не взаимодействуют, еще не решен до конца. Цель настоящей работы — подробно исследовать преобразование мод на простой модели, а затем по возможности, обобщить эту модель на волновод с кусочно-линейным проницаемым дном.



Фиг. 1. Геометрия задачи

Для этого воспользуемся точным решением для клиновидной области с однородным заполнением и абсолютно мягким дном. Идея метода состоит в том, чтобы разложить поле в волноводе сравнения *1* (см. фиг. 1), записанное в адиабатическом приближении по точным собственным функциям угловой области *2*, продолжить это поле через область *2*, после чего на «выходе» *2* вновь разложить его по модам волновода сравнения *3*. Таким образом, точное решение позволяет проследить ход трансформации мод. Если задать на «входе» участка *2* одну локальную моду единичной амплитуды, то на «выходе» получим коэффициенты трансформации входящей моды.

Поле волны, идущей справа налево, т. е. к берегу, в АП может быть записано

$$u_1(x, z)=\sum_n A_n \exp\left(-i\int \zeta_n(x)\,dx\right)\psi_n(z, x), \qquad (1)$$

где A_n — амплитуда n-й моды на входе, $k_n=\pi n/h(x)$, $\zeta_n=\sqrt{k^2-k_n^2}$ — горизонтальное собственное число n-й моды, глубина $h(x)=x\,\mathrm{tg}\,\alpha\approx x\alpha$, α — угол раскрыва клина, $\psi_n(z, x)=\sqrt{2/h(x)}\sin k_n z$ — нормированная собственная функция. Подставляя в (1) выражения для h, k_n и ζ_n, после интегрирования получаем

$$u_1(x, z)=\sum_n A_n \exp\left[-i\left(\zeta_n x-xk_n \arccos\left(\frac{k_n}{k}\right)\right)\right]\psi_n(x, z)=$$

$$=\sum_n A_n \exp(-i\tilde{\zeta}_n x)\,\psi_n(z, x), \qquad (2)$$

где $\tilde{\zeta}_n=\zeta_n-k_n \arccos(k_n/k)$. Поле в области *2* можно записать в полярных координатах r и φ:

$$u_2(r, \varphi)=\sum_n B_n H_{\alpha_n}^{(2)}(kr)\,\tilde{\psi}_n(\varphi), \qquad (3)$$

где $\alpha_n=xk_n=\pi n/\alpha$, $\tilde{\psi}_n=\sqrt{2}/\alpha \sin \alpha_n\varphi$. При этом граничные условия для $r=0$ и $r=\infty$ выбраны таким образом, чтобы существовали только приходящие из бесконечности волны. Этого можно достичь, если поместить в вершине клина дополнительный источник, гасящий падающую волну без отражения. Такие граничные условия нужны для того, чтобы смоделировать распространение в клине с проницаемым дном, где отражение падающих волн от вершины клина мало. Используя дебаевскую асимптотику $H_\nu^{(2)}(z)=(2/\pi\sqrt{z^2-\nu^2})^{1/2}\exp\left(-i\sqrt{z^2-\nu^2}+i\nu \arccos\left(\frac{\nu}{z}\right)+i\pi/4\right)$, при-

водим (3) к виду

$$u_2(r,\varphi)=\sum_n \sqrt{\frac{2i}{\pi r\zeta_n}}\exp\left[-i\left(\sqrt{k^2-\alpha_n^2/r^2}-\alpha_n\arccos\left(\frac{\alpha_n}{rk}\right)\right)\right]\tilde{\psi}_n(\varphi). \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что (4) имеет вид, аналогичный (2). Поэтому, заменяя $x=r\cos\varphi$, $z=r\sin\varphi$ и пренебрегая членами второго порядка везде, кроме показателя экспоненты (поскольку фаза — наиболее быстро изменяющаяся часть выражения (2)) запишем поле адиабатических мод на поверхности $r=r_0$:

$$u_1|_{r=r_0}=\sum_n A_n\exp\left(-i\tilde{\xi}_n r_0\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)\right)\frac{\tilde{\psi}_n(\varphi)}{\sqrt{r_0}}.$$

Приравнивая u_1 к u_2 на этой поверхности, получаем коэффициенты возбуждения мод точного решения B_n:

$$B_n=\sqrt{\frac{\pi\zeta_n i}{2}}\sum_m \exp\left(-i(\tilde{\xi}_n-\tilde{\xi}_m)\right)V_{n,m}A_m, \quad (5)$$

$$V_{n,m}=\langle\tilde{\psi}_n|\exp(i\varphi^2\zeta_m r_0/2)|\tilde{\psi}_m\rangle=\int_0^\alpha \tilde{\psi}_n\exp(i\varphi^2\zeta_m r_0/2)\tilde{\psi}_m\,d\varphi,$$

где $\langle|\rangle$ — скалярное произведение.

Делая в точке r_1 аналогичным образом обратное преобразование, получаем коэффициенты возбуждения мод в волноводе 3:

$$C_p(r_1,r_0)=\sum_k \sqrt{\frac{2}{i\pi\zeta_k}}B_k\exp(i(\zeta_p-\zeta_k)r_1)D_{p,k}, \quad (6)$$

$$D_{p,k}=\int_0^{\alpha x}\psi_k(x,z)\exp(-iz^2\zeta_k/2r_1)\psi_p(x,z)\,dz.$$

Зависимость $C_p(r_0, r_1)$ от r_1 легко рассчитывается на ЭВМ, но нас в первую очередь будет интересовать, как исходя из предложенного метода предсказать качественный ход трансформации мод.

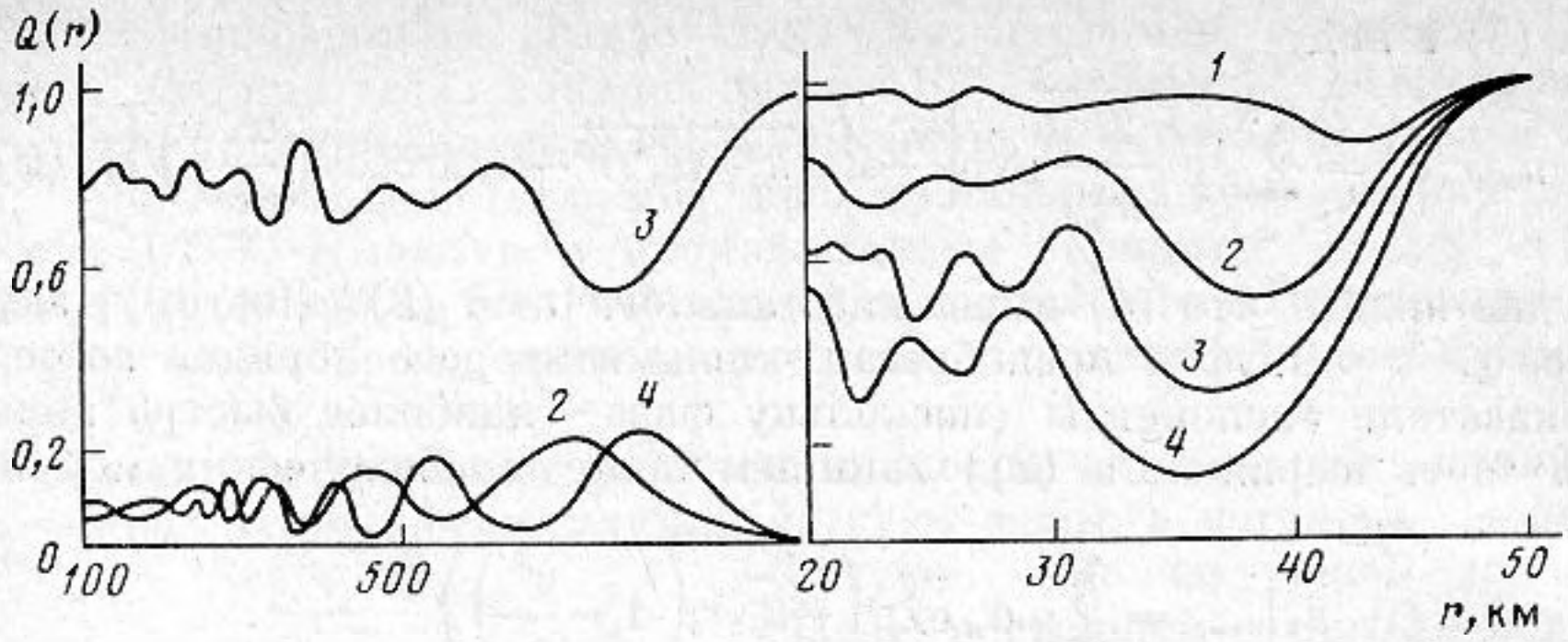
Величиной, определяющей различие модовых спектров адиабатического и точного решений A_n и B_n, является $\zeta_n\Delta x$. Вдали от точки отсечки $\zeta_n\approx k$, поэтому если

$$k\Delta x\ll 1, \quad (7)$$

то угловые собственные функции $\tilde{\psi}_n(\varphi)$ мало отличаются от $\psi_n(x, z)$ собственных функций АП и выполнение преобразований (5), (6) даст $C_n=A_n$. Если при этом волна распространяется к берегу, то условие (7) будет выполняться все лучше и лучше из-за уменьшения Δx и моды не будут взаимодействовать вплоть до области отсечки. В обратном случае, при $k\Delta x\gg 1$ моды будут интенсивно взаимодействовать между собой, поскольку каждая входящая мода раскладывается в широкий спектр B_n мод точного решения. Возможен также и промежуточный случай, когда мода из области $k\Delta x>1$ переходит в область $k\Delta x<1$. При этом по мере уменьшения Δx сначала происходит перераспределение энергии по модам, а потом модовый спектр C_n колеблется около значений, определямых коэффициентами B_n, т. е. начиная с некоторого расстояния, прекращается накопление ошибки АП.

Будем считать, что АП применимо до тех пор, пока в моде остается более половины ранее содержавшейся в ней энергии или $|C_n(r_0, r_1)|\geqslant 0{,}707\,A_n$, при этом мерой энергии, приходящейся на данную локальную моду в спектре мод точного решения, является коэффициент

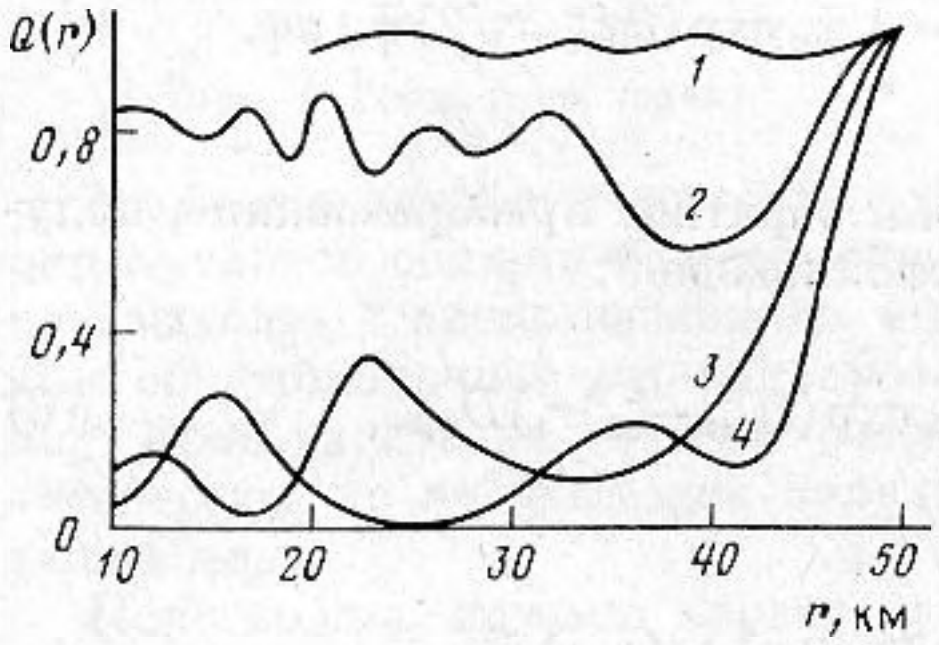
$$E_n=B_nB_n^*\Big/\sum_k B_kB_k^*.$$

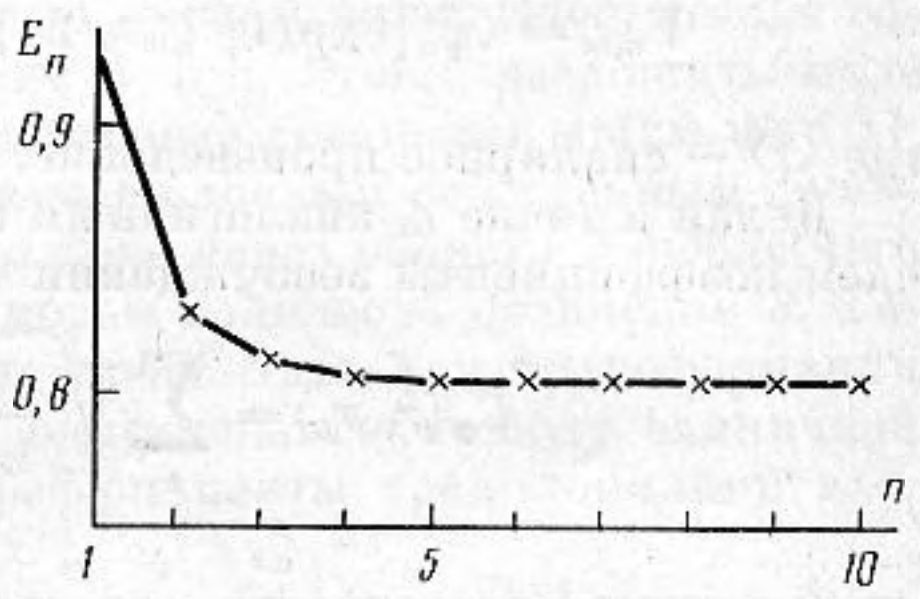


Фиг. 2 Фиг. 3

Фиг. 2. Зависимость коэффициентов возбуждения мод от расстояния. На входе при $r=1000$ км задана одна третья мода, цифры у кривых – номера мод, $f=10$ Гц, $\alpha=0{,}5°$, $Q(r)=|C_n(r_0, r)|^2$

Фиг. 3. Зависимость поведения $|C_n(r_0, r)|^2$ от частоты: *1* – $f=25$ Гц, $E_3=0{,}95$; *2* – 50 Гц, $E_3=0{,}81$; *3* – 75 Гц, $E_3=0{,}61$; *4* – 100 Гц, $E_3=0{,}405$. $\alpha=1°$, $n=3$





Фиг. 4 Фиг. 5

Фиг. 4. Зависимость поведения $|C_n(r_0, r)|^2$ от угла наклона дна $\alpha°$, С: *1* – 0,5, *2* – 1, *3* – 2, *4* – 3, $f=50$ Гц, $n=3$. $Q(r)=|C_n(r_0, r)|^2$

Фиг. 5. Зависимость коэффициентов возбуждения мод точного решения E_n от номера моды; $f=50$ Гц. $\alpha=1°$

Из сравнения формул (2) и (4) следует, что максимальная разность фаз между точным и адиабатическим решением также определяется величиной $\zeta_n\Delta x<k\Delta x$. Поэтому фазовые и амплитудные характеристики поля оказываются для рассматриваемой модели органически связанными между собой и слабость межмодового взаимодействия гарантирует точность фазы.

Для проверки и детализации приведенных выше рассуждений была написана программа, позволяющая прослеживать ход трансформации мод в соответствии с уравнениями (5), (6). Для контроля в программе рассчитывалась энергия поля взаимодействующих мод на каждом шаге по расстоянию. Несмотря на использование в расчетах ограниченного числа мод точного решения, энергия оставалась постоянной с точностью до единиц процентов.

На фиг. 2–4 приведены графики зависимости энергетических коэффициентов возбуждения $|C_n(r_0r)|^2$ от расстояния для разных углов раствора клина, частот и номеров мод.

График на фиг. 2 имеет вид, характерный для случая, когда в клин входит единственная мода, при условии, что на «входе» $k\Delta x=1$. Видно, что вначале при $r=1000$ км присутствует в чистом виде одна третья мода. Далее с уменьшением расстояния до вершины клина происходит перекачка энергии в другие моды, в первую очередь в соседние (*2* и *4*). При

r=760 км $|C_n(r_0, r)|^2$ достигает минимума $|C_n(r_0, r)|^2$=0,532, а далее колеблется около значения E_3=0,809. Коэффициент возбуждения первой моды на всей трассе не превышает уровень 0,03, пятой – 0,04, поэтому на графике эти моды не показаны.

На фиг. 3 показана зависимость поведения $|C_n(r_0, r)|^2$ от частоты (n==3). Для второго случая $k\Delta x$=1. Видно, что во всех случаях $|C_n(r_0, r)|^2$ при достаточно малых r колеблется около значений E_n.

На фиг. 4 представлены графики $|C_n(r_0, r)|^2$ в зависимости от угла наклона дна α. Для второго случая (α=1°) также $k\Delta x$=1. При α=0,5° (случай *1*) точка отсечки находится при r=20 км.

На фиг. 5 показана зависимость коэффициента возбуждения мод точного решения от номера моды n. Видно, что коэффициент E_n, определяющий поведение моды, слабо зависит от номера n, т. е. моды высших номеров, входя в клин, ведут себя аналогично модам низших номеров.

Подытоживая проведенные расчеты, можно сказать, что во всех рассмотренных случаях выполнение условия $k\Delta x$=1 дает величину $E_n\approx$0,8, что гарантирует $|C_n(r_0, r)|>0{,}7\,A_n$ вплоть до области отсечки, т. е. слабое взаимодействие мод. Поэтому, используя $\Delta x=\alpha^2 r/2$, получаем искомое условие применимости АП:

$$kr\alpha^2/2\leqslant 1. \tag{8}$$

Аналогичные условия получены, в частности, в [7] – $\xi_n hdh/dx/\pi<1$, в [16] – $kh^2/M\ll 1$, где M – характерный масштаб изменения глубины ($dh/dx\sim h/M$). Видно, что во всех случаях требуется малость величины $khdh/dx$, вопрос только в том, какова требуемая степень этой малости, что весьма важно для практических приложений.

Из (8) следует, что для идеальной клиновидной области будет существовать интервал справедливости АП

$$\pi n/k\alpha=r_1\leqslant r\leqslant r_2=2/k\alpha^2. \tag{9}$$

Поскольку в правой части неравенства (9) α стоит во второй степени, а в левой – в первой, то всегда можно найти такой α, при котором $r_2>r_1$. Если же $\alpha>2/\pi n$, то $r_1>r_2$ и АП заведомо неприменимо.

Теперь попытаемся обобщить предложенную модель на случай кусочно-линейного проницаемого дна. Известно, что при падении под углом, бо́льшим критического, коэффициент отражения близок к –1. Поэтому отличие абсолютно мягкого дна от реального для распространяющихся мод невелико. В [17] показано, что замена реального волновода на идеальный глубиной $h+dh$, $dh=c_0c_2/4f\sqrt{c_2^2-c_0^2}$, где c_2 – скорость звука в дне, позволяет удовлетворить граничным условиям с точностью до второго порядка по углу раскрыва клина и, таким образом, описать распространяющиеся моды реального волновода в рамках описанной модели.

При наличии изломов дна появятся отраженные волны. Можно, расписав падающие и отраженные волны в каждом куске, приравнять на границах поле и его производную и получить точное решение (аналогичная процедура проделана в [18] для ступенчатого волновода). Но поскольку известно [19], что коэффициенты возбуждения отраженных мод имеют порядок $\Delta\alpha$ (разности углов наклона), т. е. довольно малы, то, по-видимому, имеет смысл ограничиться приближением распространения вперед. Следует учесть и то, что никогда не имеется исчерпывающей информации о реальной океанической среде и поэтому дальнейшая детализация кусочно-линейной модели вряд ли даст полезную информацию.

Подводя итоги, можно сказать, что выполнение условия (8) гарантирует сохранение более половины энергии в одиночной моде, проходящей над наклонным дном. Это верно и для распространяющихся мод волновода с кусочно-линейным проницаемым дном, при этом условие (8) имеет вид $kh(x)dh/dx/2\leqslant 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pierce A. D.* Extension of the Method of Normal Modes to Sound propagation in an Almost-Stratified Medium // J. Acoust. Soc. Amer. 1965. V. 37(1). P. 19–27.
2. *Барридж Р., Вейнберг Г.* Горизонтальные лучи и вертикальные моды // Распространение волн и подводная акустика // Под ред. Келлера Дж. Б. и Пападакиса Н. М.: Мир, 1980. С. 76–125.
3. *Milder D. M.* Ray and wave invariants for SOFAR channel propagation // J. Acoust. Soc. Amer. 1969. V. 46(5). P. 1259–1263.
4. *Боровиков В. А., Кинбер Б. Е., Кравцов Ю. А., Попов А. В., Уфимцев П. Я.* Волны и лучи в нерегулярных волноводах: Препринт № 13(212) ИЗМИРАН, 1978. С. 1–14.
5. *Кинбер Б. Е., Кравцов Ю. А.* Лучевая теория преобразования волн в многомодовых нерегулярных волноводах // Радиотехн. и электр. 1977. Т. 22. № 12. С. 2470–2479.
6. *Боровиков В. А.* Поля в плавнонерегулярных волноводах и задача о вариации адиабатического инварианта: Препринт № 99. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 1978. С. 1–66.
7. *Попов А. В.* К расчету поля в широком нерегулярном волноводе // Распространение декаметровых радиоволн. М.: Наука, 1976. С. 24–29.
8. *Graves R. D., Nagl A., Uberall H.* Range-dependent normal modes in underwater sound propagation; application to the wedge shaped ocean // J. Acoust. Soc. Amer. 1975. V. 58(6). P. 1171–1177.
9. *Rutherford S. R., Hawker K. E.* An examination of the influence of the range dependence of the ocean bottom on the adiabatic approximation // Ibid. 1978. V. 66(4). P. 1145–1151.
10. *Rutherford S. R.* An examination of multipath processes in a range-dependent ocean environment within the context of adiabatic mode theory // Ibid. 1978. V. 66(5). P. 1482–1486.
11. *Williams A. O.* Mode interactions in an isovelocity ocean of uniformly varying depth // Ibid. 1979. V. 67(1). P. 177–185.
12. *Jensen F. B., Kuperman W. A.* Sound propagation in a wedge – shaped ocean with a penetrable bottom // Ibid. 1980. V. 67(6). P. 1564–1566.
13. *Thomson I. J.* Mixing of normal modes in a range-dependent model ocean // Ibid. 1981. V. 69(5). P. 1280–1289.
14. *McDaniel S. T.* Mode coupling due to the interaction with the sea-bed // Ibid. 1982. V. 72(3). P. 916–923.
15. *Ershan Shang, Wang Yanyn.* On the criterion of adiabaticity in the coupled mode theory // Chi. Phys. Letters. 1986. V. 3(4). P. 153–157.
16. *Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П.* Теоретические основы акустики океана. М.: Гидрометиздат, 1982. С. 159.
17. *Buckingham M. J.* Theory of three-dimensional acoustic propagation in a wedgelike ocean with a penetrable botton // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. V. 82(1). P. 198–210.
18. *Evans R. B.* A coupled mode solution for acoustic propagation in waveguide with stepwise depth variations of apenetrable bottom // Ibid. 1983. V. 74(1). P. 188–195.
19. *Покровский В. Л., Улинич Ф. Р., Саввиных С. К.* К теории волноводов переменного сечения // Радиотехн. и электр. 1959. Т. 4. Вып. 2. С. 161–172.

Акустический институт им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
30.XI.1987