

УДК 534

ДИФРАКЦИЯ НА УПРУГОМ ВЫТЯНУТОМ ТЕЛЕ
ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Тэтюхин М. Ю.

Задача дифракции плоской звуковой волны на вытянутом упругом теле сведена к системе одномерных интегральных уравнений. Проведены численные расчеты.

Пусть в изотропной акустической среде с параметрами ρ, c (ρ — плотность, c — скорость звука) расположено вытянутое упругое тело D с гладкой замкнутой поверхностью S , описываемой в цилиндрических координатах уравнением $r=dF(z/l, \varphi)$, $-l \leq z \leq l$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Здесь $0 < F(t, \varphi) \leq 1$ при $|t| \leq 1$. Тело D заполнено средой с параметрами Ламе λ, μ и плотностью ρ_1 . Рассмотрим задачу рассеяния плоской волны $P_0 = \exp(ik, \mathbf{r})$, $k = \omega/c$, $\mathbf{k}^2 = k^2$ на теле D . Рассеянное поле $P(\mathbf{r})$ вне тела D удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)P(\mathbf{r}) = 0, \tag{1}$$

а вектор смещений $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ внутри тела D — системе теории упругости ([1]):

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} - \mu \text{rot rot } \mathbf{u} + \omega^2 \rho_1 \mathbf{u} = 0. \tag{2}$$

На границе тела S выполняются краевые условия

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = \frac{1}{\omega^2 \rho} \frac{\partial}{\partial n} (P + P_0), \quad (\sigma_n(\mathbf{u}), \boldsymbol{\tau}_1) = 0, \tag{3}$$

$$(\sigma_n(\mathbf{u}), \mathbf{n}) = -(P + P_0), \quad (\sigma_n(\mathbf{u}), \boldsymbol{\tau}_2) = 0,$$

где вектор напряжения $\sigma_n(\mathbf{u}) = \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$,

$$(\sigma(\mathbf{u}))_{jm} = \lambda \text{div } \mathbf{u} \delta_{jm} + \mu \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right),$$

$$m, j = 1, 2, 3,$$

δ_{jm} — символ Кронекера, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, \mathbf{n} — внешняя нормаль к S , $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ — линейно независимые касательные векторы к S . Рассеянное поле $P(\mathbf{r})$ удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда. Предполагается, что $kl \gg 1$, $kd \cong 1$, так что $\varepsilon = d/l \ll 1$.

Будем искать $P(\mathbf{r})$ и $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ в виде волновых потенциалов простого слоя:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \iint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}') dS, \tag{4}$$

$$P(\mathbf{r}) = \iint_S \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mu(\mathbf{r}') dS.$$

Элементы тензора Грина G равны

$$G_{jm} = \frac{1}{\rho_1 \omega^2} \left[k_i^2 \frac{e^{ik_i R}}{R} \delta_{jm} + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_m} \frac{e^{ik_i R} - e^{ik_t R}}{R} \right],$$

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3), \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad k_i^2 = \frac{\rho_1 \omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad k_t^2 = \rho_1 \omega^2 / \mu.$$

Функция $P(\mathbf{r})$ и вектор-функция $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ удовлетворяют уравнениям (1), (2), а $P(\mathbf{r})$ — условию излучения. Напряжения имеют вид

$$\sigma_n(\mathbf{u}) = 2\pi\varphi(\mathbf{r}) + \iint_S \sigma_n(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \varphi(\mathbf{r}') dS, \quad (5)$$

где $\sigma_n(G) = (\sigma_n(\mathbf{g}_1), \sigma_n(\mathbf{g}_2), \sigma_n(\mathbf{g}_3))$, \mathbf{g}_j — столбцы тензора G . Элементы матрицы напряжений равны

$$(\sigma_n(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))))_{jm} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial x_n} \left\{ \begin{array}{l} \mu \left(\frac{\partial G_{nm}}{\partial x_j} + \frac{\partial G_{jm}}{\partial x_n} \right), \quad n \neq j, \\ \lambda \operatorname{div} G^{(m)} + 2\mu \frac{\partial G_{nm}}{\partial x_n}, \quad n = j, \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\operatorname{div} G^{(m)} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial G_{nm}}{\partial x_n}, \quad \Phi = r - dF(z/l, \varphi), \quad |\nabla\Phi| = \left(\sum_{n=1}^3 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_n} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть k, θ_0, φ_0 — сферические координаты волнового вектора \mathbf{k} . Будем искать неизвестные векторную $\varphi(\mathbf{r})$ и скалярную $\mu(\mathbf{r})$ плотности в виде произведения осциллирующей экспоненты на медленно меняющуюся функцию z :

$$\varphi(\mathbf{r}) = \exp(ik \cos \theta_0 z) \psi(z/l, \varphi), \quad \mu(\mathbf{r}) = \exp(ik \cos \theta_0 z) \nu(z/l, \varphi). \quad (7)$$

Введем обозначения: $r = dr_0$, $r_0 = F(z', \varphi)$, $z' = z/l$, тогда получим

$$P(\mathbf{r}) = d \exp(ikz \cos \theta_0) \int_0^{2\pi} I(\nu) d\tilde{\varphi}, \quad (8)$$

$$I(\nu) = \int_{-1}^1 \frac{\exp(iklQ)}{R_1} \sqrt{F^2 + F_{\varphi}'^2 + \varepsilon^2 F^2 F_z'^2} \nu(t, \tilde{\varphi}) dt,$$

где $F = F(t, \tilde{\varphi})$, $R_1^2 = (t - z')^2 + \varepsilon^2 [r_0^2 + F^2 - 2r_0 F \cos(\varphi - \tilde{\varphi})]$, $Q = R_1 + (t - z') \times \times \cos \theta_0$. Используя результаты работы [2] в предположении $\sin \theta_0 \neq 0$, получаем на поверхности S

$$P(\mathbf{r}) = \exp(ikz \cos \theta_0) \Psi(\nu), \quad \frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial n} = \exp(ikz \cos \theta_0) \Psi_1(\nu),$$

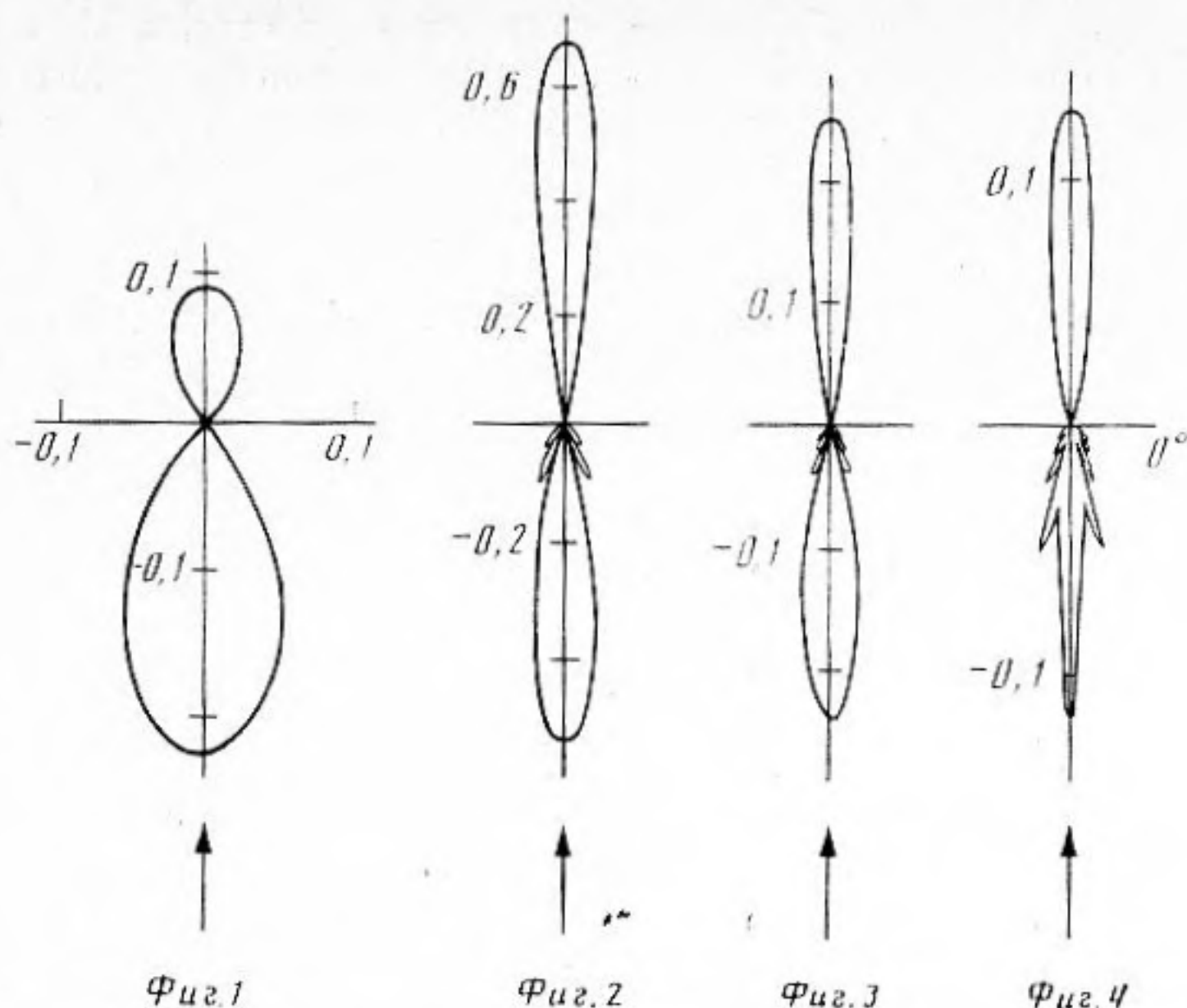
$$\Psi(\nu) = \pi i d \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}(kdh \sin \theta_0) \sqrt{\tilde{r}_0^2 + \tilde{r}_{0\varphi}'^2} \nu(z', \tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi},$$

$$\Psi_1(\nu) = -\pi i k d \sin \theta_0 (r_0^2 + r_{0\varphi}'^2)^{-1/2} \int_0^{2\pi} H_1^{(1)}(kdh \sin \theta_0) h^{-1} [r_0^2 - r_0 \tilde{r}_0 \cos(\varphi - \tilde{\varphi}) - \\ - \tilde{r}_0 r_{0\varphi}' \sin(\varphi - \tilde{\varphi})] \sqrt{\tilde{r}_0^2 + \tilde{r}_{0\varphi}'^2} \nu(z', \tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi},$$

где обозначено $\tilde{r}_0 = F(z', \tilde{\varphi})$, $h^2 = r_0^2 + \tilde{r}_0^2 - 2r_0 \tilde{r}_0 \cos(\varphi - \tilde{\varphi})$. В этих и последующих формулах отброшены члены порядка $O(\varepsilon)$, $O((kl)^{-2})$.

Аналогично преобразуем компоненты векторов $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и $\sigma_n(\mathbf{u}(\mathbf{r}))$ при условиях $|\cos \theta_0| < k_l/k$, $|\cos \theta_0| < k_l/k$; тогда, подставив полученные выражения в уравнения (3), получаем

$$\frac{\pi i d \rho}{\rho_1} \int_0^{2\pi} (M_1, \Psi(z', \tilde{\varphi})) \sqrt{\tilde{r}_0^2 + \tilde{r}_{0\varphi}'^2} d\tilde{\varphi} = \Psi_1(\nu) - 2\pi \nu(z', \varphi) +$$



Фиг. 1. Диаграмма рассеяния. Сфероид: $kl=5$, $kd=0,5$, $\rho_1=10^3$, $\rho=1$

Фиг. 2. Диаграмма рассеяния. Сфероид: $kl=20$, $kd=2$, $k_{1l}=5$, $k_{1l}=9,6$, $\rho_1=7,8$, $\rho=1$

Фиг. 3. Диаграмма рассеяния. Трехосный эллипсоид: $kl=20$, $kd=2$, $k_{1l}=5$, $k_{1l}=9,6$, $\rho_1=7,8$, $\rho=1$

Фиг. 4. Диаграмма рассеяния. Трехосный эллипсоид: $kl=20$, $kd=2$, $k_{1l}=19$, $k_{1l}=140$, $\rho_1=2$, $\rho=1$

$$+ ik \sin \theta_0 (r_0^2 + r_{0\varphi}'^2)^{-1/2} [r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_{0\varphi}' \sin(\varphi - \varphi_0)] \times \exp(ikdr_0 \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)), \quad (9)$$

$$2\pi(\psi(z', \varphi), \mathbf{n}) + \frac{\pi id}{\rho_1 \omega^2} \int_0^{2\pi} (\mathbf{M}_2, \psi(z', \tilde{\varphi})) \sqrt{\tilde{r}_0^2 + \tilde{r}_{0\varphi}'^2} d\tilde{\varphi} = -[\Psi(v) + \exp(ikdr_0 \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0))],$$

$$2\pi(\psi(z', \varphi), \boldsymbol{\tau}_1) + \frac{\pi id}{\rho_1 \omega^2} \int_0^{2\pi} (\mathbf{M}_3, \psi(z', \tilde{\varphi})) \sqrt{\tilde{r}_0^2 + \tilde{r}_{0\varphi}'^2} d\tilde{\varphi} = 0,$$

$$2\pi(\psi(z', \varphi), \boldsymbol{\tau}_2) + \frac{\pi id}{\rho_1 \omega^2} \int_0^{2\pi} (\mathbf{M}_4, \psi(z', \tilde{\varphi})) \sqrt{\tilde{r}_0^2 + \tilde{r}_{0\varphi}'^2} d\tilde{\varphi} = 0,$$

где элементы векторов \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 — скалярные произведения столбцов матриц G и $\sigma_n(G)$ на \mathbf{n} , \mathbf{M}_3 и \mathbf{M}_4 — столбцов матрицы $\sigma_n(G)$ на $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$ соответственно. Элементы матрицы G имеют вид

$$G_{jm} = k_l^2 H_0^{(1)}(b_l) \delta_{jm} + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_m} (H_0^{(1)}(b_l) - H_0^{(1)}(b_l)),$$

$b_l = dh(k_l^2 - k^2 \cos^2 \theta_0)^{1/2}$, $b_l = dh(k_l^2 - k^2 \cos^2 \theta_0)^{1/2}$, элементы матрицы $\sigma_n(G)$ вычисляются по формуле (6).

Таким образом, для вектор-функции ψ и функции v получили систему интегральных уравнений (9), зависящих от параметра $z' \in [-1, 1]$ и не содержащих большого параметра kl , что существенно облегчает практические вычисления.

Можно показать, что первые две компоненты векторов M_2 и M_3 имеют в точке $\varphi = \bar{\varphi}$ особенность типа $a(z')/(\bar{\varphi} - \varphi)$ и бесконечно дифференцируемы при $\bar{\varphi} \neq \varphi$. Все остальные компоненты, стоящие под знаком интеграла, имеют либо слабую особенность в этой точке типа $b(z') \ln |\bar{\varphi} - \varphi|$, либо не имеют особенностей, причем при $\bar{\varphi} \neq \varphi$ все функции бесконечно дифференцируемы. Отсюда следует, что все интегралы в (9) существуют либо в обычном смысле, либо в смысле главного значения. Из формул (4), (7) находим главный член амплитуды рассеяния:

$$f(\theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0) = ld \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \exp(iklt(\cos \theta_0 - \cos \theta) - ik dF(t, \bar{\varphi}) \sin \theta \cos(\varphi - \bar{\varphi})) \times \\ \times v(t, \bar{\varphi}) \sqrt{F^2(t, \bar{\varphi}) + F_\varphi'^2(t, \bar{\varphi})} d\bar{\varphi} dt. \quad (10)$$

Формулы (9), (10) справедливы и в случае $|\cos \theta_0| > k_l/k$, $|\cos \theta_0| > k_t/k$, если вместо функции $H_0^{(1)}(b_t)$ рассмотреть функцию Макдональда $-2i/\pi K_0(|b_t|)$, и аналогично для b_l .

В качестве иллюстрации были проведены расчеты $|f(\theta, \varphi)|$ для сфероида при $\theta_0 = 90^\circ$, $\varphi = \varphi_0 = 0^\circ$, продольная ось тела расположена горизонтально. Фигура 1 — для параметров, имитирующих абсолютно жесткое тело ($\rho_1 \gg 1$). Результат хорошо согласуется с расчетами по точным формулам ([3]). Фигура 2 — для стали, в этом случае максимальная амплитуда рассеяния немного меньше, чем у аналогичного абсолютно жесткого сфероида. На фиг. 3, 4 представлены диаграммы рассеяния трехосного эллипсоида с соотношением осей 20 : 2 : 1, граница которого задана уравнением

$$r = d((1 - z^2/l^2)/(\cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi))^{1/2}, \quad \varphi = \varphi_0 = 0^\circ$$

Фигура 3 — для стали (близка к абсолютно жесткому телу ([4])), фигура 4 — полимерный материал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. Федорюк М. В. Дифракция плоской волны на вытянутом теле // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292. № 4. С. 833–835.
3. Конюхова Н. Б., Пак Т. В. Дифракция плоской звуковой волны на жестком вытянутом сфероиде // Сообщ. по прикладной математике. М.: ВЦ АН СССР, 1985.
4. Тэтюхин М. Ю., Федорюк М. В. Рассеяние плоской звуковой волны на протяженном теле произвольной формы // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 6. С. 811–815.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
25.IV.1988