3. *Milson R. F., Reilly N. H. C., Redwood M.* Analysis of generation and detection of surface and bulk acoustic waves by interdigital transducers // IEEE Trans. on Sonics and Ultrason. 1977. V. SU-24. № 3. P. 147–167.
4. *Лямов В. Е.* Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 165.
5. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. М.: Наука, 1982.
6. Акустические кристаллы/Под ред. Шаскольской М. П. М.: Наука, 1983.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
16.III.1988

УДК 534.231

ИМПЕДАНС ИЗЛУЧЕНИЯ КОЛЬЦЕВОГО ПОРШНЯ В БЕСКОНЕЧНОМ ЭКРАНЕ

Святенко В. А.

Изучение кольцевого поршня в бесконечном абсолютно жестком экране теоретически исследовалось в работах [1–4]. Вопросу численного определения импеданса излучения кольцевого поршня в широком диапазоне изменения его волновых размеров посвящена работа [5]. Однако в указанных работах не рассмотрены некоторые практически важные случаи, поэтому вернемся снова к этой задаче. Следуя [6], для безразмерного акустического импеданса можно получить

$$\frac{Z}{\rho c S} = \frac{2}{a^2 - b^2}\left[a^2 \int_0^\infty \frac{J_1^2(kat)\,dt}{t\sqrt{1-t^2}} - 2ab \int_0^\infty \frac{J_1(kat)\,J_1(kbt)\,dt}{t\sqrt{1-t^2}} + b^2 \int_0^\infty \frac{J_1(kbt)\,dt}{t\sqrt{1-t^2}}\right], \tag{1}$$

где ρc – волновое сопротивление, k – волновое число, a и b – внешний и внутренний радиусы кольца, $S=\pi(a^2-b^2)$ – площадь поршня. Первый и третий интегралы в выражении (1) с точностью до множителя $1/2$ равны безразмерному акустическому импедансу диска в бесконечном экране. При вычислении мнимой части второго интеграла, входящего в (1), возникают определенные трудности, поэтому, обозначая его A, преобразуем к виду [7]

$$A = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{(a^2+b^2)\cos\theta + 2ab}{a^2+b^2+2ab\cos\theta}\,d\theta \int_0^\infty \frac{J_2\left(kt\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}\right)}{t\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

и после вычисления внутреннего интеграла получим

$$A = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\left[J_{3/2}(\alpha) + iH_{3/2}(\alpha)\right]\frac{(a^2+b^2)\cos\theta + 2ab}{a^2+b^2+2ab\cos\theta}\,d\theta,$$

где $J_k(\alpha)$, $H_k(\alpha)$ – функции Бесселя и Струве сответственно, $\alpha = k\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$. Последний интеграл вычисляется после разложения в ряд функций Бесселя и Струве. Окончательно для акустического импеданса кольцевого поршня получим

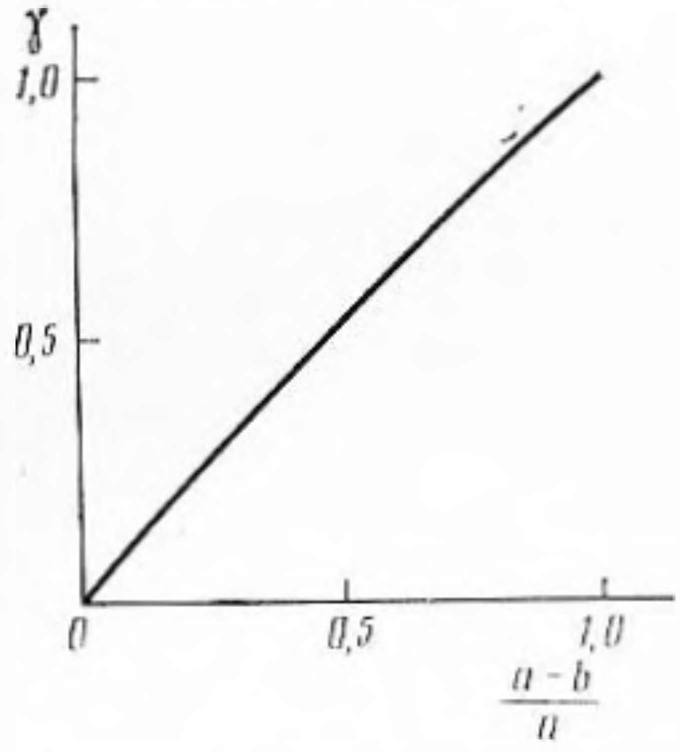
$$\frac{Z}{\rho c S} = \frac{1}{a^2-b^2}\left\{a^2\left[1 - \frac{J_1(2ka)}{ka}\right] - 2ab\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(k\sqrt{a^2-b^2}/2\right)^{2n+2}2^{n+1}}{(n+2)!\,(2n+1)!!} \times \frac{\beta P_{n+1}(\beta) - P_n(\beta)}{\sqrt{\beta^2-1}} + b^2\left[1 - \frac{J_1(2kb)}{kb}\right] + i\left[a^2\frac{H_1(2ka)}{ka} - 2ab\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\Gamma(1/2)\left(k\sqrt{a^2-b^2}/2\right)^{2n+1}}{n!\,\Gamma(n+5/2)}\,\frac{\beta P_{n+1/2}(\beta) - P_{n-1/2}(\beta)}{\sqrt{\beta^2-1}} + b^2\frac{H_1(2kb)}{kb}\right]\right\}, \tag{2}$$

где $P_n(\beta)$, $P_{n+1}(\beta)$ – многочлены Лежандра, $P_{n+1/2}(\beta)$, $P_{n-1/2}(\beta)$ – функции тора или кольца [7], $\beta=(a^2+b^2)/(a^2-b^2)$. В работе [1] выражение для импеданса излучения получено в виде ряда по гипергеометрическим функциям, а в приложении дается представление для активной составляющей импеданса в виде ряда по полиномам Якоби, для реактивной – по присоединенным функциям Лежандра порядка –1 и степени $n+{}^1/_2$. В работе [2] реактивная составляющая импеданса представлена в виде ряда по произведениям функций Бесселя и сферических функций Неймана. Выражение (2) тождественно полученным в [1, 2], но оно представляется предпочтительным, так как использует подробно табулированные функции [8] и оказывается удобным для рассмотрения интересующих нас частных случаев.

Представляет интерес низкочастотное приближение для импеданса излучения. В этом случае, полагая $ka<1$ и ограничиваясь в выражении (2) нулевыми членами разложения в ряд, будем иметь

$$\frac{Z}{\rho cs}=\frac{k^2(a^2-b^2)}{2}+i\frac{4k}{3\pi}\left\{a-b+\frac{a^2+b^2}{a-b}\left[1-E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+(a-b)K\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)\right\},$$

где $K(x)$, $E(x)$ – полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го родов. При $b\to0$ выражение в фигурных скобках стремится к 2 и получаем известное выражение для импеданса излучения диска в экране. При $(a-b)\to0$ (ширина кольца стремится к нулю) мнимая часть безразмерного импеданса излучения переходит в $(k/\pi)(a-b)\ln[4(a+b)/(a-b)]$. На фигуре представлена зависимость γ – отношения мнимой части акустического импеданса кольцевого поршня к аналогичной величине для диска радиуса a от отношения ширины кольца к внешнему радиусу. Можно отметить, что мнимая часть импеданса и соответственно присоединенная масса кольцевого поршня практически пропорциональна его ширине за исключением очень малых значений относительной ширины $(a-b)/a<0{,}01$.



Общее выражение для импеданса излучения кольцевого поршня (2) может быть упрощено для кольцевого поршня малой волновой ширины, т. е. при $k(a-b)<1$ и $(a-b)/a<1$. В этом случае параметр $\beta=(a^2+b^2)/(a^2-b^2)$ велик и многочлены Лежандра приближенно можно представить как $P_n(\beta)\simeq\beta^n(2n-1)!!(n!)$, $P_{n+1}(\beta)\simeq\beta^{n+1}(2n+1)!!\{1-n(n+1)/[2(2n+1)\beta^2]\}/(n+1)!$, а функция тора – как $P_{n+1/2}(\beta)\simeq[(a+b)^{1/2}/(a-b)^{1/2}]n!/[\Gamma(1/2)\Gamma(n+3/2)]$, после него ряды, входящие в (2), суммируются. В результате после громоздких, но несложных преобразований для акустического импеданса излучения получим

$$\frac{Z}{\rho cS}=\frac{k^2(a^2-b^2)}{2}J_0(\delta)+\frac{\pi k^2(a^2-b^2)}{4}[J_1(\delta)H_0(\delta)-J_0(\delta)H_1(\delta)]+$$
$$+i\frac{k(a-b)}{2}\left[\int_0^\delta\frac{H_0(t)\,dt}{t}+\frac{2}{\pi}-H_1(\delta)+\frac{H_0(\delta)}{\delta}\right],$$

где $\delta=k(a+b)$. Значения интеграла, входящего в мнимую часть импеданса, приведены в [8]. На низких частотах $(ka<1)$ будем иметь $Z/(\rho cS)=k^2(a^2-b^2)/2+i4k(a-b)/\pi$. Некоторое отличие мнимой части импеданса от точного выражения, приведенного ранее, обусловлено погрешностью в представлении функций тора для $n=0$. На высоких частотах $(ka>1)$ для импеданса излучения получим $Z/(\rho cS)=k(a-b)/2+i(\pi/4)k(a-b)$. Можно показать, что последнее выражение равно акустическому импедансу полосы в экране. Этот результат представляется естественным, так как при $ka>1$, $k(b-a)<1$ кривизна не влияет на величину импеданса, а акустическое взаимодействие противолежащих участков кольцевого поршня отсутствует. Другой предельный случай широкого кольца $(b\ll a)$ рассмотрен в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Merriweather A. S.* Acoustic radiation impedance of a rigid annular ring vibrating in an infinite rigid baffle // J. Sound and Vibr. 1969. V. 10. № 3. P. 369–379.
2. *Thompson W.* The computation of self- and mutual-radiation impedances for annular and elliptical pistons using Bouwkamp's integral // J. Sound and Vibr. 1971. V. 17. № 2. P. 221–223.

3. *Stepanishen P. R.* Impulse response and radiation impedance of an annular piston // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 56. № 2. P. 305–312.
4. *Урусовский И. А.* О реакции среды для плоских поршней, колеблющихся в плоском жестком экране по произвольному временному закону // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 4. С. 751–760.
5. *Bouwkamp C. J.* Numerical computation of the radiation impedance of a rigid annular ring vibrating in an infinite plane rigid baffle // J. Sound and Vibr. 1971. V. 17. № 4. P. 499–508.
6. *Скучик Е.* Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. С. 432.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973. Т. 1. 1974. Т. 2.
8. Справочник по специальным функциям/Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979.

Поступило в редакцию
2.III.1988