

УДК 534.2—16

ОСОБЕННОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ АНИЗОТРОПНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ БИОЛОГИЧЕСКИХ СРЕД

Барышникова Л.Ф., Рябухин В.В.

Рассмотрено преобразование акустических волн на границе раздела анизотропных вязкоупругих сред с произвольной зависимостью модулей упругости и коэффициентов вязкости от частоты. Для структуры мягкая биологическая ткань — кость найдены коэффициенты отражения, преломления, направления распространения, поглощения волн, обсуждаются некоторые особенности трансформации волн на границе биологических сред.

Преобразование акустических волн на границе мягкая биологическая ткань — газ рассматривалось в работе [1] и для более общего случая на границе раздела двух мягких биологических тканей в работах [2, 3]. По сравнению с мягкими тканями кость по своим акустическим свойствам является более сложной структурой, неоднородность которой определяет анизотропию ее свойств. Согласно экспериментам по рентгеновскому рассеянию [4] костная ткань имеет квазигексагональную симметрию (класс C_6). Характерной особенностью костной ткани является большая величина коэффициента поглощения продольных и поперечных волн, которая может превышать соответствующую величину для продольных волн в мягких тканях более чем на порядок. По данным работы [5] для частоты 3 МГц поглощение продольных волн в печени составляет $0,19-0,5 \text{ см}^{-1}$, в почке $0,28-0,35 \text{ см}^{-1}$, в черепной кости $8-20 \text{ см}^{-1}$. Коэффициент поглощения в кости характеризуется частотной зависимостью и имеет значительный разброс в зависимости от типа ткани и направления распространения [4—6]. В ультразвуковой диагностике и терапии акустические волны распространяются через слой мягких тканей и кости, что приводит к необходимости исследовать трансформацию волн на границе с костной тканью. В соответствии с известными к настоящему времени данными по свойствам биологических тканей в качестве их модели выбрана анизотропная вязкоупругая среда. Некоторые вопросы преобразования акустических волн на границе анизотропных сред без поглощения исследовались в работах [7—10] и для малой величины поглощения на длине волны в работе [11]. В настоящей работе рассмотрен случай падения волны (продольной или поперечной) на границу раздела вязкоупругих сред с анизотропией общего типа при произвольной зависимости модулей упругости и коэффициентов вязкости от частоты (при этом не делается ограничений на величину поглощения) и затем как частный случай более подробно проанализированы особенности преобразования продольных волн для структуры мягкая ткань — кость [12].

Рассмотрим систему из двух анизотропных полупространств с вязкоупругими свойствами. Уравнение движения в каждой из сред запишется в виде

$$\rho^{(n)} \frac{\partial^2 u_i^{(n)}}{\partial t^2} = C_{ijkl}^{(n)} \frac{\partial^2 u_k^{(n)}}{\partial x_j \partial x_l} + \eta_{ijkl}^{(n)} \frac{\partial^3 u_k^{(n)}}{\partial x_j \partial x_l \partial t}, \quad (1)$$

где $n=1, 2$ относятся соответственно к верхней и нижней среде, индексы i, j, k, l принимают значения 1, 2, 3 $u_i^{(n)}$ — компоненты смещений, $\rho^{(n)}$ — плотность, $C_{ijkl}^{(n)}$ — тензор упругих модулей, $\eta_{ijkl}^{(n)}$ — тензор вязкости. Будем считать, что $C_{ijkl}^{(n)}, \eta_{ijkl}^{(n)}$ зависят от частоты ω , что позволяет учесть отклонение связи напряжения и деформации от представления Кельвина — Фойгта и наблюдаемую в эксперименте зависимость фазовой скоро-

сти, коэффициента поглощения от частоты. Введем комплексный вектор рефракции $\mathbf{m}=\mathbf{k}/\omega$, который является обобщением соответствующей величины [10], применяемой для описания распространения волн в анизотропных средах без учета поглощения. Подстановка в уравнения (1) решения в виде $u_i^{(n)}=w_i^{(n)} \exp[i\omega(\mathbf{m}^{(n)}\mathbf{r}-t)]$ приводят к системе уравнений

$$(\lambda_{ijkl}^{(n)*} m_j^{(n)} m_l^{(n)} - \delta_{ik}) w_k^{(n)} = 0, \quad (2)$$

где $\lambda_{ijkl}^{(n)*} = C_{ijkl}^{(n)*} / \rho^{(n)}$, $C_{ijkl}^{(n)*} = C_{ijkl}^{(n)} - i\omega\eta_{ijkl}^{(n)}$, δ_{ik} — символ Кронекера. Из условия равенства нулю определителя системы находятся компоненты вектора рефракции и из уравнений (2) комплексные компоненты смещений. Условия на границе раздела записываются в форме

$$u_i^{(1)P} + \sum_{M=L,S,T} u_i^{(1)M} = \sum_{M=L,S,T} u_i^{(2)M}, \quad \sigma_{ik}^{(1)P} q_k + \sum_{M=L,S,T} \sigma_{ik}^{(1)M} q_k = \sum_{M=L,S,T} \sigma_{ik}^{(2)M} q_k, \quad (3)$$

где $\sigma_{ik}^{(n)} = C_{ihlm}^{(n)*} u_{lm}^{(n)}$ — тензор напряжений, $u_{lm}^{(n)}$ — тензор деформаций, q_k — компонента нормали к границе раздела, индекс P относится к падающей волне, которая может быть как продольной, так и поперечной $M=L, S, T$ — соответственно для продольной, быстрой и медленной поперечной волн в верхней ($n=1$) и нижней ($n=2$) средах. Применим соотношения (2), (3) для расчета трансформации падающей однородной продольной волны на границе мягкой биологической ткани с костью. Предполагаем, что размер неоднородностей в биологических тканях значительно меньше длины волны. Выберем систему декартовых координат так, чтобы ось X_3 была перпендикулярна к плоской границе раздела, а оси X_1, X_2 лежали в этой плоскости. Считаем, что плоскость $X_1O X_3$ является плоскостью падения волны, а кристаллографические оси совпадают с осями декартовой системы координат. Для мягких биологических тканей пока нет надежных данных, свидетельствующих об их анизотропии, поэтому считаем их свойства изотропными. Тогда для мягкой ткани ($n=1$) для определения компонент векторов рефракции и смещений справедливы выражения (2), (3) при условии, что для изотропных сред выполняются соотношения

$$C_{12}^{(1)*} = C_{13}^{(1)*} = \lambda^*, \quad C_{33}^{(1)*} = C_{11}^{(1)*} = E^* = E' + iE'' = \lambda^* + 2\mu^*, \quad C_{44}^{(1)*} = (C_{11}^{(1)*} - C_{12}^{(1)*})/2 = \mu^*,$$

где λ^*, μ^* — комплексные постоянные Ламе (переход к двухиндексному обозначению для модулей упругости осуществлен по известным правилам

[10]). Условия на границе раздела приводят к равенству $m_1^{(1)P} = m_1^{(1)M} = m_1^{(2)M} = l$. Вектор рефракции падающей волны считаем заданным, неизвестные компоненты векторов рефракции и смещений волн находятся из системы (2).

$$(m_3^{(n)M})^2 = a \pm \sqrt{a^2 - b}, \quad (m_3^{(n)T})^2 = (1 - \lambda_{66}^{(n)*} l^2) / \lambda_{44}^{(n)*}, \quad (4)$$

$$w_1^{(n)M} = C^{(n)M} w^{(n)M}, \quad w_3^{(n)M} = d^{(n)M} w^{(n)M} \quad (M=L, S),$$

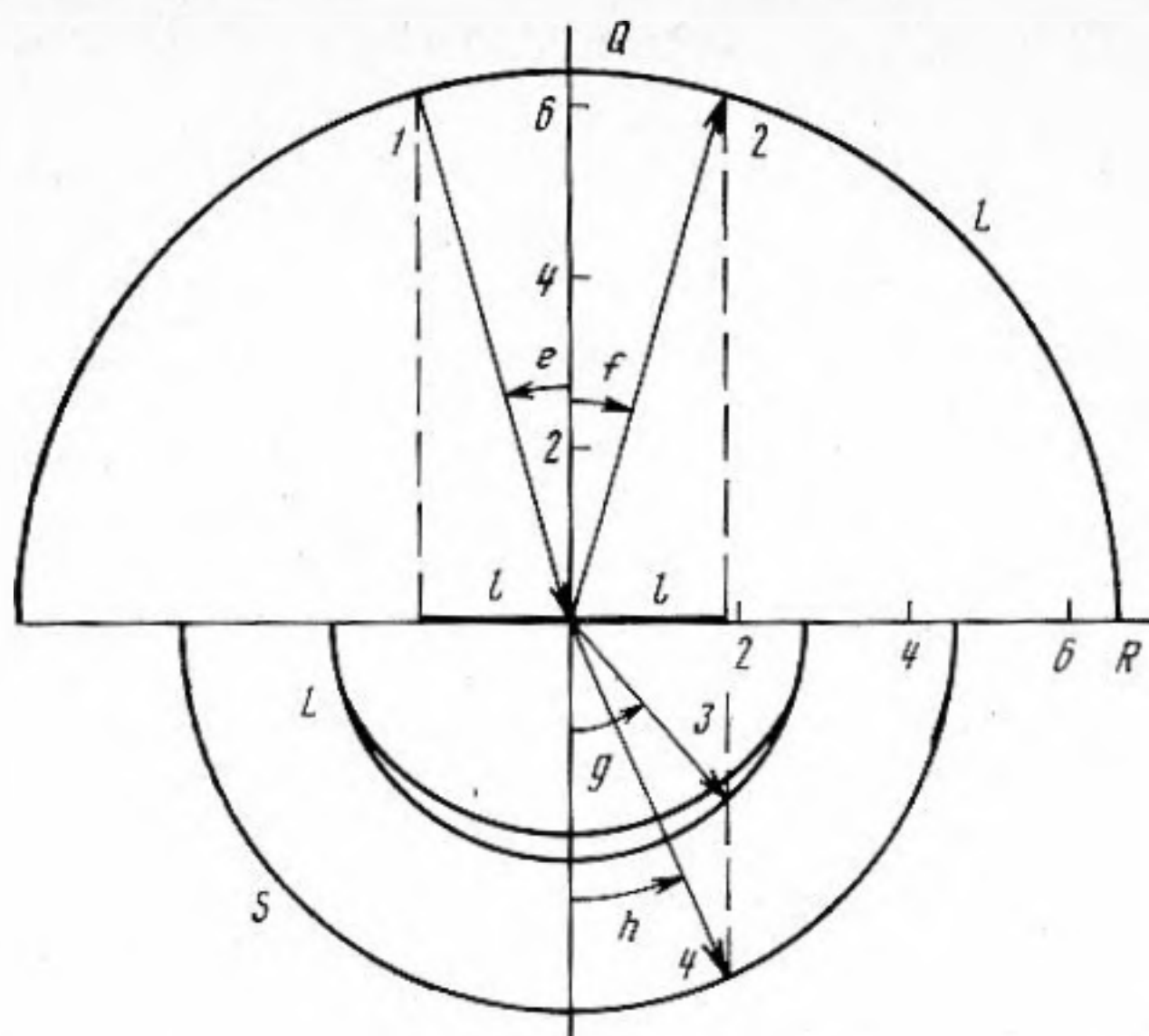
где

$$a = [(1 - \lambda_{11}^{(n)*} l^2) \lambda_{33}^{(n)*} + (1 - \lambda_{44}^{(n)*} l^2) \lambda_{44}^{(n)*} + (\lambda_{13}^{(n)*} + \lambda_{44}^{(n)*})^2 l^2] / (2\lambda_{33}^{(n)*} \lambda_{44}^{(n)*}),$$

$$b = (\lambda_{11}^{(n)*} l^2 - 1) (\lambda_{44}^{(n)*} l^2 - 1) / (\lambda_{33}^{(n)*} \lambda_{44}^{(n)*}), \quad c^{(n)M} = 1 / \sqrt{1 + (r^{(n)M})^2},$$

$$d^{(n)M} = r^{(n)M} / \sqrt{1 + (r^{(n)M})^2},$$

$$r^{(n)M} = (\lambda_{13}^{(n)*} + \lambda_{44}^{(n)*}) l m_3^{(n)M} / [1 - \lambda_{44}^{(n)*} l^2 - \lambda_{33}^{(n)*} (m_3^{(n)M})^2].$$



Графический способ определения углов отражения и преломления при падении продольной волны в плоскости $X_1O X_3$ на границу раздела мягкая биологическая ткань — кость: 1, 2, 3, 4 — соответственно $m^{(1)P}$, $m^{(1)L}$, $m^{(2)L}$, $m^{(2)S}$; e, f, g, h — углы θ , $\chi_1^{(1)L}$, $\chi_1^{(2)L}$, $\chi_1^{(2)S}$; $R = m_1^{(n)M} \times 10^{-6} \text{ см}^{-1} \cdot \text{с}$,

$$Q = m_3^{(n)M} \times 10^{-6} \text{ см}^{-1} \cdot \text{с}$$

Для $m_3^{(n)M}$ выбирается знак + и — соответственно для распространения волн в сторону положительных или отрицательных направлений X_3 . Опущенная временной множитель, компоненты смещений падающей $u_i^{(1)P}$, отраженных $u_i^{(1)M}$ и преломленных $u_i^{(2)M}$ волн в плоскости $X_1O X_3$, представим в виде

$$u_i^{(1)P} = w_i^{(1)P} \exp[i\omega (lx_1 - m_3^{(1)P} x_3)],$$

$$u_i^{(n)M} = w_i^{(n)M} \exp[i\omega (lx_1 + (-1)^{n+1} m_3^{(n)M} x_3)],$$

где действительные $m_1^{(n)M}$, $m_3^{(n)M}$ и мнимые $m_1^{(n)M}$, $m_3^{(n)M}$ части компонент вектора рефракции равны

$$m_1^{(n)M} = \sin \chi_1^{(n)M} / v^{(n)M}, \quad m_3^{(n)M} = \cos \chi_1^{(n)M} / v^{(n)M},$$

$$m_1^{(n)M} = D^{(n)M} \sin \chi_2^{(n)M} / \omega, \quad m_3^{(n)M} = D^{(n)M} \cos \chi_2^{(n)M} / \omega.$$

Направления изменения фаз и амплитуд находятся из соотношений

$$\sin \chi_1^{(n)M} = m_1^{(n)M} / \sqrt{(m_1^{(n)M})^2 + (m_3^{(n)M})^2},$$

$$\sin \chi_2^{(n)M} = m_1^{(n)M} / \sqrt{(m_1^{(n)M})^2 + (m_3^{(n)M})^2}.$$

Углы $\chi_1^{(n)M}$, $\chi_2^{(n)M}$ в общем случае не равны, поэтому отраженные и преломленные волны, как и для изотропных вязкоупругих сред [13], являются неоднородными (кроме отраженной продольной волны). С учетом анизотропии и поглощения углы отражения и преломления более сложным образом зависят от угла падения. При предельном переходе к изотропным непоглощающим средам выражение для $\sin \chi_1^{(n)M}$ переходит в закон Снеллиуса. Из приведенных выражений следует, что условием существования волны с волновым вектором вдоль границы раздела является $m_3^{(2)M} = 0$. Фазовые скорости и коэффициенты поглощения определяются

$$\text{выражениями } v^{(n)M} = 1 / \sqrt{(m_1^{(n)M})^2 + (m_3^{(n)M})^2}, \quad D^{(n)M} = \omega \sqrt{(m_1^{(n)M})^2 + (m_3^{(n)M})^2},$$

из которых вытекает их зависимость от угла падения волны, частоты, анизотропии упругих и вязких свойств материалов. Как и для анизотропных непоглощающих сред для определения углов отражения и преломления удобен графический способ, основанный на построении поверхностей рефракции [7, 10]. Для мягкой биологической ткани выбирались характерные значения параметров [14] $\mu' = 0,242 \cdot 10^7$ дин·см⁻², $\mu''/\omega = 0,141$ дин·с·см⁻², $\rho^{(1)} = 1,08$ г·см⁻³, $E' = 2,5 \cdot 10^{10}$ дин·см⁻², $E' \gg E''$, μ' , μ'' , где μ' , μ'' , E' , E'' — действительные и мнимые значения соответствующих коэффициентов. Для среды с индексом $n=2$ кривые строились на основании упругих коэффициентов, измеренных на частоте 5 МГц для кости с учетом поглощения [4]. Для этих значений параметров в плоскости $X_1O X_3$ компоненты векторов рефракции для продольной волны в кости отличаются друг от друга примерно на 18%. На рисунке представлены сечения поверхностей рефракции при падении продольной волны на границу мягкая ткань — кость и графический способ определения $\chi_1^{(n)M}$ при заданной компоненте вектора рефракции l . Поверхность рефракции для поперечных волн в верхней среде представляет собой сферу большого радиуса и на фигуре не показана. Угол отражения поперечных волн в мягкой ткани $\chi_1^{(1)S}$ очень мал и для приведенных значений параметров его максимальное значение при $\theta = 90^\circ$ равно $\sim 57'$. Так как в заданном приближении для падающей продольной волны $m_1^{(1)P} \simeq 0$ (что выполняется для большинства мягких биологических тканей), то углы, определяющие направления поглощения волн $\chi_2^{(n)M} \simeq 0$ для обеих сред и всех типов волны, кроме падающей и отраженной продольной волны. При этом для волны с направлением волнового вектора вдоль границы раздела направление изменения амплитуды почти перпендикулярно волновому вектору. В общем случае при учете поглощения этот угол отличен от 90° . Заметим, что подобно поверхностям рефракции можно ввести поверхности, построенные на основании формул для $D^{(n)M}$, которые позволяют графическим путем просто определить направления поглощения волн.

Исходя из соотношений (3) и (4) выражения для коэффициентов отражения V_L , V_S и преломления W_L , W_S по смещению в плоскости $X_1O X_3$ находятся по правилу Крамера и имеют вид

$$\begin{aligned} V_L &= w^{(1)L}/w^{(1)P} = \Delta_1/\Delta, & V_S &= w^{(1)S}/w^{(1)P} = \Delta_2/\Delta, \\ W_L &= w^{(2)L}/w^{(1)P} = \Delta_3/\Delta, & W_S &= w^{(2)S}/w^{(1)P} = \Delta_4/\Delta, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{где } \Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix}, \quad A_1 = c^{(1)L}, \quad A_2 = c^{(1)S}, \quad A_3 = -c^{(2)L}, \quad A_4 = -c^{(2)S},$$

$$B_1 = d^{(1)L}, \quad B_2 = d^{(1)S}, \quad B_3 = -d^{(2)L}, \quad B_4 = -d^{(2)S},$$

$$C_1 = C_{44}^{(1)*} (c^{(1)L} m_3^{(1)L} + d^{(1)L} l), \quad C_2 = C_{44}^{(1)*} (c_1^{(1)S} m_3^{(1)S} + d^{(1)S} l),$$

$$C_3 = C_{44}^{(2)*} (c^{(2)L} m_3^{(2)L} - d^{(2)L} l), \quad C_4 = C_{44}^{(2)*} (c^{(2)S} m_3^{(2)S} - d^{(2)S} l),$$

$$D_1 = C_{13}^{(1)*} c^{(1)L} l + C_{33}^{(1)*} d^{(1)L} m_3^{(1)L},$$

$$D_2 = C_{13}^{(1)*} c^{(1)S} l + C_{33}^{(1)*} d^{(1)S} m_3^{(1)S}, \quad D_3 = -C_{13}^{(2)*} c^{(2)L} l + C_{33}^{(2)*} d^{(2)L} m_3^{(2)L},$$

$$D_4 = -C_{13}^{(2)*} c^{(2)S} l + C_{33}^{(2)*} d^{(2)S} m_3^{(2)S}, \quad A = -\sin \theta, \quad B = \cos \theta,$$

$$C = C_{44}^{(1)*} (m_3^{(1)P} \sin \theta + l \cos \theta),$$

$$D = -C_{13}^{(1)*} l \sin \theta - C_{33}^{(1)*} m_3^{(1)P} \cos \theta.$$

Выражения для Δ_n ($n=1, 2, 3, 4$) получаются из Δ заменой элементов n столбца соответственно на элементы A, B, C, D . При соответствующих преобразованиях соотношения (5) сводятся к выражениям, приведенным в работе [3] для границы раздела двух мягких биологических тканей. В предельном случае для изотропных сред без поглощения соотношения (5) совпадают с выражениями в работе [11].

Исходя из выражений (4) компоненты смещений можно представить в виде $u_1^{(n)M} = f_1^{(n)M} \exp(i\Phi^{(n)M})$, $u_3^{(n)M} = f_3^{(n)M} \exp i(\Phi^{(n)M} - \varphi^{(n)M})$, $f_3^{(n)M} = f_1^{(n)M} r_0^{(n)M}$, $r_0^{(n)M} = |r^{(n)M}|$, $\varphi = -\text{Arg}(r^{(n)M})$, где $f_1^{(n)M}$, $f_3^{(n)M}$, $\Phi^{(n)M}$, $(\Phi^{(n)M} - \varphi^{(n)M})$ — модули и аргументы комплексных $u_1^{(n)M}$, $u_3^{(n)M}$. Действительные части компонент смещений $\text{Re } u_1^{(n)M} = f_1^{(n)M} \cos \varphi^{(n)M}$, $\text{Re } u_3^{(n)M} = f_3^{(n)M} \cos(\Phi^{(n)M} - \varphi^{(n)M})$ удовлетворяют уравнению эллипса $(\text{Re } u_1^{(n)M})^2 / (f_1^{(n)M})^2 + (\text{Re } u_3^{(n)M})^2 / (f_3^{(n)M})^2 - 2(\text{Re } u_1^{(n)M})(\text{Re } u_3^{(n)M}) \cos \varphi^{(n)M} / (f_1^{(n)M} f_3^{(n)M}) = \sin^2 \varphi^{(n)M}$. Форма и ориентация эллипса относительно осей зависят от $\varphi^{(n)M}$, $f_1^{(n)M}$, $f_3^{(n)M}$. Учет поглощения приводит в общем случае к эллиптической поляризации отраженных и преломленных волн. В пределе, когда поглощением можно пренебречь, волны становятся плоскополяризованными за исключением распространения волны вдоль поверхности раздела. В связи с изложенным волны следует называть квазипродольными и квазипоперечными как вследствие известных свойств анизотропных сред, так и в силу рассмотренных особенностей поляризации, связанных с поглощением. Таким образом учет поглощения в анизотропных средах с произвольной зависимостью модулей упругости и коэффициентов вязкости от частоты, являющихся моделью биологических тканей, приводит к таким особенностям как образование волн сложной поляризации, зависимости скорости распространения, коэффициента поглощения, коэффициентов отражения и преломления от частоты, угла падения, анизотропии упругих и вязких свойств материалов, что необходимо учитывать в экспериментальных исследованиях.

С преобразованием акустических волн на границе тесно связан вопрос о тепловыделении в биологических средах за счет поглощения волн в среде. Наблюдаемое в эксперименте чрезмерное повышение температуры при гипертермии опухолей внутренних органов или при прохождении ультразвука через черепную кость представляет собой опасность для живого организма. Вклад различных волн в изменение температуры за счет погло-

щения энергии волн определяется значениями коэффициентов отражения и преломления. Вариация таких параметров как частота, угол падения волны, определяющих выражения (5), дает возможность выбирать оптимальный режим работы и избежать нежелательного перегрева тканей. При воздействии модулированного сигнала, проходящего через слои биологических тканей, на органы слуха одним из возможных механизмов демодуляции является радиационное давление, возникающее на поверхности раздела сред. Выражения (5) позволяют оценить радиационное давление на поверхности раздела тканей при произвольном угле падения волны. При этом следует учитывать, что частотная зависимость коэффициентов отражения и преломления, фазовых скоростей и поглощения приводит к искажению модулированных сигналов, применяемых в диагностике слуха.

Из вышесказанного следует, что рассмотренные особенности трансформации акустических волн на границе биологических тканей необходимы для оценки радиационного давления, дисперсионных, тепловых эффектов в задачах ультразвуковой диагностики органов слуха, терапии опухолей и в ряде других приложений в области медицинской акустики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Filipczynsky L.* Absorption of longitudinal and shear waves and generation of heat in soft tissues // *Ultrasound Med. Biol.* 1986. V. 12. № 3. P. 223–228.
2. *Барышникова Л. Ф.* Сдвиговые волны на границе раздела биологических сред: Матер. симпоз. Акустические свойства биологических объектов. Пущино: Изд-во Научного центра биологических исследований АН СССР, 1984. С. 65.
3. *Барышникова Л. Ф.* Преобразование акустических волн на границе раздела биологических сред // *Акуст. журн.* 1986. Т. 32. № 2. С. 241–244.
4. *Joon H. S., Katz J. L.* Ultrasonic properties and microtexture of human cortical bone // *Ultrasonic tissue characterization*, Washington: National Bureau of Standards, 1979. P. 189–196.
5. *O'Brien W. D.* The relationship between collagen and ultrasonic attenuation and velocity in tissue // *Inter. Ultrasonic conference*, Brighton, 1977. P. 194–205.
6. *Goss S. A., Johnston R. L., Dunn F.* Comprehensive compilation of empirical ultrasonic properties of mammalian tissues // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1978. V. 64. № 2. P. 423–457.
7. *Musgrave M. J. P.* Crystal acoustics. Holden-day, San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam, 1970.
8. *Tang L., Ting T. C. T.* Transient waves in a layered anisotropic elastic medium // *Proc. R. Soc. London.* 1985. V. 391. P. 67–85.
9. *Henneke E. G.* Reflection-refraction of a stress wave at a plane boundary between anisotropic media // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1972. V. 51. № 1. P. 210–217.
10. *Федоров Ф. И.* Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.
11. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
12. *Барышникова Л. Ф., Рябухин В. В.* Особенности распространения акустических волн в неоднородных биологических тканях // Матер. Всесоюз. совещания. Новые УЗ методы и приборы для применения в медицине и биологии. В. Устюг. М.: АКИН, 1986. С. 30.
13. *Cooper H. F.* Reflection and transmission of oblique plane waves at a plane interface between viscoelastic media // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1967. V. 42. № 5. P. 1064–1069.
14. *Madsen E. L., Zathoff H. J., Lagrebski A.* Ultrasonic shear wave properties of soft tissues and tissue-like materials // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1983. V. 74. № 5. P. 1346–1355.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4.III.1988