

УДК 534.222

**ДЛИННОВОЛНОВЫЕ КОМПОНЕНТЫ СПЕКТРА НОРМАЛЬНЫХ  
НАПРЯЖЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТИНЫ  
В ВЯЗКОМ ПОТОКЕ***Смоляков А. В.*

Рассматривается возможность акустического излучения при взаимодействии вихревых волн с жесткой плоской безграничной поверхностью. Определено влияние вязкости на частотно-волновой спектр длинноволновых нормальных напряжений на поверхности пластины и найдено соотношение между спектрами касательных и нормальных напряжений при малых волновых числах.

С помощью акустической аналогии Лайтхилла для аэродинамического излучения Керл [1] представил звуковое поле пограничного слоя на жесткой поверхности как суперпозицию полей от объемных квадрупольных и поверхностных дипольных аэродинамических источников. Дипольные источники были определены через нормальные и вязкие касательные напряжения на обтекаемой поверхности. Однако позже Пауэлл [2] показал, что в случае безграничной жесткой пластины нормальные напряжения не являются самостоятельными дипольными излучателями, а представляют собой лишь результат отражения от поверхности акустических волн, излученных объемными квадрупольными источниками. Что же касается роли вязких касательных напряжений в процессе генерации аэродинамического звука, то она разными исследователями оценивается весьма различно.

Так, например, в работах [3–5] считается, что излучение от касательных вязких напряжений пренебрежимо мало по сравнению с излучением от объемных источников, так как для больших чисел Рейнольдса, представляющих практический интерес, вязкость почти не влияет на характер турбулентного движения. В работе [6] сделано еще более категоричное заключение о том, что флуктуации вязких касательных напряжений вообще не излучают звука и роль вязкости сводится просто к некоторому поглощению звуковых волн, порожденных объемными квадрупольными источниками. В других работах [7–11], напротив, предполагается, что вклад в излучение от вязких поверхностных напряжений существенно преобладает над вкладом от объемных источников, интенсивность которых при дозвуковых скоростях потока невелика [12]. (Утверждение о слабости квадрупольного излучения при малых числах Маха остается верным, несмотря на то, что оценка [12] занижена (примерно на 6 дБ) из-за неучета близости аэродинамических источников к поверхности, на что справедливо указал Блейк [13].) Доминирующая роль вязких напряжений в [7–11] аргументируется тем, что при малых числах Маха дипольное излучение более эффективно, чем квадрупольное. Среди работ этой группы особый интерес представляют [9, 10] и их развитие [11], в которых рассматривается специфический механизм сильного дипольного излучения от вязких напряжений в пограничном слое. Основная идея [9–11] состоит в том, что на жесткой поверхности происходит трансформация энергии соленоидального вихревого поля (волн сдвига) в энергию потенциального поля (волн сжатия). Происходит это в непосредственной близости от обтекаемой поверхности, где скорости малы и поэтому механизм трансформации описывается линейными соотношениями. Ввиду важности выводов [9–11] рассмотрим указанный механизм несколько подробнее.

Разделяя скорость  $\mathbf{u}$  на сумму потенциальной  $\mathbf{u}_p$  и соленоидальной  $\mathbf{u}_s$ , составляющих ( $\text{rot } \mathbf{u}_p = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{u}_s = 0$ ) и рассматривая гармонические во времени колебания, запишем в линейном приближении уравнения движения, сплошности и адиабатического состояния вязкой сжимаемой среды:

$$j\omega(\mathbf{u}_s + \mathbf{u}_p) = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_s + \frac{4}{3} \nu \nabla^2 \mathbf{u}_p, \quad (1)$$

$$j\omega\rho + \rho_0 \text{div } \mathbf{u}_p = 0, \quad (2)$$

$$p - p_0 = c_0^2 (\rho - \rho_0). \quad (3)$$

Здесь  $\rho_0$ ,  $\rho$  и  $p_0$ ,  $p$  — плотность и давление невозмущенной и возмущенной среды соответственно,  $c_0$  — скорость звука,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\omega$  — круговая частота,  $\nabla^2$  — оператор Лапласа,  $j = \sqrt{-1}$  и всюду опущен множитель  $\exp(j\omega t)$ , где  $t$  — время.

Уравнению (1) с помощью (2), (3) и векторного тождества  $\nabla^2 \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \text{rot rot } \mathbf{a}$  можно придать вид

$$-j\omega(\mathbf{u}_s + \mathbf{u}_p) = \nu \text{rot } \boldsymbol{\Omega} - (c_0^2/j\omega + 4\nu/3) \text{grad } D, \quad (4)$$

где вихрь и расходимость поля скорости обозначены следующим образом:  $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{u}_s$ ,  $\text{div } \mathbf{u}_p = D$ .

Даже для очень высоких частот имеет место сильное неравенство  $\omega\nu/c_0^2 \ll 1$ , и поэтому вторым членом в круглых скобках правой части (4) можно пренебречь по сравнению с первым. Так, для частоты 100 кГц второй член меньше первого по модулю примерно в девять тысяч раз в воздухе и в два миллиона раз в воде. Учитывая это обстоятельство и обозначая  $\mu^2 = j\omega/\nu$ ,  $k^2 = (\omega/c_0)^2$ , придадим (4) форму

$$\mathbf{u}_s + \mathbf{u}_p = -\left(\frac{1}{\mu^2} \text{rot } \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{k^2} \text{grad } D\right). \quad (5)$$

При течении вязкой жидкости около твердого тела на его поверхности для уравнения (5) должно выполняться граничное условие  $\mathbf{u}_s + \mathbf{u}_p = 0$ .

Вихрь и расходимость поля скорости определяются решениями уравнений соответственно теплопроводности и Гельмгольца

$$\nabla^2 \boldsymbol{\Omega} = \mu^2 \boldsymbol{\Omega}, \quad \nabla^2 D + k^2 D = 0, \quad (6)$$

которые получаются из (5) в результате последовательного применения операций ротора и дивергенции.

Если исходным процессом, т. е. первопричиной движения жидкости является вихревое течение, то необходимо найти его характеристики из уравнения теплопроводности, затем сумму соленоидальной и потенциальной скоростей подчинить граничным условиям, что в соответствии с [9, 10] дает ключ к отысканию параметров вторичного процесса — волн сжатия (разрежения), удовлетворяющих уравнению Гельмгольца. Если же первичным процессом являются потенциальные волны сжатия — разрежения, то необходимо начать с решения уравнения Гельмгольца, а затем с помощью граничных условий и уравнений теплопроводности определить параметры вторичного процесса — вихревого движения.

Классическое решение первого из уравнений (6) в двумерном случае [9, 10] для падающих на пластину и отраженных от нее вихревых волн имеет форму:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_0 \exp(-\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \boldsymbol{\Omega}_{00} \exp(-\mu_1 x_1 - \mu_2 x_2), \quad (7)$$

где  $\boldsymbol{\Omega}_0$ ,  $\boldsymbol{\Omega}_{00}$  — не зависящие от координат амплитуды падающей и отраженной вихревых волн соответственно;  $\mu_1 = \sqrt{j\omega/\nu} \sin \vartheta$ ,  $\mu_2 = \sqrt{j\omega/\nu} \cos \vartheta$ , так что  $\mu_1^2 + \mu_2^2 = \mu^2 = j\omega/\nu$ ;  $\vartheta$  — угол между направлением падения (отражения) вихревой волны и нормалью к пластине, при этом нормаль совпадает с осью  $x_2$ , а ось  $x_1$  лежит в плоскости пластины.

Подстановка (7) в (5) для граничных условий  $u_{ei} + u_{pi} = 0$  ( $i=1, 2$ ) при  $x_2=0$  дает

$$\begin{aligned} (\partial D / \partial x_1)_{x_2=0} &= -(k^2 \mu_2 / \mu^2) (\Omega_0 - \Omega_{00}) \exp(-\mu_1 x_1), \\ (\partial D / \partial x_2)_{x_2=0} &= -(k^2 \mu_1 / \mu^2) (\Omega_0 + \Omega_{00}) \exp(-\mu_1 x_1). \end{aligned} \quad (8)$$

Представим

$$D = D_0 \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2), \quad (9)$$

где  $D_0$  — амплитуда. Тогда из уравнения Гельмгольца (6) следует, что

$$\varphi_1'' \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2'' + k^2 \varphi_1 \varphi_2 = 0, \quad (10)$$

где штрихи означают производные по тем координатам, от которых зависят  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . С помощью (8), (9), (10) теперь нетрудно определить, что

$$D = 2\Omega_0 \frac{k^2}{\mu^2} \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1^2 + \gamma_0 \mu_2} \exp(-\mu_1 x_1 - \gamma_0 x_2), \quad (11)$$

где волновые числа  $\mu_1$  и  $\gamma_0$  в экспоненциальном сомножителе являются комплексными величинами  $\mu_1 = \sqrt{\omega/2\nu} (1+j) \sin \vartheta = \chi + j\chi$ ;  $\gamma_0 = j\sqrt{k^2 + \mu_1^2} = \alpha_0 +$

$$+j\beta_0, \quad \alpha_0, \beta_0 = \frac{\omega}{c_0 \sqrt{2}} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{c_0^2}{\omega \nu} \sin^2 \vartheta \right)^2} \mp 1 \right]^{1/2} \quad \text{и в последнем выражении}$$

знак  $(-)$  относится к  $\alpha_0$ , а  $(+)$  к  $\beta_0$ . Следовательно,  $D \sim \exp(-\chi x_1 - \alpha_0 x_2) \exp[-j(\chi x_1 + \beta_0 x_2)]$  и незатухающие дивергентные волны будут иметь место только при  $\chi = \alpha_0 = 0$ . Но это означает, что и  $\mu_1 = 0$  и из (11) следует, что  $D = 0$ , т. е. волны сжатия — разрежения отсутствуют.

Полученное решение при  $\mu_1 = \sqrt{j\omega/\nu} \sin \vartheta$  соответствует неоднородным (затухающим по  $x_1$ ) вихревым волнам. Уравнения (6) допускают также решение и для однородной по  $x_1$  завихренности, имеющей звуковую и сверхзвуковую фазовые скорости распространения вдоль пластины. Для такой завихренности нужно положить  $\mu_1 = j(\omega/c_0) \sin \theta$  и тогда  $\mu_2 = -\sqrt{\mu^2 - \mu_1^2} \simeq \sqrt{\omega/2\nu} (1+j)$  и  $\gamma_0 = j(\omega/c_0) \cos \theta$ , где  $\theta = \arcsin[(c_0/\sqrt{2\omega\nu}) \sin \vartheta]$  — угол излучения акустических волн, которые в этом случае возникнут в полном соответствии с концепцией [9–11]. В самом деле, подстановка указанных значений  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\gamma_0$  в (11) приводит к выражению для незатухающих дивергентных волн, уходящих от пластины в окружающее пространство:

$$D = -\Omega_0 \frac{2\omega\nu}{c_0^2} \frac{k_1 \alpha [k_1^2 + j(k_1^2 + 2k_2 \alpha)]}{k_1^4 + 2k_1^2 k_2 \alpha + 2k_2^2 \alpha^2} e^{-j(k_1 x_1 + k_2 x_2)}. \quad (11a)$$

Здесь обозначено:  $k_1 = (\omega/c_0) \sin \theta$ ,  $k_2 = (\omega/c_0) \cos \theta$  — проекции волнового вектора акустических волн на оси  $x_1$  и  $x_2$  соответственно (рис. 1),  $\alpha = \sqrt{\omega/2\nu}$  — характерное волновое число завихренности.

Применительно к турбулентному пограничному слою для возникновения излучения (11a) необходимо, чтобы частотно-волновой спектр завихренности потока содержал на частоте  $\omega$  компоненты с продольными масштабами, не меньшими, чем длина звуковой волны. Однако спектр завихренности мелкомасштабен: для однородных соленоидальных полей он пропорционален спектру вязкой диссипации кинетической энергии турбулентности. При больших числах Рейнольдса и малых числах Маха диссипативные масштабы на несколько порядков меньше длин акустических волн. С другой стороны, акустические эффекты в турбулентном потоке — лишь очень малая добавка к основному гидродинамическому движению и, по-видимому, пока нельзя совершенно исключить возможность существования в спектре завихренности пусть относительно слабых, но чрезвычайно крупномасштабных компонент. Мы еще вернемся к следствиям (11a), а пока продолжим анализ других решений уравнений (6).

Если исходным процессом является не вихревое, а потенциальное течение, то решение однородного уравнения Гельмгольца (6) для падаю-

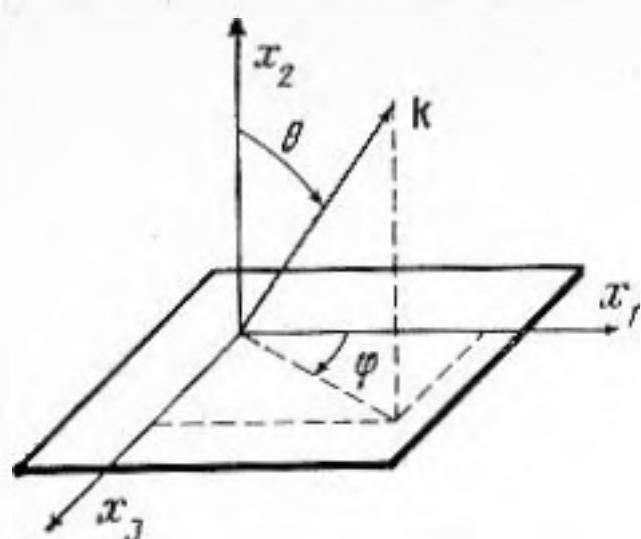


Рис. 1

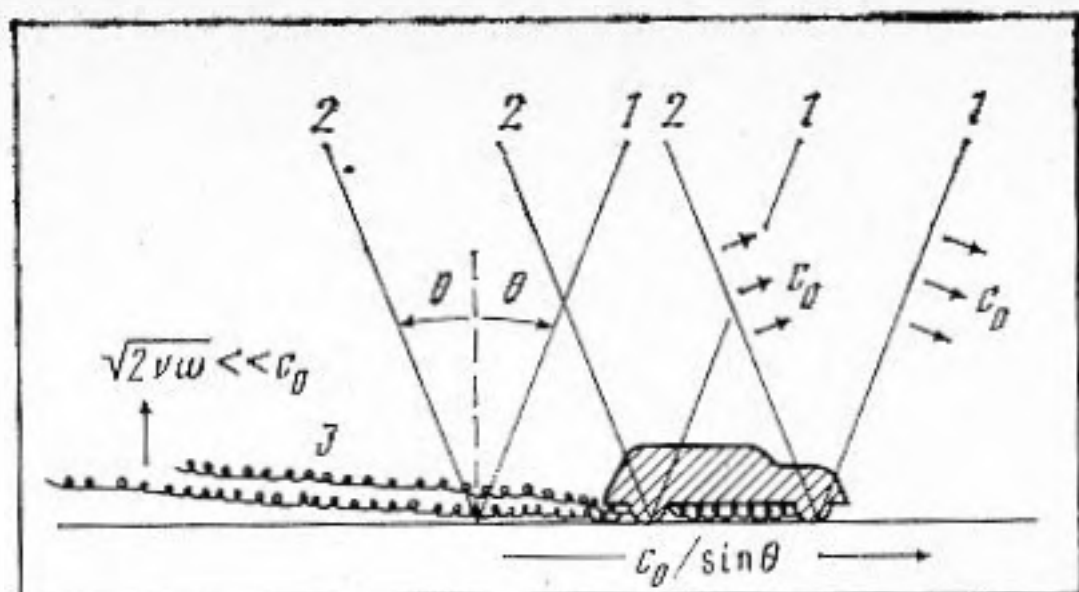


Рис. 2

Рис. 1. Геометрия задачи

Рис. 2. Схема образования вихревых волн. 1 — падающие потенциальные волны, 2 — отраженные потенциальные волны, 3 — диффундирующие от стенки в поток вихревые волны.

щих на стенку и отраженных от нее волн дивергенции потенциального поля скорости имеет вид

$$D = D_0 \exp[-j(k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_3 x_3)] + D_{00} e^{-j\psi} \exp[-j(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)], \quad (12)$$

где для трехмерного случая проекции волнового вектора  $\mathbf{k}$  запишутся так:  $k_1 = (\omega/c_0) \sin \theta \cos \varphi$ ,  $k_2 = (\omega/c_0) \cos \theta$ ,  $k_3 = (\omega/c_0) \sin \theta \sin \varphi$  (рис. 1) и  $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2 = (\omega/c_0)^2$ ;  $D_0$ ,  $D_{00}$  — вещественные амплитуды падающей и отраженной волн;  $\psi$  — угол поворота фазы волны дивергенции при ее отражении от границы.

Использование (12), граничных условий и уравнения теплопроводности (6) приводит к выражению для проекций вихря на координатные оси  $x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ):

$$\Omega_i = \Omega_{0i} \exp[-j(k_1 x_1 + k_3 x_3) - \gamma x_2], \quad (13)$$

в котором

$$\gamma = \sqrt{\mu^2 + (k_1^2 + k_3^2)} = \alpha + j\beta, \quad (14)$$

$$\alpha, \beta = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\omega\nu}{c_0^2} \sin^2 \theta\right)^2} \pm \frac{\omega\nu}{c_0^2} \sin^2 \theta \right]^{1/2} \approx \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}, \quad (15)$$

где знак (+) относится к  $\alpha$ , а (-) к  $\beta$ , и указанное справа приближение основано на неравенстве  $\omega\nu/c_0^2 \ll 1$ . Выражению (13) с помощью (14) и (15) можно придать форму

$$\Omega_i = \Omega_{0i} \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} x_2\right) \exp\left[-j\left(k_1 x_1 + k_3 x_3 + \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} x_2\right)\right], \quad (16)$$

описывающую вихревые волны, распространяющиеся вдоль пластины со звуковой или сверхзвуковой скоростью  $\omega/\sqrt{k_1^2 + k_3^2} = c_0/\sin \theta$  и медленно (со скоростью  $\omega/\alpha \approx \sqrt{2\nu\omega} \ll c_0$ ) диффундирующих в поток. Это явление впервые было рассмотрено Кирхгофом и Рэлеем [14], а затем Константиновым [15] и некоторыми другими авторами. Вихревые волны генерируются на стенке падающими на нее акустическими волнами, которые стремятся осуществить проскальзывание жидких частиц вдоль границы, чему препятствует вязкость реальной жидкости. В общих чертах картина напоминает образование и медленную диффузию шлейфов пыли, поднятой с дороги колесами быстро идущего автомобиля (рис. 2).

Поскольку  $\text{div } \Omega = 0$  по определению  $\Omega = \text{rot } \mathbf{u}_s$ , то это условие вместе с уравнением (5) для  $x_2 = 0$  позволяет утверждать, что  $\Omega_2 = 0$ , т. е. отсутствует вращение частиц в плоскостях, параллельных пластине, и что две другие ненулевые проекции вектора  $\Omega$  связаны соотношением  $k_1 \Omega_1 +$

$+k_3\Omega_3=0$ . В результате уравнения (5) на границе  $x_2=0$  сводятся к системе двух уравнений

$$\mu^2 k_1 (1 + \Phi e^{-j\psi}) = j\gamma k^2 (\Omega_{03}/D_0), \quad (17)$$

$$\mu^2 k_1 k_2 (1 - \Phi e^{-j\psi}) = -k^2 (k_1^2 + k_3^2) (\Omega_{03}/D_0),$$

из которых следует

$$\Omega_{03} = 2D_0 \frac{\mu^2}{k^2} \frac{k_1 k_2}{jk_2\gamma - (k_1^2 + k_3^2)}, \quad \Phi = \frac{jk_2\gamma + (k_1^2 + k_3^2)}{jk_2\gamma - (k_1^2 + k_3^2)} e^{j\psi}, \quad (18)$$

где обозначено  $\Phi = D_{00}/D_0$  — отношение вещественных амплитуд отраженной и падающей волн дивергенции,  $\Omega_{03}$  — амплитуда проекции вихревой волны на ось  $x_3$ .

Пульсирующие давления в жидкости нетрудно выразить при помощи уравнений (2) и (3):  $p = jc_0^2 \rho_0 D/\omega$ , откуда квадрат давления, усредненный по пространству и времени,

$$\bar{p}^2 = (pp^*)/2 = (c_0^2 \rho_0/\omega)^2 DD^*/2, \quad (19)$$

где звездочкой обозначены комплексно-сопряженные величины. Используя решение (12), можно вычислить давление на пластине, при  $x_2=0$ :

$$\bar{p}^2 = (c_0^2 \rho_0 D_0/\omega)^2 (1 + \Phi^2 + 2\Phi \cos \psi). \quad (20)$$

Из второго соотношения (18) можно вывести

$$\Phi^2 = \Phi\Phi^* = [1 + (1-b)^2]/[1 + (1+b)^2], \quad (21)$$

$$\Phi \cos \psi = (2-b^2)/[1 + (1+b)^2],$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$b = \varepsilon(1-\delta^2)/\delta, \quad \varepsilon = \sqrt{2\nu\omega_0/c_0}, \quad \delta = \sqrt{1 - (c_0/\omega)^2(k_1^2 + k_3^2)}, \quad (22)$$

так что выражение (20) принимает вид

$$\bar{p}^2 = 4(c_0^2 \rho_0 D_0/\omega)^2/[1 + (1+b)^2]. \quad (23)$$

Если жидкость невязкая ( $\nu=0$ ), то  $\varepsilon=b=0$  и, следовательно,  $\bar{p}_0^2 = 2(c_0^2 \rho_0 D_0/\omega)^2$ . Таким образом, отношение усредненных квадратов давлений в вязком и невязком потоках при фиксированных частоте  $\omega$  и волновых числах  $k_1$  и  $k_3$ , т. е. отношение частотно-волновых спектров  $P(\mathbf{k}, \omega)$  давлений в этих потоках равно

$$\frac{P_v(\mathbf{k}, \omega)}{P_0(\mathbf{k}, \omega)} = \frac{2}{1 + (1+b)^2} = \frac{2\delta^2}{\delta^2 + [\delta + \varepsilon(1-\delta^2)]^2}. \quad (24)$$

Отношение (24) показано на рис. 3 и децибельном исчислении  $N = 10 \lg (P_v/P_0)$  в функции от  $\delta^2 = 1 - (c_0/\omega)^2(k_1^2 + k_3^2)$  для различных значений  $\varepsilon = \sqrt{2\nu\omega/c_0}$ . Видно, что для весьма широкого интервала малых волновых чисел  $k_1^2 + k_3^2 \ll (\omega/c_0)^2$  частотно-волновые спектры нормальных давлений в вязком и невязком потоках практически не отличаются друг от друга. Так, например, для частоты 100 кГц в воздухе отличие не превышает 2 дБ в диапазоне волновых чисел  $\sqrt{k_1^2 + k_3^2}$  от 0 до  $0,9995 \cdot (\omega/c_0)$ . И только тогда, когда волновые числа почти вплотную приближаются к величине  $\omega/c_0$ , а направление распространения волн — к скользящему вдоль пластины, отношение (24) спектров стремится к нулю как  $\delta^2$ . Вместе с тем известно [4], что частотно-волновой спектр турбулентных давлений на жесткой бесконечной пластине в случае пренебрежения вязкостью имеет при  $\sqrt{k_1^2 + k_3^2} \rightarrow \omega/c_0$ , т. е. при  $\delta \rightarrow 0$ , особенность типа  $P_0(\mathbf{k}, \omega) \sim 1/\delta^2$ . Ее происхождение аналогично возникновению известного в астрономии парадокса Ольберса, в соответствии с которым небо должно иметь неограниченную яркость, если предположить, что излучающие звезды распределены в окружающем бесконечном пространстве в среднем равномерно и что космос не поглощает света. В действительности оба эти предположения неверны, чем и объясняется парадокс. В рассмотренной

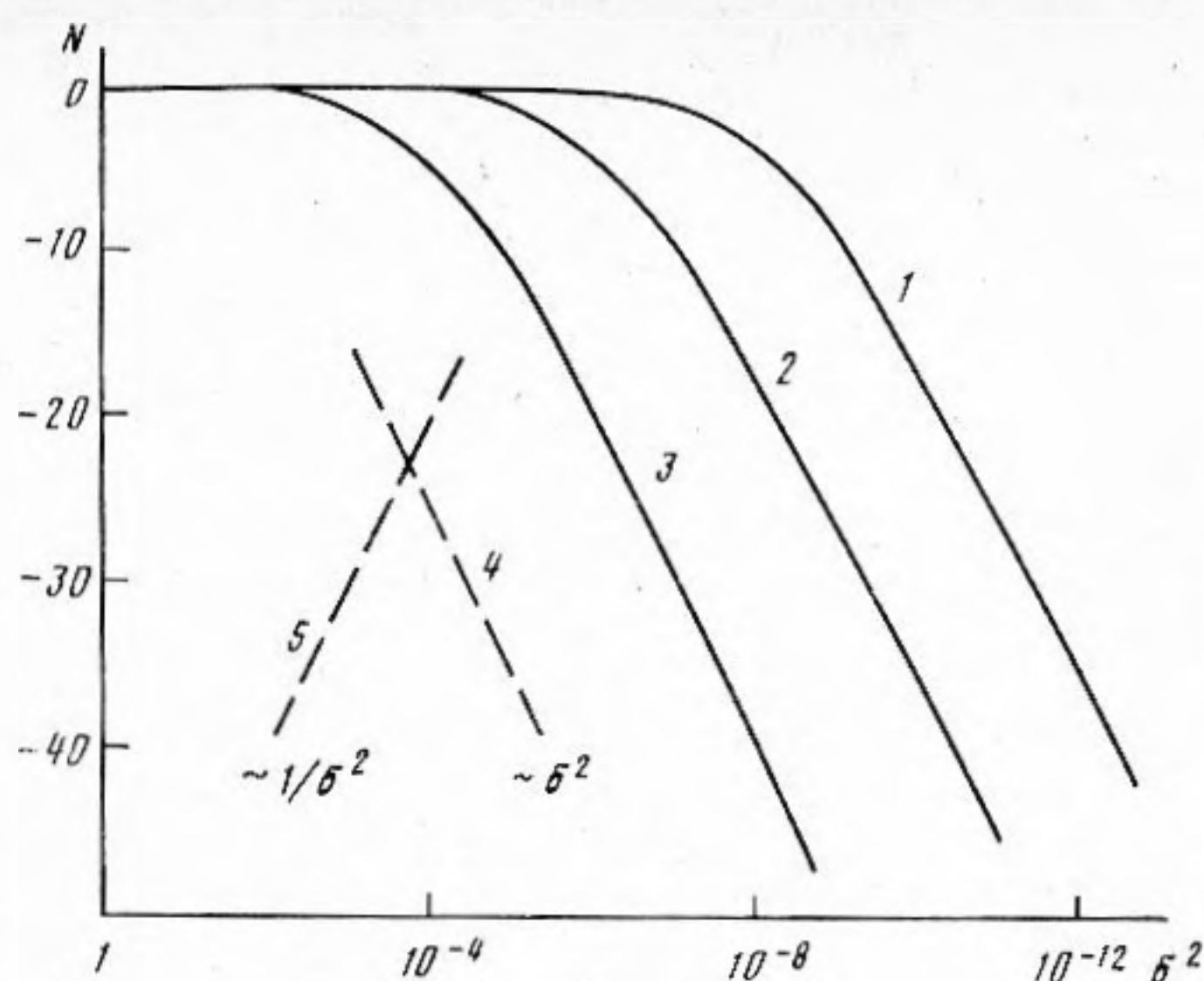


Рис. 3. Отношение частотно-волновых спектров давлений в вязкой и невязкой жидкости при различных значениях параметра  $\varepsilon = \sqrt{2\nu\omega}/c_0$ : 1 —  $\varepsilon = 9,1 \cdot 10^{-5}$  (1 кГц, вода); 2 —  $\varepsilon = 9,1 \cdot 10^{-4}$  (100 кГц, вода); 3 —  $\varepsilon = 1,3 \cdot 10^{-2}$  (100 кГц, воздух); 4 — падение отношения спектров в темпе  $\delta^2$ , 5 — нарастание невязкого спектра в темпе  $1/\delta^2$

задаче, как видно (рис. 3), реальная жидкость сильно поглощает энергию акустических волн при их распространении вдоль или почти вдоль пластины в результате диссипативных потерь на вязкое трение около границы. Вследствие этого бесконечный в невязкой жидкости пик спектра при  $\delta \rightarrow 0$  становится конечным в вязкой жидкости

$$\lim_{|k| \rightarrow \omega/c_0} P_v(k, \omega) \sim \lim_{\delta \rightarrow 0} \{\delta^2 + [\delta + \varepsilon(1 - \delta^2)]\}^{-2} \sim c_0^2 / (\omega\nu)$$

и этот результат вполне согласуется с [6].

Вязкие касательные напряжения на поверхности пластины вдоль осей  $x_1, x_3$  определяются с учетом (5), (12), (16) и (18):

$$\tau_i = \rho_0 \nu \frac{\partial (u_{si} + u_{pi})}{\partial x_2} = \frac{\rho_0 \nu D_0 k_i}{k^2} \{ (j\gamma - k_2) + (j\gamma + k_2) \Phi e^{-j\psi} \} \exp[-j(k_1 x_1 + k_3 x_3)],$$

$$i = 1, 3.$$

После необходимых преобразований нетрудно получить зависимость для среднего квадрата результирующего касательного напряжения  $\bar{\tau}^2 = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_3^2}$  на стенке:

$$\bar{\tau}^2 = \frac{1}{2} \tau \tau^* = \left( \frac{\rho_0 \nu D_0}{k^2} \right)^2 \frac{\omega}{\nu} (k_1^2 + k_3^2) (1 + \Phi^2 + 2\Phi \cos \psi). \quad (25)$$

При получении (25) учитывалось, как и прежде, что  $\nu\omega/c_0^2 \ll 1$ . Выражение (25) пропорционально частотно-волновому спектру касательных напряжений  $S(k, \omega)$  точно так же, как (20) пропорционально частотно-волновому спектру давлений  $P_v(k, \omega)$ . Поэтому отношение спектров касательных и нормальных напряжений на поверхности пластины в вязкой жидкости при  $k_1^2 + k_3^2 \leq (\omega/c_0)^2$  характеризуется отношением (25) к (20):

$$\frac{S(k, \omega)}{P_v(k, \omega)} = \frac{2\nu}{\omega} (k_1^2 + k_3^2) = \varepsilon^2 (1 - \delta^2) = \frac{2\omega\nu}{c_0^2} \sin^2 \theta. \quad (26)$$

Выражение (26) достигает максимальных значений при скользящих по отношению к пластине углах распространения акустических волн ( $k_1^2 + k_3^2 \rightarrow \omega^2/c_0^2, \delta \rightarrow 0$ ), но и в этом случае интенсивность касательных на-

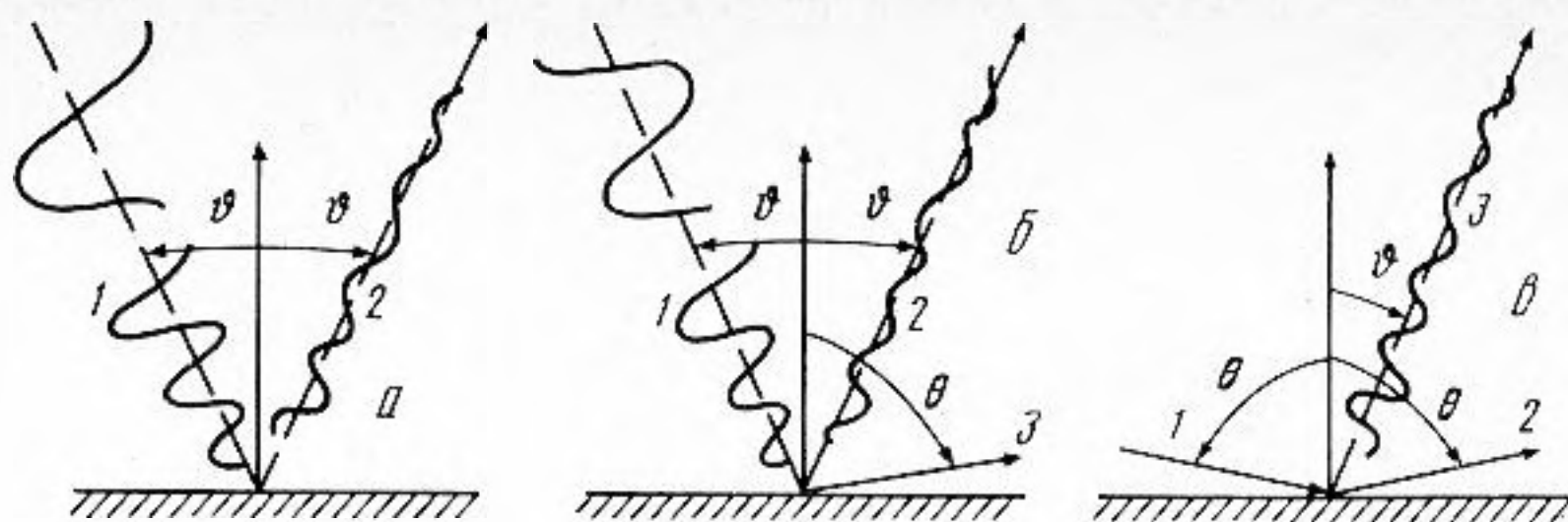


Рис. 4. Схема взаимодействия вихревых и потенциальных волн с обтекаемой поверхностью. *a* — 1, 2 — падающая и отраженная неоднородные по  $x_1$  вихревые волны; *б* — 1, 2 — падающая и отраженная однородные по  $x_1$  вихревые волны (первичный процесс), 3 — потенциальная волна (вторичный процесс); *в* — 1, 2 — падающая и отраженная потенциальные волны (первичный процесс), 3 — вихревая волна (вторичный процесс)

пряжений слабее интенсивности нормальных в  $c_0^2/(2\nu\omega)$  раз, а это даже для частоты 100 кГц составляет  $(-38)$  дБ в воздухе и  $(-61)$  дБ в воде.

Когда исходным процессом являются падающие на пластину вихревые волны со звуковыми и сверхзвуковыми фазовыми скоростями распространения в направлении  $x_1$ , то аналогично предыдущему с помощью (5), (7) и (11а) в двумерном случае [9–10] для  $x_2=0$  получается

$$p = Ak_1 e^{-jk_1 x_1}, \quad \tau = -Ak_2 e^{-jk_1 x_1}, \quad (27)$$

где  $A = \Omega_0 \rho_0 \sqrt{2\omega\nu} [(k_1^2 + 2k_2\alpha) - jk_1^2] / (k_1^4 + 2k_1^2 k_2 \alpha + 2k_2^2 \alpha^2)$ . Из (27) следует неожиданный результат: если завихренность распространяется со скоростью звука ( $k_1 = \omega/c_0$ ,  $k_2 = 0$ ), то касательные напряжения на стенке исчезают, а нормальные напряжения, генерирующие звуковую волну вдоль пластины, остаются конечными. Отношение спектров касательных и нормальных напряжений на стенке в случае (27) не зависит от частоты, вязкости и скорости звука и сильно отличается от (26) по зависимости от  $k_1$  и угла  $\theta$ :

$$S(\mathbf{k}, \omega) / P_v(\mathbf{k}, \omega) = (k_2/k_1)^2 = \text{ctg}^2 \theta. \quad (28)$$

Итак, рассмотрены три различных типа взаимодействия вихревых и потенциальных возмущений с обтекаемой поверхностью. Схема этих взаимодействий показана на рис. 4. В схеме 4, *a* падающие на стенку неоднородные вихревые волны не генерируют акустического излучения. Схемы 4, *б* и 4, *в* для однородных вихревых и потенциальных волн отличаются друг от друга тем, что в них меняются местами причина и следствие. Схема 4, *б* иллюстрирует идею работ [9–11] о генерации дипольного шума падающими на стенку вихревыми волнами со звуковыми и сверхзвуковыми фазовыми скоростями. Схема 4, *в* близка к концепции Пауэлла [2] об отражении от пластины квадрупольного шума, но с поправкой (отсутствующей в теории [2]) на неизбежные в реальной жидкости вязкие потери, особенно существенные согласно [6, 14, 15] и данной работе при скользящих углах  $\theta \rightarrow \pi/2$ . Вместе с тем концепция [2] одновременно вполне согласуется и со схемой 4, *б*. Дело в том, что в [2] наряду с квадрупольным шумом от объемных источников фигурирует еще и дипольный шум от вязких касательных напряжений  $\tau$ , который описывается интегралом по поверхности пластины

$$p_r(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_S \frac{[\tau]}{r} dS, \quad i=1, 3, \quad (29)$$

где  $r$  — расстояние от точки интегрирования до точки наблюдения  $\mathbf{x}$  и символ  $[\ ]$  обозначает функцию, запаздывающую на время  $r/c_0$ . В. М. Ткаченко вычислил интеграл (29) для касательных напряжений (27), обусловленных падающими по схеме 4, *б* вихревыми волнами. Давления оказались в точности совпадающими с первым из выражений (27), т. е.

соответствующими опять же схеме 4, б (включая нетривиальный случай  $k_2 \rightarrow 0$ , когда  $\tau \rightarrow 0!$ ). Таким образом схема 4, б характеризует дипольное излучение от поверхностных источников, которые, согласно [2] и (29), обусловлены вязкими касательными напряжениями на стенке, или, что то же самое, — падающими на стенку вихревыми волнами согласно [9—11]. Генерация дипольного шума по схеме 4, б не исключает, разумеется, отражения от стенки квадрупольного шума по схеме 4, в, и, казалось бы, такая комбинационная трактовка явления вполне удовлетворительна.

Однако здесь возникают два трудных вопроса. Первый состоит в том, почему строгая теория [2], не игнорирующая в исходных уравнениях членов, зависящих от вязкости, тем не менее не описывает реальных диссипативных эффектов, сопровождающих отражение от стенки квадрупольного шума? Второй вопрос заключается в том, каким образом в интеграле (29) отличить друг от друга «излучающие» по схеме 4, б касательные напряжения (27) от «неизлучающих» (25) по схеме 4, в? По теории [2] в поверхностный интеграл (29) формально должны войти и те и другие, но это совершенно нелогично. В частности, неизлучающие касательные напряжения (25), конечные и при  $k_2 = 0$ , дадут в соответствии с (28) и (29) бесконечно большую спектральную плотность излучения вдоль пластины.

Весьма вероятно, что указанные противоречия являются следствием исходной акустической аналогии. Аналогия базируется на строгих уравнениях движения вязкой сжимаемой жидкости, но построена она, как известно, таким образом, что эффекты вязкой диссипации акустических волн (равно как и эффекты их конвекции и рефракции в движущейся среде) намеренно отнесены в правую часть неоднородного волнового уравнения, характеризующего источники излучения, для того, чтобы его левая часть приобрела форму простого классического волнового оператора, описывающего распространение возмущений в невязкой (и покоящейся) среде.

В теории шума высокоскоростных турбулентных струй давно осознана необходимость отделить в волновом уравнении члены, описывающие рефракцию звука в движущейся среде, от членов, описывающих его генерацию. Для пограничного слоя при малых числах Маха явления рефракции не очень существенны, однако диссипативные потери потенциальных волн при скользких углах  $\theta \rightarrow \pi/2$  оказываются пренебрежимо малыми, и Хоув [6] представил аргументы в пользу того, что вязкие касательные напряжения при  $k_{1,3} \leq \omega/c_0$  имеют отношение не к генерации звука, а к его частичному поглощению при распространении в реальной среде вблизи поверхности. Тем не менее, судя по публикациям [5, 11, 13], затронутая проблема все еще оставляет место для дискуссии, частью которой следует рассматривать и настоящую работу. Ее автору концепция [6], соответствующая схеме взаимодействия 4, в, представляется наиболее привлекательной, так как в ее рамках отпадают все отмеченные выше противоречия схемы взаимодействия 4, б. Хорошим аргументом в пользу той или другой схемы взаимодействия вихревых и потенциальных волн с обтекаемой поверхностью могли бы быть одновременные измерения частотно-волновых спектров нормальных и касательных напряжений при  $k_{1,3} < \omega/c_0$  и сопоставление полученных данных с очень разными зависимостями (26) и (28), но пока такие измерения не выполнены.

Автор благодарит В. М. Ткаченко за полезное обсуждение полученных здесь результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Curle N.* The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound // *Proc. Roy. Soc.* 1955. Ser. A231. P. 505—514.
2. *Powell A.* Aerodynamic noise and the plane boundary // *JASA.* 1960. V. 32. № 8. P. 982—990.
3. *Ffowcs Williams J. E.* Sound radiation from turbulent boundary layers formed on compliant surfaces // *J. Fluid Mech.* 1965. V. 22. № 2. P. 347—358.
4. *Bergeron R. F.* Aerodynamic sound and the low-wave number wall-pressure spectrum of nearly incompressible boundary layer turbulence // *JASA.* 1973. V. 54. № 1. P. 123—133.



5. *Hariri H. H., Akyias T. R.* The wall-shear-stress contribution to boundary layer noise // *Phys. Fluids*. 1985. V. 28. № 9. P. 2727–2729.
6. *Howe M. S.* The role of surface shear stress fluctuations in the generation of boundary layer noise // *J. Sound. Vib.* 1979. V. 65. № 2. P. 159–164.
7. *Vecchio E. A., Wiley C. A.* Noise radiated from a turbulent boundary layer // *JASA*. 1973. V. 53. № 2. P. 596–601.
8. *Landahl M. T.* Wave mechanics of boundary layer turbulence and noise // *JASA*. 1975. V. 57. № 4. P. 824–831.
9. *Наугольных К. А., Рыбак С. А.* Об излучении звука турбулентным пограничным слоем: *Тр. Акуст. ин-та*, 1971. Вып. XVI. С. 129–135.
10. *Наугольных К. А., Рыбак С. А.* Об излучении звука турбулентным пограничным слоем // *Акуст. журн.* 1980. Т. 26. № 6. С. 890–894.
11. *Грешилов Е. М., Миронов М. А., Наугольных К. А., Рыбак С. А., Данилов С. Д.* Звук и вибрация, порождаемые пристенной турбулентностью. Теория и эксперимент // *Тр. XI междунар. симпоз. IUPAP – IUTAM по нелинейной акустике*. Новосибирск: Наука, 1987. Часть 1, с. 397–401.
12. *Смольяков А. В.* Спектр квадрупольного излучения плоского турбулентного пограничного слоя // *Акуст. журн.* 1973. Т. 19. № 3. С. 420–425.
13. *Blake W. K.* *Mechanics of flow-induced sound and vibration, vol. 2: Complex flow-structure interaction*. Orlando. USA. Academic Press, INC., 1986.
14. *Рэлей Дж.* *Теория звука*. М.: Гостехиздат, 1955.
15. *Константинов Б. П.* *Гидродинамическое звукообразование и распространение звука в ограниченной среде*. Л.: Наука. 1974.

Поступила в редакцию  
28.III.1988