

УДК 534.2:532

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА ТРЕХМЕРНЫМИ ТОЧЕЧНЫМИ ВИХРЯМИ

Головчанская А. Е., Лямшев Л. М., Скворцов А. Т.

Рассмотрена задача о рассеянии звука системой трехмерных точечных вихрей — вихревых диполей (их можно интерпретировать как точечные вихри Хилла или точечные вихревые кольца). Для случая, когда характерная скорость движения вихрей много меньше скорости звука, в борновском приближении определены амплитуда и сечение рассеяния. Подробно проанализирован случай рассеяния на одном и двух вихревых диполях.

Актуальность исследования особенностей рассеяния звука локализованными вихрями определяется важностью этого процесса для ряда задач акустики атмосферы и океана (как модель рассеяния звука крупномасштабной турбулентностью [1, 2]), нелинейной акустики (этот процесс выводит гармоники из синхронизма и может предотвратить образование ударных волн [3]), теории сверхтекучести (рассеяние на вихрях определяет силу взаимного трения между сверхтекучей и нормальной компонентами жидкости [4]).

Обычно процесс рассеяния изучался на примере вихревых объектов достаточно сложной внутренней структуры (вихрь Хилла [2], вихревое кольцо [5, 6] и т. д.), поскольку более простые трехмерные локализованные вихри до недавних пор просто не были известны. Это не позволяло непосредственно обобщать получаемые результаты на системы, состоящие из большого числа вихрей (сложность входящих в систему вихрей не допускала возможность ее аналитического описания), и однозначно интерпретировать итоговые закономерности как присущие реальным турбулентным потокам (поскольку наиболее адекватной моделью последних являются именно «многовихревые» системы). Ситуация в определенной степени изменилась в связи с тем, что в последнее время в гидродинамике разработано аналитическое описание трехмерных точечных вихрей — вихревых диполей [7, 8]. Использование вихревых диполей позволяет заменять сложные вихревые (турбулентные) течения их «дискретными» аналогами (системой трехмерных точечных вихрей), что открывает новые возможности для теоретического исследования акустогидродинамических процессов [8].

В настоящей работе вихревые диполи используются для моделирования рассеяния звука вихревым потоком. Рассмотрение проводится в рамках борновского приближения [1, 2, 4, 5]. При этом всегда предполагается, что характерная скорость движения вихревых диполей существенно меньше скорости звука.

Пусть на систему вихрей падает плоская звуковая волна. Тогда в общем случае на больших расстояниях от системы рассеянное поле описывается выражением (см., например, [1, 2, 5])

$$\frac{p_s}{p_i} = f(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \frac{e^{ik_0 R}}{R}, \tag{1}$$

где p_i , p_s — амплитуды звукового давления в падающей и рассеянной волнах,

$$f(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \frac{i\omega_0}{2\pi c^2} \frac{(\mathbf{n}\mathbf{n}_0) ([\mathbf{n}_0\mathbf{n}] \Omega(\mathbf{q}))}{q^2} \tag{2}$$

амплитуда рассеяния, c — скорость звука, \mathbf{k}_0 — волновой вектор падающей волны; $\omega_0 = ck_0$ — ее частота; $\mathbf{n}_0 = \mathbf{k}_0/|\mathbf{k}_0|$, $R = |\mathbf{R}|$ — радиус-вектор точки, в которой определяется рассеянное поле (начало координат

расположено внутри системы вихрей); $\mathbf{n} = \mathbf{R}/|\mathbf{R}|$; $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$; $\mathbf{k} = k_0\mathbf{n}$;

$$\Omega(\mathbf{q}) = \int \Omega(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \quad (3)$$

— фурье-компонента завихренности $\Omega(\mathbf{r})$.

Для системы N вихревых диполей завихренность определяется выражением [7]

$$\Omega(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^N \text{rot}(\mathbf{p}^{(\alpha)}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(\alpha)}(t)), \quad (4)$$

где $\mathbf{r}^{(\alpha)}(t)$ — радиус-вектор вихря с номером α ; $\mathbf{p}^{(\alpha)}(t)$ — его интенсивность.

Переходя от (4) к фурье-компоненте (3), получаем

$$\Omega(\mathbf{q}) = i\mathbf{q} \times \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{p}^{(\alpha)}(t) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}^{(\alpha)}(t)}. \quad (5)$$

Формулы (1), (2), (5) позволяют рассчитать рассеяние звука произвольной системой вихревых диполей. Если из уравнений движения найдены функции $\mathbf{p}^{(\alpha)}(t)$, $\mathbf{r}^{(\alpha)}(t)$ (по этому поводу см. [7]), то подстановка их в (1), (2), (5) позволяет найти характеристики рассеянного поля. Отметим, что само движение системы вихревых диполей может при этом определяться как их взаимодействием, так и конвективным сносом внешним потоком.

Пусть имеется только один вихревой диполь, который движется с постоянной скоростью \mathbf{U}_0 . Тогда в сумме (5) остается только одно слагаемое, в котором $\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{U}_0 t$, $\mathbf{p}^{(1)} = \text{const}$. На основании (2), (5) приходим к выражению

$$f(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = -\frac{\omega_0}{4\pi c^3} (\mathbf{n}\mathbf{n}_0) (\mathbf{p}, (\mathbf{n} + \mathbf{n}_0)) e^{i\Delta\omega t}, \quad (6)$$

где $\Delta\omega = (\mathbf{q}\mathbf{U}_0)$ — доплеровский сдвиг частоты, вызванный движением вихря. Отметим, что в соответствии с общими закономерностями рассеяния звука вихрями, вытекающими из формулы (2) (см., например, [1, 2]), рассеяние назад и в перпендикулярном к \mathbf{n}_0 направлении отсутствует.

Перейдем к сферической системе координат (θ — полярный угол, отсчитываемый от направления \mathbf{p} , φ — аксиальный угол в плоскости $zo\varphi$, отсчитываемый от проекции вектора \mathbf{n}_0 на эту плоскость, рис. 1). В этой системе координат формула (6) имеет вид

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{\omega_0 P}{4\pi c^3} \Phi(\theta, \theta_0, \varphi) e^{i\Delta\omega t}, \quad (7)$$

Рис. 1. Геометрия задачи

$$\Phi(\theta, \theta_0, \varphi) = (\cos\theta_0 \cos\theta + \sin\theta \sin\theta_0 \cos\varphi)(\cos\theta + \cos\theta_0) \quad (8)$$

Нетрудно показать, что функция $\Phi(\theta, \theta_0, \varphi)$ имеет четыре экстремума, которые всегда лежат в плоскости, определяемой векторами \mathbf{p} и \mathbf{n}_0 . Учитывая, что эта плоскость отвечает условию $\cos\varphi = 1$, из (6) имеем

$$\Phi(\theta, \theta_0, \varphi = 0) \equiv \Phi(\theta, \theta_0) = \cos(\theta_0 - \theta)(\cos\theta + \cos\theta_0). \quad (9)$$

График функции $|\Phi(\theta, \theta_0)|$ в полярной системе координат приведен на рис. 2.

Диаграмма направленности, определяемая функцией $\Phi(\theta, \theta_0)$ (9), совпадает с диаграммой направленности, полученной в работе [5] для задачи рассеяния звука вихревыми кольцом. Это совпадение позволяет говорить о вихревом диполе как об объекте, обладающем не только гидродинамическими (см. [7]), но и акустическими свойствами вихревого кольца.

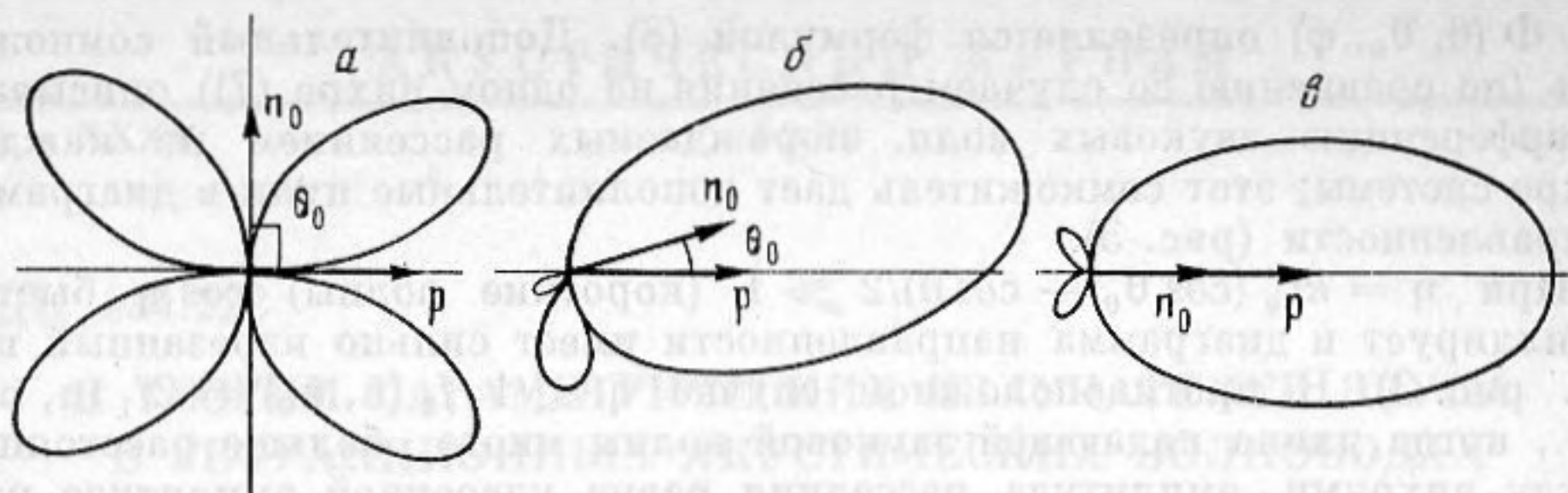


Рис. 2. Сечение диаграммы направленности $|f(\theta)/f_{\max}|$ плоскостью, определяемой векторами \mathbf{p} , \mathbf{k}_0 для случая рассеяния на одном вихре: $a - \theta_0 = 90^\circ$, $б - \theta_0 = 30^\circ$, $в - \theta_0 = 0^\circ$

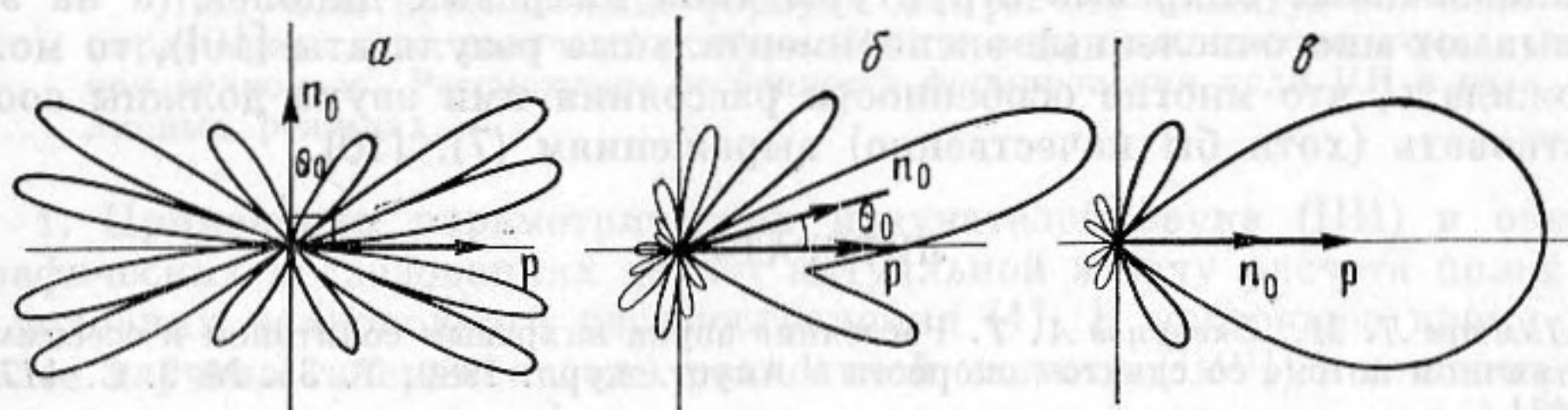


Рис. 3. То же для двух вихрей: $a - \theta_0 = 90^\circ$, $k_0 r_0 = 20$, $б - \theta_0 = 30^\circ$, $k_0 r_0 = 20$, $в - \theta_0 = 0^\circ$, $k_0 r_0 = 10$

Своеобразным плоским аналогом рассмотренной задачи является исследованный в работе [9] процесс рассеяния звука двумя точечными вихрями, которые находятся на конечном расстоянии друг от друга (интенсивности вихрей при этом предполагались равными по абсолютной величине и противоположными по знаку). Такая система представляет собой плоский вихревой диполь конечных размеров. В случае, когда длина волны много больше расстояния между вихрями, рассчитанные в [9] диаграммы направленности рассеяния качественно согласуются с (7), (8).

При помощи (1), (2) можно вычислить сечение рассеяния [1, 2]:

$$\sigma = \int |f|^2 d\Omega,$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла. Отсюда, подставляя (7), (8) и выполняя интегрирование по углам, получаем выражение для полного сечения на одном вихре

$$\sigma = \frac{1}{60\pi} \left(p \frac{\omega_0^2}{c^3} \right)^2 (1 + 7 \cos^2 \theta_0).$$

Видно, что сечение рассеяния максимально, если направления падающей волны совпадают с направлением интенсивности вихря ($\theta_0 = 0$, рис. 1).

Аналогично было исследовано рассеяние звука на системе из двух одинаковых вихревых диполей, которые переносятся однородным внешним потоком (взаимодействием вихрей для простоты пренебрегаем). Для системы, в которой интенсивности диполей направлены вдоль соединяющей их прямой, распределение завихренности будет описываться суммой (4), состоящей из двух слагаемых, причем $\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p} = \text{const}$, $\mathbf{r}^{(1)}(t) = \mathbf{U}_0 t$, $\mathbf{r}^{(2)}(t) = \mathbf{U}_0 t + \mathbf{r}_0$ ($\mathbf{r}_0 = r_0 \mathbf{p}/p$, где r_0 — расстояние между вихрями). Подстановка этих выражений в (5) и (2) приводит к следующему результату:

$$f_2(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = -\frac{\omega_0^2 p}{4\pi c^3} \Phi(\theta, \theta_0, \varphi) (1 + e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_0}) e^{i\Delta\omega t} \quad (10)$$

или

$$f_2(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = -\frac{\omega_0^2 p}{4\pi c^3} \Phi(\theta, \theta_0, \varphi) 2 \cos \left[\frac{kr_0}{2} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \right] e^{\frac{i\mathbf{q}\mathbf{r}_0}{2} + i\Delta\omega t},$$

где $\Phi(\theta, \theta_0, \varphi)$ определяется формулой (8). Дополнительный множитель (по сравнению со случаем рассеяния на одном вихре (7)) описывает интерференцию звуковых волн, порождаемых рассеянием на каждом вихре системы; этот множитель дает дополнительные нули в диаграмме направленности (рис. 3).

При $\eta = kr_0(\cos \theta_0 - \cos \theta)/2 \gg 1$ (короткие волны) $\cos \eta$ быстро осциллирует и диаграмма направленности имеет сильно изрезанный вид (см. рис. 3). В противоположном случае $\eta \ll 1$ $f_2(n, n_0) = 2f_1(n, n_0)$, т. е., когда длина падающей звуковой волны много больше расстояния между вихрями, амплитуда рассеяния равна удвоенной амплитуде рассеяния на одном вихре (когерентное рассеяние).

Если предположить, что в турбулентных потоках могут наблюдаться локализованные вихревые структуры типа вихревых диполей (а на это указывают многочисленные экспериментальные результаты [10]), то можно ожидать, что многие особенности рассеяния ими звука должны соответствовать (хотя бы качественно) выражениям (7), (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лямшев Л. М., Скворцов А. Т. Рассеяние звука вихревым солитоном в осесимметричном потоке со сдвигом скорости // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 3. С. 477—481.
2. Климов В. В., Прозоровский В. Л. Рассеяние акустических волн тороидальным вихрем // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 1. С. 128—131.
3. Моисеев С. Д., Сагдеев Р. З., Тур А. В., Яновский В. В. Влияние вихрей на спектр акустической турбулентности // Нелинейные волны / Под ред. Гапонова-Грехова А. В. М.: Наука, 1979. С. 105—115.
4. Путаевский Л. П. Вычисление фоновой части силы взаимного трения в сверхтекучем гелии // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. № 5. С. 1271—1275.
5. Howe M. S. On the scattering of sound by a vortex ring // J. Sound Vib. 1983. № 4. P. 567—571.
6. Копьев В. Ф., Леонтьев Е. А. Излучение и рассеяние звука вихревым кольцом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 83—95.
7. Чефранов С. Г. Динамика точечных вихревых диполей и спонтанные сингулярности в трехмерных турбулентных потоках // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. № 1 (7). С. 151—159.
8. Чефранов С. Г. Спонтанные сингулярности в трехмерной турбулентности и излучение звука при сильном динамическом взаимодействии точечных диполей // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 5. С. 112—115.
9. Tanaka K., Ishii S. Scattering of a plane sound wave by a vortex pair // J. Phys. Soc. Japan. 1982. V. 51. N 6. P. 1992—1999.
10. Hussain A. K. Coherent structures—reality and myth // Phys. Fluids. 1983. V. 26. № 10. P. 2816—2850.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
27.XII.1988