АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXV 1989 Вып. 5

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ТОНКОМ ДИСКЕ

Хижняк А. Н.

Рассмотрена дифракция плоской акустической волны на круглом бесконечно тонком диске. Получено строгое решение задачи в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений II рода, к которой применим метод редукции. Рассмотрены два типа граничных условий, соответствующих случаям идеально жесткого и идеально мягкого дисков. Получены системы уравнений, описывающие дифракцию плоской акустической волны на структуре из двух идеально жестких соосных дисков, приведены результаты расчетов коэффициента рассеяния такой структуры.

Задача дифракции плоской волны на тонком диске может рассматриваться как ключевая в обширном классе более сложных граничных задач, в частности дифракции волн на однослойных и многослойных как периодических, так и ограниченных решетках из дисков. В связи с этим необходимо иметь строгое и по возможности не громоздкое, удобное для применения численных методов решение задачи дифракции на отдельно взятом диске. Классическое решение с помощью разложения по сфероидальным функциям [1] малопригодно для этих целей, поскольку при исследовании дифракции на структурах из нескольких дисков приводит к крайне громоздким расчетам. Метод, предлагаемый в [2], связан с решением математически некорректных задач. Поэтому предпочтительным представляется метод парных интегральных уравнений (см., например, [3]), с помощью которого задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма II рода или бесконечной системы линейных алгебраических уравнений II рода.

В большинстве работ (см. [3, 4], а также библиографию к ним) задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма II рода, однако численное решение такого уравнения в резонансном и коротковолновом диапазонах приводит к получению систем линейных алгебраических уравнений больших порядков. Более удобным представляется метод, основанный на сведении парных интегральных уравнений непосредственно к системе линейных алгебраических уравнений.

Таким образом, цель данной работы — получение строгого решения задачи дифракции плоской акустической волны на круглом бесконечно тонком диске в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, построение соответствующих численных алгоритмов и исследование их эффективности.

Рассмотрим дифракцию плоской акустической волны на идеально жестком диске (граничное условие Неймана). Направим ось z цилиндрической системы координат (r, φ, z) вдоль оси диска радиуса a. Пусть диск расположен в плоскости $z = 0$. Поле во всем пространстве можно представить в виде

$$v(r, \varphi, z; k) = e^{ik(r\cos\varphi\sin\alpha + z\cos\alpha)} + v_s(r, \varphi, z; k). \tag{1}$$

Зависимость от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$, $k = \omega/c$, α — угол падения первичной волны.

Представим рассеянное поле v_s в (1) в виде разложения в интеграл Фурье — Бесселя

$$v_s(\rho, \varphi, \eta; \varkappa) = \frac{|\eta|}{\eta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{im\varphi} \int_0^\infty a^{(m)}(\xi) J_m(\xi\rho) e^{i|\eta|\gamma(\xi)} d\xi, \tag{1a}$$

где $\rho = r/a$, $\eta = z/a$, $\varkappa = ka$, $\gamma(\xi) = \sqrt{\varkappa^2 - \xi^2}$, $\operatorname{Im}\gamma \geqslant 0$, $J_m(x)$ — функция Бесселя I рода. Задача сводится к решению парных интегральных уравнений для амплитуды азимутальной гармоники $a^{(m)}(\xi)$ [3]

$$\int_0^\infty a^{(m)}(\xi) J_m(\xi\rho)\, d\xi = 0, \quad \rho > 1,$$
$$\int_0^\infty a^{(m)}(\xi)\gamma(\xi) J_m(\xi\rho)\, d\xi = \varkappa \cos\alpha\, J_m(\varkappa \sin\alpha\rho), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1. \tag{2}$$

Для решения уравнений (2) воспользуемся методом моментов в сочетании с методом полуобращения оператора [5]. Эффективность применения метода моментов в значительной степени определяется удачным выбором базисных функций. В данном случае оказалось удобным использовать систему базисных функций следующего вида:

$$\Phi_n^{(m)}(\rho) = 2^{-1/2} \frac{n!}{\Gamma(n + 3/2)} \sqrt{4n + 2m + 3}\, \rho^m (1 - \rho^2)^{1/2} P_n^{(m, 1/2)}(1 - 2\rho^2). \tag{3}$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Полнота этой системы следует из полноты системы полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Такой выбор базисных функций позволяет учесть особенность на ребре, а также в явном виде обратить статическую часть оператора уравнений (2). Из представления рассеянного поля на диске в виде разложения по функциям $\Phi_n^{(m)}(\rho)$ следует разложение для амплитуды азимутальной гармоники

$$a^{(m)}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(m)} \varphi_n^{(m)}(\xi), \tag{4}$$

где $\varphi_n^{(m)}(\xi) = \sqrt{4n + 2m + 3}\, J_{2n+m+3/2}(\xi)\xi^{-1/2}$.

Используя (4), после некоторых преобразований из (2) получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения $C_n^{(m)}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{nk}^{(m)} C_n^{(m)} - C_k^{(m)} = B_k^{(m)}, \quad m, k = 0, 1, 2 \ldots, \tag{5}$$

где

$$A_{nk}^{(m)} = \int_0^\infty \varphi_n^{(m)}(\xi)\, \varphi_k^{(m)}(\xi)\, \varepsilon^{\mathrm{T}}(\xi)\, d\xi, \quad \varepsilon^{\mathrm{T}}(\xi) = 1 - \gamma(\xi)/i\xi,$$
$$B_k^{(m)} = i \operatorname{ctg} \alpha \varphi_k^{(m)}(\varkappa \sin\alpha).$$

Аналогичная система уравнений была получена в [4] из интегрального уравнения Фредгольма II рода, однако ее численное исследование не проводилось.

Можно показать, что матрица системы (5) удовлетворяет условию $\sum_{nk=0}^{\infty} |A_{nk}^{(m)}|^2 < \infty$, т. е. система уравнений (5) фредгольмова и допускает решение методом редукции. Кроме того, используя рекуррентные соотношения для функций Бесселя, можно получить рекуррентную формулу для матричных элементов. Применение последней вместо вычисления численным интегрированием примерно $N^2/2$ элементов симметричной матрицы с порядком редукции N ($N \gg 1$) позволяет ограничиться вычислением примерно N элементов, а остальные находятся простыми арифметическими действиями. Подынтегральные выражения в матричных элементах с ростом ξ убывают как ξ^{-4}, поэтому вычисление матричных элементов с помощью ЭВМ не представляет трудностей.

Методика решения задачи дифракции на идеально мягком диске (граничное условие Дирихле) не отличается от рассмотренной выше, поэтому приведем только основные результаты.

$\alpha = 0°$			$\alpha = 35°$		
$\varkappa = 1$	$\varkappa = 5$	$\varkappa = 10$	$\varkappa = 1$	$\varkappa = 5$	$\varkappa = 10$
0,403	0,002	0,001	0,427	0,000	0,000
0,841	0,979	1,012	0,916	0,999	0,753
0,841	0,988	1,000	0,916	0,985	0,960
	0,988	0,999		0,984	0,994
		0,998		0,984	0,996
		0,998			0,996
		0,998			0,996

Парные интегральные уравнения в этом случае имеют вид

$$\int_0^\infty a^{(m)}(\xi)\,\gamma(\xi)\,J_m(\xi\rho)\,d\xi = 0, \quad \rho > 1,$$

$$\int_0^\infty a^{(m)}(\xi)\,J_m(\xi\rho)\,d\xi = -J_m(\varkappa \sin\alpha\rho), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1.$$

В качестве базисных используются функции

$$\Phi_n^{(m)}(\rho) = 2^{1/2}\frac{n!}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\sqrt{4n+2m+1}\,\rho^m(1-\rho^2)^{-1/2}P_n^{(m,-1/2)}(1-2\rho^2).$$

Как и в случае идеально жесткого диска, получаем разложение для $a^{(m)}(\xi)$:

$$a^{(m)}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(m)}\varphi_n^{(m)}(\xi),$$

где

$$\varphi_n^{(m)}(\xi) = \sqrt{4n+2m+1}\,\frac{1}{\gamma(\xi)}\,J_{2n+m+\frac{1}{2}}(\xi)\,\xi^{-1/2}.$$

Аналогично получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(m)}A_{kn}^{(m)} - C_k^{(m)} = B_k^{(m)}, \quad k, m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где

$$A_{kn}^{(m)} = \int_0^\infty \varphi_n^{(m)}(\xi)\,\varphi_k^{(m)}(\xi)\,\varepsilon^{\text{м}}(\xi)\,d\xi, \quad \varepsilon^{\text{м}}(\xi) = 1 - i\xi/\gamma(\xi),$$

$$B_k^{(m)} = i\varphi_k^{(m)}(\varkappa \sin\alpha).$$

Численные расчеты для коэффициента рассеяния при $\alpha = 0$ дают результаты, полностью совпадающие с данными, приведенными в [1, с. 293]. В таблице приведены результаты расчета величины $\sigma/2$, где σ — коэффициент рассеяния, в зависимости от величины порядка редукции системы уравнений (6) (идеально мягкий диск). Расчет матричных элементов производился с точностью, достаточной для вычисления коэффициента рассеяния с тремя верными знаками. Из таблицы видно, что для достижения указанной точности величина порядка редукции может не превышать целой части $\varkappa$ плюс единица, а при больших $\varkappa$ оказывается даже несколько меньшей. В случае идеально жесткого диска наблюдается такая же картина.

Полученные результаты позволяют аналогичным образом изучать дифракцию на некоторых более сложных рассеивателях, составной частью которых является круглый диск. В качестве простого примера рассмотрим дифракцию плоской акустической волны на двух идеально жестких дисках одинакового радиуса, лежащих в параллельных плоскостях на одной

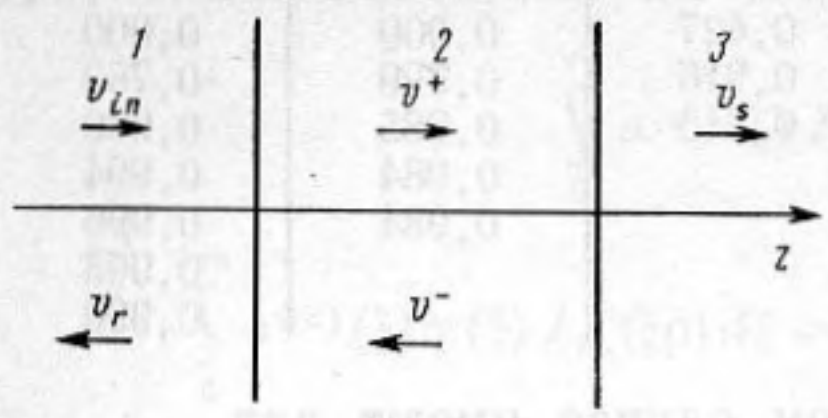

Рис. 1. Два соосных диска

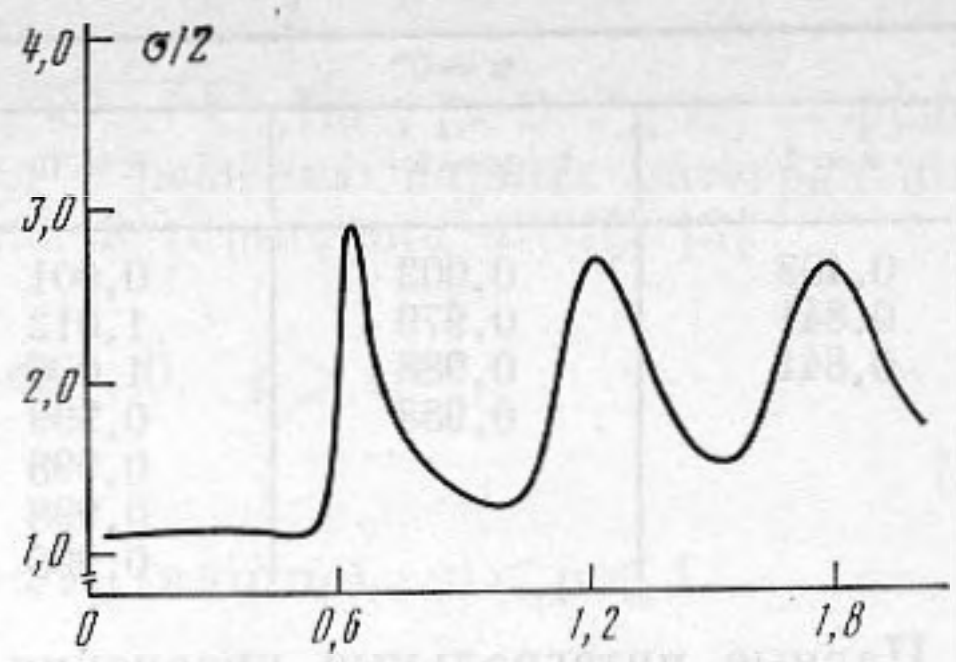

Рис. 2. Зависимость величины σ/2 от отношения расстояния между дисками к длине падающей волны при $\varkappa = \pi$ и $\alpha = 0$

оси на расстоянии b друг от друга. Направим ось z цилиндрической системы координат вдоль оси дисков. Расположим начало координат в центре одного из них, так чтобы центр второго диска лежал в точке $z = b$. Пусть из полупространства $z < 0$ на структуру падает плоская акустическая волна. Представим поля v_{in}, v_r, v^+, v^-, v_s (см. рис. 1) в виде разложения (1а) соответственно с амплитудами $q^{(m)}(\xi) = \delta(\xi - \varkappa \sin\alpha)$, $a^{(m)}(\xi)$, $c^{(m)}(\xi)$, $B^{(m)}(\xi)$, $d^{(m)}(\xi)$. Из граничных условий в плоскостях $z = 0$ и $z = b$ получаем соотношения между амплитудами и системами парных интегральных уравнений. Поскольку радиусы дисков одинаковы, уравнения, полученные из условий в разных плоскостях, можно комбинировать между собой и после некоторых преобразований приходим к двум независимым системам парных интегральных уравнений

$$\int_0^\infty x_\pm^{(m)}(\xi) J_m(\xi\rho)\, d\xi = 0, \quad \rho > 1,$$

$$\int_0^\infty x_\pm^{(m)}(\xi)\gamma(\xi)[1 \mp e^{ih\gamma(\xi)}] J_m(\xi\rho)\, d\xi =$$

$$= \varkappa \cos\alpha J_m(\rho\varkappa \sin\alpha)(1 \mp e^{ih\varkappa\cos\alpha}), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1.$$

Здесь введены обозначения: $h = b/a$, $c^{(m)}(\xi) - q^{(m)}(\xi) = F^{(m)}(\xi)$, $x_\pm^{(m)}(\xi) = -(F^{(m)}(\xi) \pm B^{(m)}(\xi)\exp(-ih\gamma(\xi))$. Воспользовавшись, как и ранее, методом моментов с базисными функциями (3) в сочетании с методом полуобращения оператора, получаем системы линейных алгебраических уравнений II рода

$$\sum_{n=0}^\infty c_n^{(m)\pm} A_{nk}^{(m)} - c_k^{(m)\pm} = B_k^{(m)}, \tag{7}$$

где

$$A_{nk}^{(m)} = \int_0^\infty \varphi_n^{(m)}(\xi)\varphi_k^{(m)}(\xi)\varepsilon^\pm(\xi)\, d\xi,$$

$$\varepsilon^\pm(\xi) = 1 + i\gamma(\xi)\xi^{-1}(1 \mp e^{ih\gamma(\xi)}),$$

$$B_k^{(m)} = i \operatorname{ctg}\alpha\,(1 \mp e^{ih\varkappa\cos\alpha})\,\varphi_k^{(m)}(\varkappa \sin\alpha).$$

Уравнения (7) аналогичны уравнениям (5), однако в правую часть и в матричные элементы входят члены, описывающие взаимодействие между дисками.

На рис. 2 приведены результаты расчетов коэффициента рассеяния при $\varkappa = ka = \pi$ в зависимости от отношения расстояния между дисками к длине волны звука.

Аналогичные системы уравнений можно получить и для других осесимметричных структур, в частности для системы из N дисков, лежащих на одной оси, а также для бесконечной периодической структуры из соосных дисков.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю, члену-корр. АН УССР Л. Н. Литвиненко, а также доктору физ.-мат. наук С. Л. Просвирнину за большую помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
2. *Конторович М. И., Новиков Ю. Н.* Дифракция электромагнитных волн на кольце и диске // ЖТФ. 1984. Т. 54. № 11. С. 2081—2084.
3. *Бражникова Л. Н., Сологуб В. Г.* Об одном исследовании задачи о дифракции на круглом диске // Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 2. С. 280—283.
4. *Виноградов С. С.* Один метод решения задачи о дифракции на круглом диске // Докл. АН УССР. 1983. Сер. А. № 6. С. 37—39.
5. *Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л.* Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. Киев: Наук. думка, 1984.

Радиоастрономический институт
Академии наук УССР

Поступила в редакцию
19.I.1988