

Отличие  $\langle \lambda_n \rangle$  от  $\lambda_{0n}$  может быть получено и во втором порядке теории возмущений, согласно которой в случае  $\varphi'(0) = \varphi(L) = 0$ ,

$$\langle \lambda_n \rangle - \lambda_{0n} = \sum_{m \neq n} \frac{\langle J_{nm}^2 \rangle}{\lambda_{0n} - \lambda_{0m}} = -\frac{4D_n}{3L^2}, \quad D_n = \frac{3\sigma_V^2 L^3}{8\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}, \quad (10)$$

$$J_{nm} = \int_0^L \varphi_{0n}(z) \varphi_{0m}(z) V(z) dz, \quad \varphi_{0n}(z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi z / L.$$

Формула (10) существенно ближе к численным результатам [1], чем (9). Однако она в интервале  $1 < D_0 < 5$  дает погрешность вычисления  $\langle \lambda_0 - \lambda_{00} \rangle$  порядка 30%. В случае симметричных краевых условий  $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$  ( $\lambda_{0n} = n^2 \pi^2 / L^2$ )

$$\langle \lambda_n \rangle - \lambda_{0n} = -4D_n / L^2, \quad D_n = \frac{3\sigma_V^2 L^3}{8n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (11)$$

Сравнивая (10) и (11), видим, что при изменении краевых условий меняются не только коэффициенты диффузии, но и численные множители в выражениях для  $\langle \lambda_n - \lambda_{0n} \rangle$ , что отсутствует в методе усреднения по быстрым осцилляциям.

В заключение отметим, что значения коэффициента диффузии  $D_0 \geq 1$  соответствует области сильных флуктуаций параметров среды, в то время как формулы теории возмущений и метода усреднения по быстрым осцилляциям обоснованы только для слабых флуктуаций среды ( $D_n \ll 1$ ). Следовательно, полученные в работе [1] численные результаты показывают, что асимптотические разложения на самом деле имеют существенно большую область применимости, чем первоначально предполагалось.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Голанд В. И., Кляцкин В. И. О статистике собственных значений и собственных функций одномерной краевой волновой задачи // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 5. С. 828—833.
2. Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. М.: Наука, 1986. 256 с.
3. Саичев А. И. О статистике собственных чисел одномерной случайно-неоднородной краевой задачи // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. С. 183—188.

Тихоокеанский океанологический институт ДВО  
Академии наук СССР

Поступило в редакцию  
25.VIII.1988

#### ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПИСАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВЫТЕКАЮЩЕЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ЖИДКОСТИ

Гончаров В. С.

Строго говоря, вытекающие волны не являются собственными волнами границы раздела и не могут быть отнесены к «настоящим волнам» [1]. Они проявляют себя в том смысле, что при падении волны Рэлея на границу раздела с жидкостью в слоистой системе возбуждается волновое поле со структурой, близкой к структуре вытекающей волны [2]. Волновое поле со структурой вытекающей волны возбуждается при отражении бесконечно тонкого луча от границы раздела жидкость — твердое тело под углом Рэлея [3]. Именно в этом контексте вытекающие волны находят применение в акустоэлектронной диагностике жидкостей, методах неразрушающего контроля [4, 5]. Для определения параметров вытекающей волны (декремента  $\alpha$ , скорости  $V_L$ , угла излучения  $\theta_R$ ) в основном используются численные методы [1]. Известная приближенная формула для описания величины декремента обладает низкой точностью [6]. Графическое представление результатов численных расчетов дает возможность сделать определенные выводы о зависимости параметров вытекающей волны от параметров жидкости и твердого тела. Однако эти возможности ограничены, а точность количественного описания невелика. Приближенные формулы лишены этих недостатков, обладают гарантированной точностью, в том числе позволяют выяснить взаимозависимость параметров вытекающей волны.

Дисперсионное уравнение для вытекающей волны записывается в виде [1]

$$4k^2 qs - (k^2 + s^2)^2 = i \frac{\rho_f q k_t^4}{\rho_t p},$$

где  $q = (k^2 - k_l^2)^{1/2}$ ,  $s = (k^2 - k_t^2)^{1/2}$ ,  $p = (k_f^2 - k^2)^{1/2}$ ,  $k_l$ ,  $k_t$ ,  $k_f$  — волновые числа продольной и поперечной волн в твердом теле и продольной волны в жидкости,  $\rho_t$ ,  $\rho_f$  — плотности твердого тела и жидкости,  $k = k_L + i\alpha$ ,  $k_L = \omega / V_L$ .

В приближении  $\alpha \ll k_L$  можно найти решение дисперсионного уравнения для величин декремента и скорости вытекающей волны:

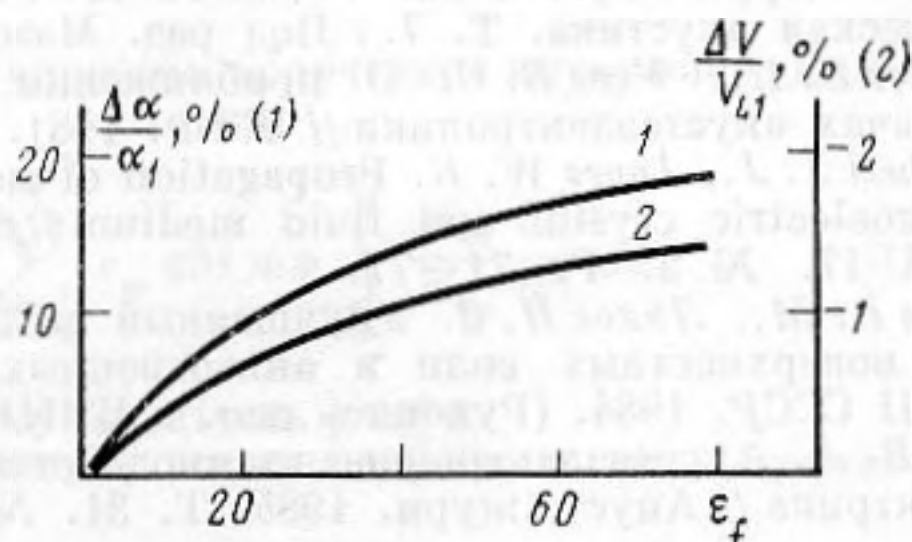
$$\begin{aligned} \alpha/k_L &= \rho_f V_f \gamma / \sqrt{1 - V_f^2/V_L^2}, \\ \gamma &= q_0 k_t^3 / 4 \rho_t V_t k_R^2 (q_0 s_0 A_s - 4 k_R (q_0 s_0)^{1/2}), \\ A &= 2 + k_R^2 (q_0^{-2} + s_0^{-2}), \\ V_L &= V_R (1 + \alpha^2 \kappa / k_L^2), \end{aligned} \quad (1)$$

$$(2)$$

где  $\gamma$  — комплекс параметров твердого тела,  $V_R$ ,  $V_f$  — скорости Рэлея и звука в жидкости,  $\kappa = (p_0^{-2} + q_0^{-2}) k_L^2$ ,  $p_0 = p (k = k_R)$ ,  $q_0 = q (k = k_R)$ ,  $k_R = \omega/V_R$ ,  $s_0 = s (k = k_R)$ .

Поле вытекающей волны в жидкости представлено неоднородной волной, уходящей от границы раздела под углом  $\theta_R$ . Используя результаты работы [1], несложно

Зависимости относительного изменения величин декремента вытекающей волны (1) и фазовой скорости (2) от относительной диэлектрической проницаемости жидкости: 1, 2, 3 —  $V_f = 1000, 1500, 2000$  м/с



показать, что  $\operatorname{tg} \theta_R = \operatorname{Re} p / \operatorname{Re} k$ . В рассматриваемом приближении соотношение преобразуется к виду  $\cos \theta_R = V_f/V_L$ . Эта формула справедлива с точностью до квадратичных поправок  $\alpha/k_L$ . Фактически пренебрегается тем, что скорость неоднородной волны в жидкости отличается от скорости однородной. Тогда запись формулы (1) несколько упрощается:

$$\alpha/k_L = \rho_f V_f \gamma / \sin \theta_R. \quad (3)$$

Проведенные расчеты показывают, что в диапазоне изменений акустического импеданса жидкости  $0,5 \cdot 10^6 < \rho_f V_f < 1,5 \cdot 10^6$  кг/м<sup>2</sup>с и скорости звука в жидкости  $1000 < V_f < 2000$  м/с относительные отличия точных и полученных по приближенным формулам значений скорости вытекающих волн составляют  $1 \cdot 10^{-3}$  и декремента  $1,5 \cdot 10^{-3}$ .

Как показано в [8], если твердое тело является пьезоэлектриком, параметры вытекающей волны зависят от диэлектрической проницаемости жидкости. Для выяснения характера этой зависимости рассчитаны параметры вытекающей волны в системе жидкость — YZ-срез ниобата лития. Расчеты проведены с использованием программных средств, основанных на матричном алгоритме [9].

Показано, что при изменении акустического импеданса жидкости в диапазоне  $(0,5-2) \cdot 10^6$  кг/м<sup>2</sup>с, скорости звука в жидкости в диапазоне  $(1000-2000)$  м/с и при величине диэлектрической проницаемости жидкости  $\epsilon_f = 1$  декремент и скорость вытекающей волны изменяются в соответствии с формулами (2) и (3). Величины  $\gamma$  и  $\kappa$  равны  $6,323 \cdot 10^{-9}$  и  $11,991$  м<sup>2</sup>/кг соответственно. Относительная точность аппроксимации рассчитанных значений  $\alpha/k_L$  не хуже 0,4% и  $V_L$  не хуже  $5 \cdot 10^{-3}$ %.

При увеличении относительной диэлектрической проницаемости жидкости  $\epsilon_f$  фазовая скорость вытекающей волны уменьшается, а декремент растет (рисунок). Акустические параметры жидкости  $\rho_f = 0,998 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $V_f = 1489$  м/с (вода). Варьирование акустическими параметрами жидкости в достаточно широких пределах практически не влияет на зависимости, представленные на рисунке. Для жидкостей с параметрами в указанном диапазоне зависимости  $(V_L - V_{L1})/V_{L1}$  и  $(\alpha - \alpha_1)/\alpha_1$  от  $\epsilon_f$  отличаются от зависимостей на рисунке менее чем на 1%, здесь  $V_{L1}$  и  $\alpha_1$  — параметры вытекающей волны при  $\epsilon_f = 1$ .

Следуя работе [10], проведем аппроксимацию зависимостей на рисунке функциями вида  $\Delta V/V_{L1} = -\kappa_1 F(\epsilon_f, \epsilon_1)$ ,  $\Delta \alpha/\alpha_1 = \kappa_2 F(\epsilon_f, \epsilon_2)$ ,  $F(\epsilon_f, \epsilon) = [(\epsilon_f - 1)\epsilon] / [(\epsilon + 1)(\epsilon_f + \epsilon)]$ , где  $\kappa_1, \kappa_2, \epsilon_1, \epsilon_2$  — подгоночные параметры. Величины  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  близки величине диэлектрической проницаемости пьезоэлектрика. Аппроксимация осуществляется путем перебора параметров подгонки с целью минимизации разницы точных и приближенных значений  $\Delta V/V_{L1}$  и  $\Delta \alpha/\alpha_1$ . Получены следующие значения подгоночных параметров:  $\kappa_1 = 2,438 \cdot 10^{-2}$ ,  $\epsilon_1 = 47,8$ ,  $\kappa_2 = 28,7 \cdot 10^{-2}$ ,  $\epsilon_2 = 37,8$ . Точность аппроксимации не хуже 0,5%.

Результаты работы позволяют сделать следующие выводы. Основным измеряемым параметром является декремент вытекающей волны, все остальные параметры выражаются через него. В структурах пьезоэлектрик — жидкость влияние «диэлектрической» и механической нагрузки поверхности кристалла на параметры вытекающей волны можно разделить.

В заключение автор приносит благодарность Арапову А. В., любезно предоставившему в его распоряжение программные средства по расчету параметров вытекающих волн.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 136 с.
2. Васькова В. И., Викторов И. А., Талашев А. А. Дифракция света на поверхностных волнах на границе твердое тело — жидкость // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 4. С. 644—646.
3. Арапов А. В., Гончаров В. С., Яковкин И. Б. Отражение звуковых пучков от границы раздела жидкость — твердое тело при угле падения близком релеевскому // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 2. С. 238—240.
4. Арапов А. В., Гончаров В. С., Яковкин И. Б. Волны утечки в слоистой системе с жидкостью // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 6. С. 721—725.
5. Toda K., Nauma M. An interdigital transducer for Ultrasonic non destructive testing // J. Appl. Phys. 1982. V. 53. № 11. Pt. 1. P. 7247—7249.
6. Физическая акустика. Т. 7. / Под ред. Мэзона У. М.: Мир, 1974. С. 294—296.
7. Андреев В. П., Усов В. С. О приближении упругой квазиизотропности среды в задачах акустоэлектроники // ЖТФ. 1981. Т. 52. № 10. С. 2086—2087.
8. Campbell J. J., Jones W. R. Propagation of surface waves at the boundary between a piezoelectric crystal and fluid medium // IEEE Trans. Son. Ultrason. 1970. V. SU-17. № 2. P. 71—77.
9. Тазиев Р. М., Ляхов Н. З. Улучшенный алгоритм расчета параметров акустических поверхностных волн в анизотропных средах // Новосибирск: ИХТТИМС СО АН СССР, 1984. (Рукопись деп. в ВИНТИ 19.07.84. № 5235—84.)
10. Вьюн В. А. Акустоэлектронное взаимодействие ПАВ в структурах со слоем пьезоэлектрика // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 4. С. 459—463.

Институт физики полупроводников СО  
Академии наук СССР

Поступило в редакцию  
4.X.1988

УДК 534.21

## НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ НА ВЫТЯНУТОМ ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ

Доценко И. Е., Рыбак С. А.

В работе [1] получены формулы для рассеянного поля  $P_p$  в дальней зоне для всех углов отражения  $\alpha$ , за исключением углов внутри интервала  $(\alpha_0 - \Delta\alpha, \alpha_0 + \Delta\alpha)$ , где  $\alpha_0$  — угол между направлением распространения падающей плоской волны  $P_{\text{п}}$  и осью  $X$ , цилиндрической системы координат, совпадающей с осью вращения тела. Величина  $\Delta\alpha$  интервала указана в [1].  $P_p$  получается из интеграла Кирхгофа, где вместо  $(\partial P_p / \partial n)|_s$  в потенциале простого слоя  $P_1$  подставляется точное значение  $(\partial P_{\text{п}} / \partial n)|_s$  (что следует из граничного условия на абсолютно жесткой поверхности тела), а в потенциале двойного слоя  $P_2$  вместо  $P_p|_s$  подставляется приближенное значение, взятое для цилиндра сравнения в данной точке. В [1] для  $P_1$  и  $P_2$  получены формулы

$$P_1 = \frac{kP_0}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i_m(\alpha) \cos m\varphi,$$

$$i_m(\alpha) = \int_{-L}^L e^{ik(\cos \alpha_0 - \cos \alpha)x} J_m(k \sin \alpha f(x)) [\sin \alpha_0 J_m'(k \sin \alpha_0 f(x)) -$$

$$- i f'(x) \cos \alpha_0 J_m(k \sin \alpha_0 f(x))] f(x) dx, \quad (1)$$

$$P_2 = - \frac{ikP_0}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \beta_m(\alpha) \cos m\varphi,$$

$$\beta_m(\alpha) = \int_{-L}^L e^{ik(\cos \alpha_0 - \cos \alpha)x} J_m(k \sin \alpha_0 f(x)) \frac{H_m(k \sin \alpha_0 f(x))}{H_m'(k \sin \alpha_0 f(x))} \times$$

$$\times [\cos \alpha f'(x) J_m(k \sin \alpha f(x)) - i \sin \alpha J_m'(k \sin \alpha f(x))] f(x) dx, \quad (2)$$

где  $k$  — волновое число среды,  $P_0$  — амплитуда падающей волны,  $R$  — расстояние в дальнем поле в сферической системе координат до тела,  $\alpha$  — полярный угол,  $\varphi$  — азимутальный,  $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n = 2, J_m(z)$  — функция Бесселя порядка  $m, f(x)$  —