АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXV 1989 Вып. 6

УДК 534.222.2

ВЫНУЖДЕННОЕ КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ ЗВУКА НА ПУЗЫРЬКАХ ГАЗА В ВОЛНОВОДЕ ©

Бутковский О. Я., Гиндлер И. В., Кравцов Ю. А.

Найдено усредненное по сечению волновода поле стоксовой компоненты при вынужденном комбинационном рассеянии звука на собственных колебаниях пузырьков в волноводе. Вычислены порог возбуждения и инкремент нарастания стоксовой волны, коррелированной с волной накачки. Показано, что порог возбуждения в волноводе совпадает с порогом в свободном пространстве, тогда как инкремент нарастания выше, чем для плоской волны в свободном пространстве. Последнее связано с дополнительным вкладом стоксовых волн, некоррелированных с волной накачки.

Вынужденное комбинационное рассеяние звука на газовых пузырьках в жидкости и основанная на этом явлении диагностика газовых пузырьков теоретически рассматривалась в работах [1–3]. В работе [4] данное явление наблюдалось экспериментально. Однако для ряда приложений, например для диагностики газопаровых пузырьков в трубах, необходимо знать особенности вынужденного комбинационного рассеяния звука (ВКРЗ) в волноводах. Основной интерес представляют здесь величины порога возбуждения ВКРЗ и инкремента нарастания стоксовой волны при наличии направляющих поверхностей. Этим вопросам и посвящена данная работа.

Процесс ВКРЗ описывается системой двух уравнений [1], состоящей из волнового уравнения для акустического давления с учетом двухфазности среды

$$\Delta p-c_0^{-2}\ddot{p}=-\rho_0 n\ddot{v}, \tag{1}$$

и уравнения колебания газовой полости, в котором сохраним только квадратичную нелинейность

$$\ddot{v}+\Omega_0^2 v+f\dot{v}-\alpha v^2-\beta(2\ddot{v}v+\dot{v}^2)=-\varepsilon p. \tag{2}$$

Здесь точка означает производную по времени, p_0 — равновесное давление в среде, ρ_0 — плотность жидкости, Q — добротность колебаний пузырька, n — концентрация пузырьков, Ω_0 — частота собственных колебаний пузырька, v_0 — равновесный объем газового пузырька, R_0 — его равновесный радиус, γ — показатель адиабаты. Кроме того, введены следующие обозначения: $\Omega_0^2=3\gamma p_0/\rho_0 R_0^2$, $\alpha=(\gamma+1)\Omega_0^2/2v_0$, $\beta=1/6v_0$, $\varepsilon=4\pi R_0/\rho_0$, $f=\Omega_0/Q=\Omega_0\delta$.

Решение системы (1), (2) ищем в виде

$$p=\frac{1}{2}[P_1(\mathbf{R})e^{-i\omega_1 t}+P_2(\mathbf{R})e^{-i\omega_2 t}+P_0(\mathbf{R})e^{-i\omega_0 t}+\text{к. с}], \tag{3}$$

$$v=\frac{1}{2}[v_1(\mathbf{R})e^{-i\omega_1 t}+v_2(\mathbf{R})e^{-i\omega_2 t}+v_0(\mathbf{R})e^{-i\omega_0 t}+\text{к. с}], \tag{4}$$

где $P_1(\mathbf{R})$ — комплексная амплитуда накачки с частотой ω_1, $P_2(\mathbf{R})$ — амплитуда стоксовой компоненты с частотой $\omega_2=\omega_1-\omega_0$, $P_0(\mathbf{R})$ — амплитуда волны с частотой ω_0, близкой к частоте собственных колебаний пузырьков, $\omega_0\simeq\Omega_0$. Через $v_j(\mathbf{R})$ обозначены комплексные амплитуды колебаний пузырька в точке $\mathbf{R}$ с соответствующей частотой.

Подставляя (3) и (4) в (1) и (2), в приближении заданной накачки, т. е. пренебрегая обратным воздействием стоксовой волны на волну накачки, получим уравнение для стоксовой волны

$$\Delta P_2(\mathbf{R})+[\tilde{k}_2^2+\Gamma_2^2(|P_1(\mathbf{R})|^2)]P_2(\mathbf{R})=0, \tag{5}$$

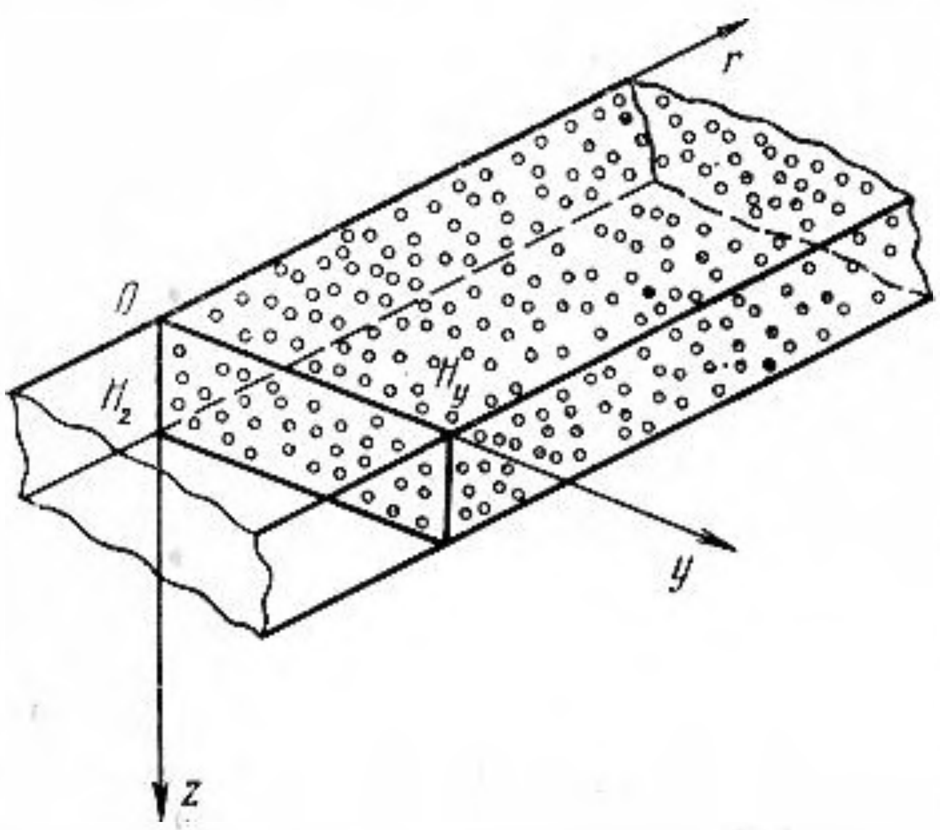
где

$$\tilde{k}_2^2=k_2^2+\rho_0 n\varepsilon\omega_2^2/\gamma_2, \quad k_2=\omega_2/c_0, \quad \mathbf{R}=\{x, y, r\},$$

$$\Gamma_2^2(|P_1(\mathbf{R})|^2)=D^2|P_1(\mathbf{R})|^2, \quad D^2=\rho_0 n\mu^2\varepsilon^3\omega_2^2/|\gamma_1|^2\gamma_2^2\gamma_0^*,$$

$\gamma_1=\Omega_0^2-\omega_1^2-if\omega_1$, $\gamma_2=\Omega_0^2-\omega_2^2-if\omega_2$, $\gamma_0=\Omega_0^2-\omega_0^2-if\omega_0$, $\mu=\beta(\omega_1^2+\omega_0^2-\omega_1\omega_0)-\alpha$. При выводе уравнения (5) мы пренебрегли параметрическим взаимодействием, т. е. отбросили член $\infty P_1P_0^*$. Это оправдано существованием волноводной дисперсии и дисперсии, обусловленной наличием пузырьков [5].

Таким образом, в приближении заданной накачки распространение стоксовой волны в волноводе описывается линейным волновым уравнением, в котором член Γ_2^2 зависит от интенсивности накачки и от координат. Поскольку Γ_2^2 — комплексная величина, это приводит к изменению фазовой скорости и коэффициента затухания (или нарастания) стоксовой волны в волноводе с пузырьками при включении накачки.



В дальнейшем для определенности будем рассматривать прямоугольный волновод (рисунок). Чтобы не учитывать отражение набегающих слева (из $r=-\infty$) волн накачки от границы пузырькового слоя, расположенного при $r=0$, будем предполагать, что величины a_{mn} и $b_{\nu l}$ (определение см. ниже) заданы при $r=+0$.

Разложим поле стоксовой волны P_2 по собственным функциям соответствующего однородного волновода (волновода сравнения). Коэффициенты такого разложения, вообще говоря, будут зависеть от r, но, учитывая, что $|\Gamma_2|^2 \ll |k_2|^2$, воспользуемся адиабатическим приближением [5], т. е. пренебрежем переходом части энергии стоксовой волны из ν-й моды в μ-ю моду из-за рассеяния на неоднородностях среды. В этом приближении каждая мода стоксовой компоненты распространяется независимо от других и самостоятельно приспосабливается к изменяющимся по r условиям распространения. Фактически это соответствует пренебрежению ВКРЗ назад.

В принятом приближении

$$P_2(\mathbf{R})=\sum_\nu\sum_l b_{\nu l}\varphi_\nu(z, r)\varphi_l(y, r)\exp\left[i\int_0^r \xi_{\nu l}(r')\,dr'\right]. \tag{6}$$

Здесь φ_ν и φ_l — ненормированные собственные функции волновода сравнения, зависящие от r, как от параметра, и удовлетворяющие уравнению

$$\Delta_\perp\varphi+[\tilde{k}_2^2+\Gamma_2^2(\mathbf{R})-\xi^2(r)]\varphi=0 \tag{7}$$

с соответствующими граничными условиями на стенках волновода.

В дальнейшем будем интересоваться не полем $P_2(\mathbf{R})$, а его интенсивностью $|P_2(\mathbf{R})|^2$, усредненной по сечению волновода, т. е. величиной

$$\bar{I}_s(r)=(H_zH_y)^{-1}\int_0^{H_z}dz\int_0^{H_y}dy\,|P_2(\mathbf{R})|^2=$$

$$=(H_zH_y)^{-1}\int_0^{H_z}dz\int_0^{H_y}dy\left\{\sum_\nu\sum_l|b_{\nu l}\varphi_\nu\varphi_l|^2\times\right.$$

$$\times \exp\left[-2\,\mathrm{Im}\int\limits_0^r \xi_{\nu l}(r')\,dr'\right]+\Sigma'\Bigg\}. \tag{8}$$

В формуле (8) выделена сумма диагональных членов с попарно совпадающими индексами, а через Σ' обозначена сумма по четырем попарно несовпадающим индексам, отвечающая интерференционным слагаемым. При усреднении по сечению волновода эти быстроосциллирующие слагаемые дадут пренебрежимо малый вклад в усредненную интенсивность $\bar{I}_s(r)$. Воспользовавшись условием нормировки собственных функций

$$\int\limits_0^{H_z} dz\,\varphi_\nu^2(z)=N_z^2, \qquad \int\limits_0^{H_y} dy\,\varphi_l^2(y)=N_y^2,$$

запишем (8) в виде

$$\bar{I}_s(r)=\sum_\nu\sum_l N_z^2N_y^2(H_zH_y)^{-1}|b_{\nu l}|^2\exp\left[-2\,\mathrm{Im}\int\limits_0^r \xi_{\nu l}(r')\,dr'\right]. \tag{9}$$

В случае одночастотной монохроматической накачки при получении ненулевого решения для стоксовой компоненты необходимо ввести источники стоксовой частоты, соответствующие спонтанному рассеянию, которое является затравочным для ВКРЗ. Вместо этого, как и в работе [9], будем полагать, что при $r=+0$, т. е. на границе пузырькового слоя, имеется слабая стоксовая волна с заданным распределением амплитуд мод $b_{\nu l}$. Таким образом, задача сводится к отысканию постоянных распространения мод стоксовой частоты, зависящих от интенсивности накачки.

Постоянные распространения $\xi_{\nu l}$ найдем, воспользовавшись теорией возмущений для несамосопряженных волновых задач. Пусть $\xi_{\nu l}^{(0)}$ удовлетворяет уравнению (7) без малого параметра Γ_2^2. Используя метод, описанный в работах [6—8], нетрудно показать, что в первом порядке теории возмущений

$$\xi_{\nu l}(r)=\xi_{\nu l}^{(0)}+\xi_{\nu l}^{(1)}(r),$$

$$\xi_{\nu l}^{(1)}(r)\simeq(2N_z^2N_y^2\xi_{\nu l}^{(0)})^{-1}\int\limits_0^{H_z} dz\int\limits_0^{H_y} dy\,\varphi_\nu^2\varphi_l^2\Gamma_2^2(\mathbf{R}). \tag{10}$$

В выражение для Γ_2^2 входит интенсивность накачки $|P_1(\mathbf{R})|^2$. Представим поле накачки в виде суммы мод и по аналогии с выводом формулы (9) отбросим быстроосциллирующие слагаемые в выражении для $|P_1(\mathbf{R})|^2$. Тогда

$$\xi_{\nu l}^{(1)}(r)\simeq\frac{D^2}{2\xi_{\nu l}^{(0)}}\sum_m\sum_n\frac{|a_{mn}|^2}{N_z^2N_y^2}\int\limits_0^{H_z} dz\int\limits_0^{H_y} dy\,\varphi_\nu^2\varphi_l^2|\psi_m\psi_n|^2e^{-2\,\mathrm{Im}\,h_{mn}r}, \tag{11}$$

где h_{mn} — комплексные постоянные распространения мод накачки, величины $|a_{mn}|^2$ характеризуют распределение энергии накачки по модам, ψ_m, ψ_n — комплексные собственные функции волновода, соответствующие волне накачки. В отличие от обычной теории возмущений в формуле (10) под знаком интеграла стоит квадрат собственной функции волновода $\varphi^2_{\nu,l}$, а не квадрат ее модуля. Благодаря этому возможен учет изменения как фазовой скорости, так и коэффициента затухания волны стоксовой частоты. Для малых расстояний r можно пренебречь затуханием волны накачки, $\mathrm{Im}\,h_{mn}r\ll1$, и из формулы (9) с точностью до постоянного множителя следует

$$\bar{I}_s(r)=\sum_\nu\sum_l\exp[-2\,\mathrm{Im}(\xi_{\nu l}^{(0)}+\xi_{\nu l}^{(1)})r]. \tag{12}$$

Из формулы (12) видно, что в рассматриваемом приближении нарастание стоксовой волны возможно при условии

$$0<\operatorname{Im}\xi_{\nu l}^{(0)}<-\operatorname{Im}\xi_{\nu l}^{(1)}. \tag{13}$$

Мнимая часть поправки к постоянной распределения в самом деле может быть отрицательной, поскольку величина $D^2/\xi_{\nu l}^{(0)}$ практически чисто мнимая, причем $\operatorname{Im} D^2<0$, а интегралы в формуле (10) — практически чисто действительные для не слишком близких к критическим номеров мод. Заметим, что условие (13) не выходит за рамки применяемого здесь метода, поскольку для применимости теории возмущений требуется лишь малость модуля поправки $|\xi_{\nu l}^{(1)}|$ по сравнению с $|\xi_{\nu l}^{(0)}|$. Поскольку в многомодовых волноводах для номеров мод, не слишком близких к критическим, выполнено условие $\operatorname{Re}\xi_{\nu l}^{(0)}\gg\operatorname{Im}\xi_{\nu l}^{(0)}$, для применимости теории возмущений можно потребовать выполнение неравенства $\operatorname{Re}\xi_{\nu l}^{(1)}\ll\operatorname{Re}\xi_{\nu l}^{(0)}$, которое действительно может быть удовлетворено с одновременно выполнением условия $|\operatorname{Im}\xi_{\nu l}^{(1)}|>|\operatorname{Im}\xi_{\nu l}^{(0)}|$.

Рассматривая многомодовый (число слабозатухающих мод $M+N\gg1$) прямоугольный волновод с абсолютно мягкой верхней границей (при $z=0$) и тремя абсолютно жесткими стенками и принимая распределение интенсивности накачки по модам равномерным, $|a_{mn}|^2=|a_0|^2$, из выражения (11) получаем

$$\operatorname{Im}\xi_{\nu l}^{(1)}\simeq MN|a_0|^2\operatorname{Im}D^2/4\xi_{\nu l}^{(0)}. \tag{14}$$

Выражение (14) получено при учете лишь тех мод, которые удовлетворяют условию фазового синхронизма [10] и обусловливают наиболее сильный вклад в возбуждение стоксовой компоненты поля в волноводе, а именно моды с попарно совпадающими индексами, $\nu=n$, $l=m$ (при сделанных выше предположениях это соответствует тому, что фазовая скорость стоксовых компонент приближается к фазовой скорости моды накачки).

Считая для простоты распределение интенсивности затравочных флуктуационных колебаний по модам также равномерным, т. е. полагая $|b_{\nu l}|^2=|b_0|^2$, получаем

$$\begin{gathered}\bar I_s(r)\simeq|b_0|^2\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\exp(-2\beta_{\nu l}r),\\ \beta_{\nu l}=\operatorname{Im}(\xi_{\nu l}^{(0)}+|a_0|^2MND^2/4\xi_{\nu l}^{(0)}).\end{gathered} \tag{15}$$

Уровень возбуждения (порог) находится из условия $\beta_{\nu l}<0$, которое с определенных номеров мод ν, l не может быть удовлетворено, поскольку $\operatorname{Im}\xi_{\nu l}^{(0)}$ увеличивается с увеличением номера моды. Таким образом, при любом фиксированном уровне накачки будет наблюдаться обеднение модового состава стоксовой волны при распространении вдоль волновода.

Учитывая, что $|a_0|^2$ имеет смысл интенсивности накачки, приходящейся на одну моду, величину $|a_0|^2MN\simeq I_p$ следует рассматривать как оценку интенсивности накачки. Из выражения (14) следует, что в рамках применяемого в данной работе приближения уровень порога накачки слабо зависит от числа мод. При удалении границ волновода к бесконечности $\xi_{\nu l}^{(0)}$ стремится к $\tilde k_2$, и выражение (14) сводится к результатам для плоской волны, полученным Заболотской [1]. В самом деле, поскольку $\operatorname{Im}\xi_{\nu l}^{(0)}=\operatorname{Im}(\tilde k_2{}^2-\varkappa_\nu{}^2-\eta_l{}^2)^{1/2}$, $\varkappa_\nu\simeq\nu\pi/H_z$, $\eta_l\simeq l\pi/H_y$, для высоких частот, ω_1, $\omega_2\gg\omega_0$ и низших (слабозатухающих) мод получим; $\operatorname{Im}\xi_{\nu l}^{(0)}\simeq\operatorname{Im}\tilde k_2=4\pi R_0\delta n\Omega_0/\omega_2k_2$, где δ — коэффициент затухания колебаний пузырька.

В итоге каждый член ряда в формуле (15) будет давать примерно одинаковый вклад в усредненную интенсивность стоксовой компоненты, $\bar{I}_s(r)\simeq|b_0|^2MN\exp[(-2\,\mathrm{Im}\,\tilde{k}_2-I_p\,\mathrm{Im}\,D^2/2\tilde{k}_2)r]$. Учитывая, что $|b_0|^2MN$ имеет смысл суммарной интенсивности спонтанных стоксовых колебаний I_{0s}, приходим к формуле $\bar{I}_s(r)\simeq I_{0s}\exp[-r(2\,\mathrm{Im}\,\tilde{k}_2+I_p\,\mathrm{Im}\,D^2/2\tilde{k}_2)]$, совпадающей с результатом Заболотской, если пренебречь затуханием волн в пузырьковом слое, $\mathrm{Im}\,\tilde{k}_2\ll\mathrm{Re}\,\tilde{k}_2$.

Таким образом, в данном приближении порог возбуждения и полный инкремент нарастания ВКРЗ в волноводе такой же, как и в свободном пространстве. Однако, как показано в работах [9, 10], посвященных ВКР в оптике, заметный вклад в амплитуду моды стоксовой компоненты с номерами ν, l могут давать и моды накачки с близкими номерами m, n, несмотря на то, что фазовый синхронизм этих мод при распространении вдоль волновода в конце концов нарушается.

Из сказанного следует, что наблюдение ВКРЗ в волноводе в сравнении с квазиплоскими и сфокусированными пучками имеет некоторые преимущества. Во-первых, в волноводе с достаточно хорошо отражающими стенками спадание интенсивности накачки с расстоянием происходит медленнее, чем в квазиплоских пучках. Следует ожидать, что в волноводе возможно возбуждение (и наблюдение) ВКРЗ при сравнительно небольшом превышении порога. Во-вторых, в волноводе появляются условия для обращения волнового фронта стоксовой волны на интерференционной структуре поля накачки [10]. Экспериментальный порог ВКР в оптике определяется очень низким уровнем тепловых шумов, определяющих уровень спонтанного стоксова излучения и имеющих уровень порядка $10^{-11}\div\div10^{-13}$ относительно уровня накачки. Кроме этого, первая стоксова компонента ВКР наблюдается только точно вперед или назад, поэтому для экспериментального наблюдения ВКР в оптике необходимо усиление стоксовой компоненты до уровня накачки. Именно это определяет большую величину «магического логарифма» [10]. В этих условиях поглощением стоксовой волны можно, очевидно, пренебречь. Как показали эксперименты по ВКРЗ [4], сильный шум, сопровождающий генерацию пузырьков (порядка $10^{-4}\div10^{-5}$ от уровня накачки), и, следовательно, более высокий уровень спонтанного стоксова излучения приводит к тому, что для наблюдения ВКРЗ высокий инкремент нарастания не требуется.

Авторы выражают благодарность Н. Ф. Пилипецкому за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Заболотская Е. А.* Нелинейные акустические и комбинированные методы спектроскопии газовых пузырьков в жидкости // Тр. ФИАН. 1984. Т. 156. С. 31–41.
2. *Butkovsky O. Ya., Zabolotskaya E. A., Kravtsov Yu. A.* Possibilities of active nonlinear spectroscopy of inhomogeneous condensed media // Acta phys. slov. 1986. V. 36. № 1. P. 58–63.
3. *Власов Д. В., Стрельцов В. Н.* Вынужденное комбинационное рассеяние звука в одночастотном внешнем поле // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 1. С. 32–38.
4. *Бутковский О. Я., Заболотская Е. А., Кравцов Ю. А.* Экспериментальное наблюдение вынужденного комбинационного рассеяния звука на газовых пузырьках в воде // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 1. С. 163–164.
5. *Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П.* Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 264 с.
6. *Турбинер А. В.* Задача о спектре в квантовой механике и процедура «нелинеаризации» // Успехи физ. наук. 1984. Т. 144. № 1. С. 35–78.
7. *Гиндлер И. В.* Теория возмущений для несамосопряженных волноводных задач // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 6. С. 1003–1006.
8. *Гиндлер И. В., Козельский А. Р.* Применение процедуры «нелинеаризации» для нахождения спектра несамосопряженных волноводных задач: Препринт № 51. М.: ИОФ АН СССР, 1988. 51 с.
9. *Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981. 640 с.
10. *Беспалов В. И., Пасманик Г. А.* Нелинейная оптика и адаптивные лазерные системы. М.: Наука, 1986. 120 с.

Институт общей физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24.X.1988