АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXV 1989 Вып. 6

УДК 53:51

# ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ НА АКУСТИЧЕСКИ МЯГКИХ И ЖЕСТКИХ РАССЕИВАТЕЛЯХ ©

*Горюнов А. А.*

Получены выражения, позволяющие рассматривать обратные задачи рассеяния скалярных волн в плавно неоднородной среде и обратные граничные задачи I и II рода с единой точки зрения. Рассмотрена задача определения формы граничного рассеивателя на основании измерения рассеянного им поля. Предложен алгоритм решения обратной задачи рассеяния на граничных рассеивателях, состоящий в получении и решении уравнения Фредгольма I рода относительно характеристической функции рассеивателя, описывающей его форму. Найденные выражения позволяют производить локационную идентификацию типа граничного рассеивателя (жесткий или мягкий).

Известно большое количество работ, посвященных задачам распространения акустических скалярных волн в плавно неоднородных средах [1, 2], а также соответствующим обратным задачам, состоящим в определении медленно меняющихся характеристик среды по данным рассеяния поля на этих плавных неоднородностях [3].

Задачами принципиально иного типа являются граничные задачи рассеяния, исчерпывающая теория которых также существует в настоящий момент [4]. Под решением обратной задачи в этом случае понимается реконструкция формы рассеивающей границы и определение граничного условия [5].

Несмотря на существенные различия в постановке и методике решения плавно неоднородных и граничных задач, с физической точки зрения представляется почти очевидной возможность сведения плавно неоднородных задач к граничным с помощью предельного перехода, устремляющего «степень плавности» к нулю. При этом плавные функции, описывающие пространственное изменение характеристик среды, переходят в обобщенные функции. Действительно, простой и двойной слои, играющие фундаментальную роль в решении граничных задач, могут рассматриваться в принципе как некоторые обобщенные «тонкопленочные» рассеиватели. Тип такого «тонкопленочного» рассеивателя должен определяться видом граничного условия исходной задачи.

Поиск этого соответствия, т. е. выполнение перехода от формальной совокупности «уравнение в однородной среде плюс граничные условия на заданной границе» к формализму «неоднородность пленочного типа заданной формы в однородной среде», и составляет цель данной работы.

Ясно, что кроме методологической ценности рассматриваемый вопрос имеет принципиальное значение при локационной идентификации рассеивателей, а также при анализе задач смешанного типа, возникающих в случае кусочно гладких сред, типичным представителем которых является, например, океанское дно (плавно неоднородный осадочный чехол, лежащий на базальтовой плите).

Пусть $U_0$ — первичное облучающее поле (здесь и далее ради простоты полем называется спектральная амплитуда поля), а $f_0$ — источники этого поля, связанные с ним уравнением Гельмгольца: $\Delta U_0+k^2U_0=f_0$. Обозначим $U$ и $u$ — полное и рассеянное поля соответственно. Очевидно, всюду должно выполняться $U=U_0+u$. Предположим, что рассеиватель достаточно произвольной формы $s$ ($s$ — поверхность рассеивателя) описан харак-

теристической функцией

$$\gamma(r)=\begin{cases}1, & \text{если } \mathbf{r} \text{ внутри рассеивателя,}\\ 0, & \text{если } \mathbf{r} \text{ вне рассеивателя } (\mathbf{r}\in R_3).\end{cases}$$

Рассмотрим для определенности I внешнюю краевую задачу. Окружим рассеиватель поверхностью $S$, не содержащей внутри себя источники первичного поля $f_0$. Тогда в области $\mathscr{R}$, ограниченной поверхностями $s$ и $S$, поле $U$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца, обращаясь в нуль на поверхности рассеивателя: $U|_s=0$. Предполагая, что $s$ и $S$ класса $C^2$ и применяя справедливую в этом случае формулу Грина [6, 7], получим

$$\int\limits_{\mathscr{R}}(U\Delta G-G\Delta U)\,dr=\int\limits_{S}\left(U\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS+\int\limits_{s}\left(U\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds. \quad (1)$$

Здесь $n$ — внешняя к $\mathscr{R}$ нормаль, а $G$ — функция Грина свободного неограниченного пространства, удовлетворяющая в $R_3$ уравнению $\Delta G+k^2G=\delta$. Преобразуя (1) и предполагая, что точка наблюдения содержится в $\mathscr{R}$, имеем

$$U=U_0-\int\limits_{s}G\frac{\partial U}{\partial n}\,ds. \quad (2)$$

К правой части (2) можно прибавить член $\int\limits_{s}U\,dG/\partial n\,ds$, равный нулю в силу граничного условия. Тогда

$$U=U_0-\int\limits_{s}\left(G\frac{\partial U}{\partial n}+U\frac{\partial G}{\partial n}\right)ds=U_0-\int\limits_{s}\frac{\partial}{\partial n}(UG)\,ds=$$
$$=U_0+\int\limits_{-\infty}^{\infty}UG\frac{\partial}{\partial n}(\delta_s)\,dr=U_0+\int\limits_{-\infty}^{\infty}UG\Delta\gamma\,d\mathbf{r}=G*f_0+G*(\Delta\gamma U). \quad (3)$$

Здесь $\partial(\delta_s)/\partial n$ — двойной слой на поверхности $s$, а $*$ означает свертку. Из выражения (3) следует, что решение I краевой задачи для уравнения Гельмгольца сводится к уравнению Липмана — Швингера в среде с неоднородностью типа рефракционной

$$\Delta U+k^2U=f_0+\Delta\gamma U, \quad (4)$$

или $\Delta U+(k^2-\Delta\gamma)U=f_0$.

В случае II краевой задачи аналогичным образом приходим к уравнению, отличающемуся знаком перед $\Delta\gamma$

$$\Delta U+(k^2+\Delta\gamma)U=f_0. \quad (5)$$

Сравним (4) и (5) с известным уравнением для задачи рефракции $\Delta U+(k^2-\varepsilon(\mathbf{r}))U=f_0$, где $\varepsilon(r)=\omega^2(1/c_0^2-1/c^2(\mathbf{r}))$. Здесь $c_0$ — постоянная фазовая скорость звука в однородной среде, окружающей рассеиватель, $c(\mathbf{r})$ — фазовая скорость звука внутри рассеивателя, $\omega$ — круговая частота, $k=\omega/c_0$. Сравнение показывает, что рассеивающая неоднородность в случае краевых задач описывается обобщенной функцией $\pm\Delta\gamma$, в то время как в задаче рефракции $\varepsilon(\mathbf{r})$ подразумевается гладкой. Кроме того, $\Delta\gamma$ определяется только формой рассеивателя и не зависит, подобно $\varepsilon$, от частоты.

Взяв за основу уравнение (4), напишем для него формальный борновский ряд по перерассеяниям: $U=U_0+\sum\limits_{n}(G*\Delta\gamma)^nU_0$. Можно показать, что любое конечное борновское приближение уравнения (4) имеет решение относительно $U$, причем единственное. Действительно, в приближении

однократного рассеяния получим уравнение $\Delta U_1+k^2U_1=f_0+\Delta\gamma U_0$, имеющее единственное решение в классе функций из $D'$, для которых существует свертка с $G$ (см. [6], с. 194). Это приближенное решение в соответствии с (3) имеет вид

$$U_1=U_0-\int\limits_s\left(G\frac{\partial U_0}{\partial n}+U_0\frac{\partial G}{\partial n}\right)ds. \tag{6}$$

Так как потенциал простого и двойного слоев переводит функции из класса $C(s)$ в $C(s)$, если $s$ — поверхность Ляпунова (а всякая поверхность $C^2$ есть поверхность Ляпунова) (см. [6], с. 400, 442, 443), то $U_1\in C(s)$ и для следующего приближения $\Delta U_2+k^2U_2=f_0+\Delta\gamma U_1$ аналогично получаем $U_2$ — единственное решение класса $C(s)$.

Таким образом, из свойств потенциала простого и двойного слоев следует, что любое конечнократное борновское приближение уравнений (4) и (5) имеет единственное решение, которое вне $s$ бесконечно дифференцируемо, удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца (кроме области, в которой $f_0\neq 0$) и условию излучения, а на $s$ принадлежит $C(s)$. Так как внешние краевые задачи I и II рода однозначно разрешимы при любых непрерывных граничных значениях [4], то можно сформулировать следующее утверждение.

Если борновский ряд уравнений (4) и (5) сходится, то решение (4) и (5) в силу единственности совпадает с решением соответствующей граничной задачи.

В ряде работ по обратным граничным задачам [5, 8] вместо точного решения (2) предлагалось использовать приближенное решение (приближение Кирхгофа)

$$U=U_0-\int\limits_{s_{\text{осв}}}G\frac{\partial U_0}{\partial n}ds \quad \text{и} \quad U=U_0+\int\limits_{s_{\text{осв}}}U_0\frac{\partial G}{\partial n}ds$$

— для I и II краевой задач соответственно. (Здесь $s_{\text{осв}}$ — освещенная часть рассеивателя). Как видно из (6), эти приближения, линеаризуя соответствующие уравнения, не являются борновским приближением в строгом смысле слова. Использование граничных условий в качестве дополнительной информации дает возможность применить «борновское приближение по первому члену на освещенной части поверхности рассеивателя», а именно вместо (6) написать

$$U\approx U_0-\int\limits_{s_{\text{осв}}}\left(G\frac{\partial U_0}{\partial n}+U\frac{\partial G}{\partial n}\right)ds=U_0-\int\limits_{s_{\text{осв}}}G\frac{\partial U_0}{\partial n}ds, \tag{7}$$

и аналогично для II краевой

$$U\approx U_0+\int\limits_{s_{\text{осв}}}\left(G\frac{\partial U}{\partial n}+U_0\frac{\partial G}{\partial n}\right)ds=U_0+\int\limits_{s_{\text{осв}}}U_0\frac{\partial G}{\partial n}ds. \tag{8}$$

Известно, что приближения Кирхгофа с точки зрения строгой теории дифракции внутренне противоречивы. Действительно, точное выполнение граничного условия $U|_s=0$, например, (для I краевой задачи) противоречит, вообще говоря, предположению $\partial U/\partial n|_s=\partial U_0/\partial n|_s$. Однако многочисленное использование приближений Кирхгофа для численных решений задач скалярной дифракции показало их высокую работоспособность.

Выражения (7), (8) дают возможность рассмотреть приближения Кирхгофа как результат своеобразного «уточнения» приближения Борна и вместе с тем дают возможность численно оценить величину такого уточнения как относительно строгого решения задачи рассеяния — с одной стороны, так и относительно ее решения в борновском приближении — с другой.

Анализируя выражения (7), (8), необходимо подчеркнуть еще один аспект. В настоящий момент имеются два общеизвестных метода линеаризации уравнений рассеяния — метод малых возмущений (приближение Борна) и метод плавных изменений (приближение Рытова). Выражения

(7), (8), полученные из (4), (6), показывают, что приближения Кирхгофа являются способом линеаризации уравнения рассеяния на граничных препятствиях, не совпадающим ни с аппроксимацией Борна, ни с аппроксимацией Рытова.

Решение обратной граничной задачи с учетом перерассеяния можно получить, решая уравнение (4) или (5) относительно $\Delta\gamma$, так же, как это делалось в [3]. При этом если точность решения может быть обеспечена достаточно высокой, то проблема идентификации не встает — амплитуда $\Delta\gamma$ с увеличением точности превысит конечные значения функций, описывающих плавные неоднородности $\rho$ и $c$. Изменение же знака при $\Delta\gamma$ дает возможность различить рассеиватели I и II рода. Нахождение собственно характеристической функции рассеивателя производится затем с помощью ньютонова потенциала $\gamma=-(1/4\pi|\mathbf{r}|)*\Delta\gamma$ в случае $R_3$.

Метод сведения обратных граничных задач к обратной задаче рефракции и решение последней в качестве вспомогательной является, видимо, далеко неоптимальным с вычислительной точки зрения. Попытка реализовать на ЭВМ алгоритм определения $\Delta\gamma$ — обобщенной функции в $R_3$ — приводит к чисто вычислительным трудностям, характер которых интенсивно стимулирует поиск более практичных способов оценки формы граничных рассеивателей.

В качестве перспективных в прикладном аспекте методов решения обратных граничных задач предлагались алгоритмы, основанные на промежуточном вычислении антенного потенциала рассеивателя [9, 10].

Антенным потенциалом рассеивателя называется непрерывная либо дискретная совокупность монополей, располагаемых внутри рассеивателя с целью имитации полем этих монополей поля, рассеянного граничным рассеивателем. Антенный потенциал, введенный впервые В. Д. Купрадзе [10], дает возможность аппроксимировать рассеянное поле с произвольной фиксированной точностью, начиная от границы (граничное условие выполняется с заданной точностью) и далее, во всем внешнем по отношению к рассеивателю пространстве. Свойства и возможности антенного потенциала применительно к краевым задачам рассеяния определены в [11, 12]; вопросы, связанные с оценкой антенного потенциала на основании измерения рассеянного поля в области, удаленной от рассеивателя, освещены в [13].

Рассмотрим для примера, следуя [9], алгоритмы определения формы акустически жесткого рассеивателя. Из (1) имеем

$$u=U=U_0=\int\limits_s U\frac{\partial G}{\partial n}ds=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma\nabla(U\nabla G)\,d\mathbf{r}=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma(\nabla U\,\nabla G-k^2UG)\,d\mathbf{r}. \tag{9}$$

При выводе (9) учитывалось, что рассеянное поле $u$ наблюдается на удалении от рассеивателя, следовательно, аргумент функции $G$ не обращается в нуль и выполняется $\nabla^2G=-k^2G$.

Выражение (9) можно рассматривать как уравнение Фредгольма I рода относительно $\gamma$ с ядром $\nabla U\nabla G-k^2UG$. Однако входящее в состав ядра $U$ — полное поле внутри рассеивателя — является функцией в той же степени неизвестной, что и $\gamma$. Определить $U$ тем не менее можно, используя антенный потенциал. Эта процедура выполняется в два этапа. На первом этапе ищется собственно антенный потенциал на основании измерения рассеянного поля $u$. На втором этапе вычисляется полное поле $U$ внутри рассеивателя — оно является суммой рассеянного поля, создаваемого антенным потенциалом и первичного облучающего поля $U_0$.

Метод антенного потенциала дает возможность, иными словами, найти $U$ внутри рассеивателя с помощью линейного преобразования

$$U=Fu+U_0 \tag{10}$$

и определяет алгоритм построения линейного оператора $F$. (Оператор $F$ определяется геометрией приемной антенной решетки и значением исполь-

зуемой частоты $\omega$; для любой конкретной задачи он может быть вычислен заранее.)

Подставляя (10) в (9), получаем окончательно

$$u=-\int_{-\infty}^{\infty}\gamma[\nabla(Fu+U_0)\nabla G-k^2(Fu+U_0)G]d\mathbf{r}. \tag{11}$$

Это уравнение определяет нелинейный алгоритм обработки рассеянного поля $u$ с целью реконструкции формы $\gamma$ акустически жесткого рассеивателя.

В случае акустически мягкого рассеивателя с помощью аналогичных преобразований приходим к неожиданному результату

$$\int_{-\infty}^{\infty}\gamma[\nabla(Fu+U_0)\nabla G-k^2(Fu+U_0)G]d\mathbf{r}=0. \tag{12}$$

Интеграл в (12) обращается в нуль из-за того, что $u$ внутри рассеивателя имеет особенность — антенный потенциал, и, следовательно,

$$u=-\int_s G\frac{\partial U}{\partial n}ds=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma\nabla(G\nabla U)d\mathbf{r}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(\nabla G\,\nabla U+G\nabla^2U)d\mathbf{r}=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(\nabla G\,\nabla U-k^2GU+$$

$$+Gf)d\mathbf{r}=u+\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(\nabla G\,\nabla U-k^2GU)d\mathbf{r}.$$

Здесь $f$ — антенный потенциал: $u=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma Gf\,d\mathbf{r}$.

Выражение (12) не является уравнением, на основании которого можно однозначно определить $\gamma$, зная $u$. Выражение (12) правильней рассматривать как некоторую связь, налагаемую на $u$ и $\gamma$, как своеобразное «условие акустической мягкости».

Таким образом, алгоритм решения обратной задачи рассеяния, предложенный в [9], пригоден в случае II граничного условия, но неприемлем для I граничного.

С помощью теоремы Фубини ситуацию можно симметризовать, получив и для акустически мягкого рассеивателя уравнение, дающее возможность оценить $\gamma$ по $u$:

$$u=-\int_{-\infty}^{\infty}G\nabla\gamma\,\nabla U\,d\mathbf{r}=-\int_{-\infty}^{\infty}G\nabla\gamma\nabla(Fu+U_0)d\mathbf{r}. \tag{13}$$

Интересно отметить, что интеграл в (13) в случае акустически жесткого рассеивателя обращается в нуль, а уравнение (13) становится «условием акустической жесткости».

В качестве итога, таким образом, имеем две пары выражений:

$$u=-\int_{-\infty}^{\infty}G\nabla\gamma\nabla(Fu+U_0)d\mathbf{r},$$

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}[\nabla(Fu+U_0)\nabla G-k^2G(Fu+U_0)]d\mathbf{r}$$

— для акустически мягкого рассеивателя, и

$$0=\int_{-\infty}^{\infty} G\nabla\gamma\nabla(Fu+U_0)\,d\mathbf{r},$$

$$u=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(\nabla(Fu+U_0)\nabla G-k^2G(Fu+U_0)]\,d\mathbf{r}$$

— для жесткого.

Эти формулы могут быть использованы для классификации рассеивателей (мягкий — жесткий), но реконструкция $\gamma$ в случае мягкого рассеивателя затруднена по тем же причинам, что и восстановление $\gamma$ на основании (4) или (5).

Вышеуказанные трудности ликвидируются путем модификации искомого объекта. Используем тот факт, что $S$ — некоторая поверхность, заведомо окружающая искомый рассеиватель, задана (см. пояснение к (1)). Введем $\gamma_{\mathcal{R}}$ — характеристическую функцию области $\mathcal{R}$,— области, ограниченной поверхностями $s$ и $S$:

$$\gamma_{\mathcal{R}}=\begin{cases}1, & \text{если } \mathbf{r} \text{ внутри } \mathcal{R},\\ 0, & \text{если } \mathbf{r} \text{ вне области } \mathcal{R}.\end{cases}$$

Ясно, что $\gamma_{\mathcal{R}}$ однозначно определяет форму рассеивателя, так как $\gamma+\gamma_{\mathcal{R}}$ является характеристической функцией области, ограниченной $S$ — известной (заданной) поверхностью.

Предположим, что точка наблюдения поля находится во внешней относительно поверхности $S$ области. Тогда, применяя формулу Грина, получаем для мягкого рассеивателя

$$0=-\int_s G\frac{\partial U}{\partial n}\,ds-\int_S G\frac{\partial U}{\partial n}\,dS+\int_S U\frac{\partial G}{\partial n}\,dS=$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_{\mathcal{R}}\nabla(G\nabla U)\,d\mathbf{r}+\int_S U\frac{\partial G}{\partial n}\,dS,$$

откуда

$$\int_S U\frac{\partial G}{\partial n}\,dS=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_{\mathcal{R}}(\nabla G\,\nabla U-k^2GU)\,d\mathbf{r}.$$

Для случая акустически жесткого рассеивателя аналогично —

$$\int_S G\frac{\partial U}{\partial n}\,dS=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_{\mathcal{R}}(\nabla G\,\nabla U-k^2GU)\,d\mathbf{r}.$$

Наконец, выражая $U=Fu+U_0$ с помощью антенного потенциала, имеем окончательно:

$$\int_s (Fu+U_0)\frac{\partial G}{\partial n}\,dS=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_{\mathcal{R}}[\nabla G\nabla(Fu+U_0)-k^2G(Fu+U_0)]\,d\mathbf{r} \qquad (14)$$

— уравнение для мягкого рассеивателя, и

$$\int_s G\frac{\partial(Fu+U_0)}{\partial n}\,dS=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_{\mathcal{R}}[\nabla G\nabla(Fu+U_0)-k^2G(Fu+U_0)]\,d\mathbf{r} \qquad (15)$$

— для жесткого. Выражения (14) и (15) могут использоваться для локационной идентификации типа рассеивателя с привлечением теории ста-

тистических методов проверки гипотез. Вместе с тем (14) и (15) являются уравнениями Фредгольма I рода относительно $\gamma_{\mathcal{R}}$, определяющей однозначную форму рассеивателя. Методы решения уравнений Фредгольма I рода, а также трудности, возникающие при их решении, изучены в настоящий момент достаточно хорошо (см., например, [14]). Следует подчеркнуть, однако, специфическую особенность (14) и (15), состоящую в том, что решение их относительно $\gamma_{\mathcal{R}}$ можно существенно оптимизировать, учитывая при решении бинарный характер искомой функции.

В заключение автор выражает глубокую признательность доценту кафедры акустики физического факультета МГУ В. А. Бурову, который предложил тему данной работы и проявлял к ней неослабевающий интерес.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Келлер Дж. Б., Пападакис Дж. С.* Распространение волн и подводная акустика. М.: Мир, 1980. 229 с.
2. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. Изд. 2. § 19.
3. *Буров В. А., Горюнов А. А., Сасковец А. В.* Обратная задача акустического рассеяния на неоднородностях плотности и показателя преломления среды: Препринт. № 12/1983. М.: МГУ, 1983.
4. *Векуа И. Н.* О метагармонических функциях // Тр. Тбилиск. матем. ин-та, 1943. С. 105–174.
5. *Bojarski N. N.* A Survey of the Physical Optics Inverse Scattering Identity // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1982. V. AP–30. № 5. P. 980–989.
6. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
7. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965. 412 с.
8. *Левис П. М.* Обратная задача дифракции // Зарубежная радиоэлектроника, 1970. № 2. С. 100–112.
9. *Буров В. А., Горюнов А. А.* Обратная задача скалярной дифракции // Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон. 1980. Т. 21. № 6. С. 44–49.
10. *Заридзе Р. С.* Метод вспомогательных источников в прикладной электродинамике (памяти В. Д. Купрадзе) // Волны и дифракция-85. Кр. тез. и рефераты докл. IX Всесоюз. симп. дифракции и распространения волн (г. Телави, 1985). Тбилиси: Изд. Тбилиск. ун-та. 1985. Т. 1. С. 434–437.
11. *Кравцов В. В.* Приближение функций многих переменных антенным потенциалом // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233. № 1. С. 23–26.
12. *Кравцов В. В.* О равномерном приближении решения уравнения Гельмгольца антенным потенциалом // Вестн. Моск. ун-та, Вычисл. математика и кибернетика. 1977. № 2. С. 78–81.
13. *Буров В. А., Горюнов А. А., Сасковец А. В., Тихонова Т. А.* Обратные задачи рассеяния в акустике (обзор) // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 4. С. 433–449.
14. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 431 с.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
9.II.1988