АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXV 1989 Вып. 6

УДК 534.231

ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В ДНЕ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В МЕЛКОМ МОРЕ ©

Грудская О. Н., Грудский С. М., Ривелис Е. А.

В рамках модели однородного жидкого слоя постоянной глубины, лежащего на однородном упругом полупространстве, численно и аналитически изучается влияние скорости поперечных волн в дне c_τ и других параметров волновода на характеристики всех нормальных волн, участвующих в формировании дальнего поля точечного излучателя. Особое внимание уделяется исследованию нулевой моды и ее комплексного аналога, а также затухания квазираспространяющихся мод при всех возможных значениях c_τ.

Распространение звука в мелком море во многом определяется свойствами дна [1, 2], наличие в котором сдвиговых напряжений является важным фактором затухания звука. В ряде ситуаций скорость поперечных волн (c_τ) в осадочных породах невелика (300—500 м/с), что позволяет учитывать их влияние методом возмущений [3, 4]. Однако в последнее время интерес исследователей привлек случай c_τ=1000—1200 м/с [5], а в районах экспериментов известны участки дна в виде скальных пород, где c_τ превосходит скорость звука в воде (c). Поэтому интерес представляет весь физически возможный диапазон значений параметра c_τ, влияние которого на свойства мод, участвующих в формировании дальнего поля точечного монохроматического излучателя в модели «жидкий однородный слой постоянной глубины H на однородном упругом полупространстве» (МУД), посвящена настоящая работа. Поведение вещественных корней соответствующего дисперсионного уравнения было подробно исследовано в [6]. Поведение же комплексных корней, играющих здесь важную роль, изучено существенно хуже.

Вначале рассмотрим нулевую моду (НМ) и ее комплексный аналог — нулевую комплексную моду (НКМ) — отсутствующие в модели Пекериса и обладающие рядом специфических свойств. При этом, если НМ является аналогом волны Стоунли [1, 2, 7], то упоминания об НКМ в известной авторам литературе нет.

Далее рассмотрим ситуации, где НКМ может давать существенный вклад в дальнее поле точечного излучателя, а также исследуем модовые числа распространяющихся и квазираспространяющихся мод (модовые числа последних имеют малую мнимую часть).

Дисперсионное уравнение МУД имеет вид

$$\frac{\operatorname{tg}(\mathscr{K}\sqrt{1-\mu^2})}{\sqrt{1-\mu^2}}=-\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{(2\mu^2a^2-1)^2}{\sqrt{\mu^2-n_l^2}}-4\mu^2a^3\sqrt{\mu^2a^2-1}\right), \qquad (1)$$

где $\mathscr{K}=kH$, $k=\omega/c$, ω — круговая частота излучателя, $\varkappa$ — отношение плотности жидкого слоя к плотности дна, $n_l=c/c_l$ и $n_\tau=c/c_\tau$ — показатели преломления продольных (скорость c_l) и поперечных (скорость c_τ) волн в дне соответственно, $a=n_\tau^{-1}$.

Уравнение (1) рассматривается в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im}\mu\geqslant 0$) с разрезами по вертикальным лучам $R_l=\{\mu|\operatorname{Re}\mu=n_l,\ \operatorname{Im}\mu\geqslant 0\}$ и $R_\tau=\{\mu|\operatorname{Re}\mu=n_\tau,\ \operatorname{Im}\mu\geqslant 0\}$. Рис. 1, на котором изображены графики функций $g_1(\mu)$ и $g_2(\mu)$ (левая и правая части (1) соответственно), показывает, что вещественные корни (1) могут быть расположены только на луче $]n_\tau, \infty[$. Правый корень (1), отвечающий нулевой моде ($\mu=\mu_0$), индуцируясь пересечением графика $g_2(\mu)$ с «последней» ветвью графика $g_1(\mu)$, сущест-

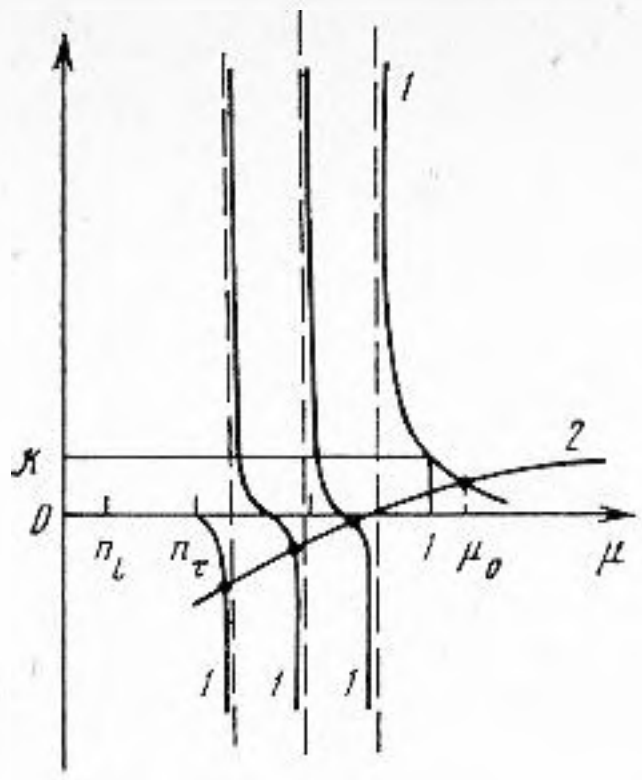

Рис. 1

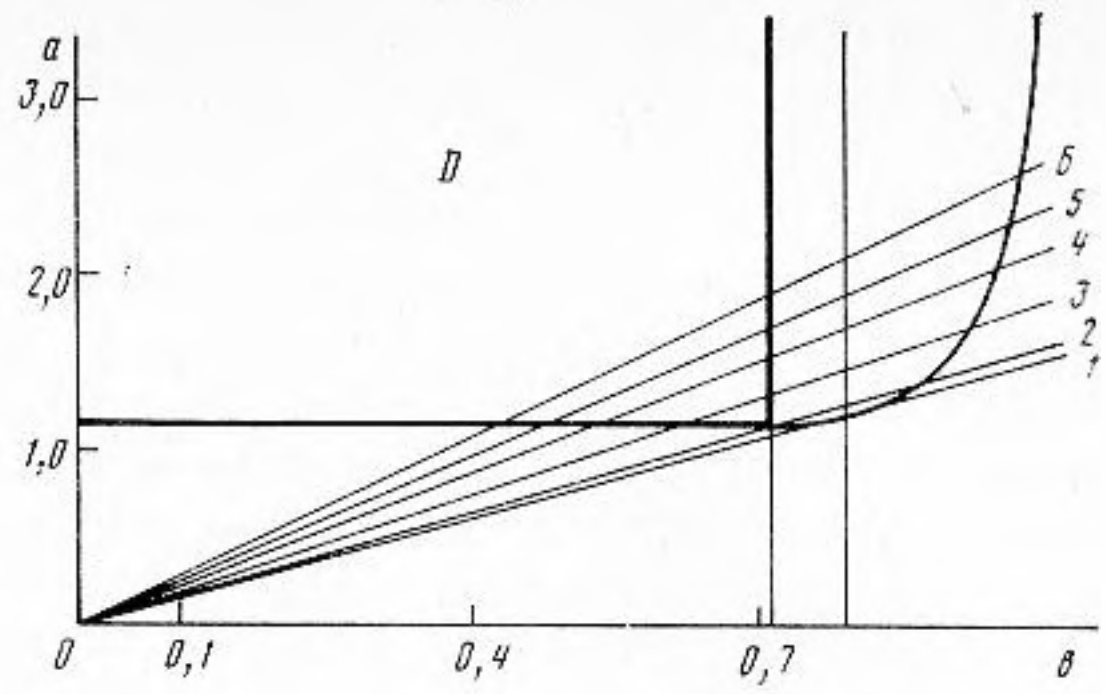

Рис. 2

Рис. 1. Расположение вещественных корней дисперсионного уравнения модели с упругим дном. *1* соответствует функции $g_1(\mu)$, *2* – $g_2(\mu)$

Рис. 2. К вопросу о расположении μ_0 относительно точки $\mu=1$. *1* соответствует значению $n_l=0{,}638$, *2* – $n_l=0{,}618$, *3* – $n_l=0{,}529$, *4* – $n_l=0{,}462$, *5* – $n_l=0{,}4099$, *6* – $n_l=0{,}369$

вует всегда. В модели же Пекериса ($a=0$, $g_2(\mu)=-\varkappa^{-1}(\mu^2-n_l^2)^{-1/2}$) такое пересечение невозможно. Для этой модели все вещественные корни меньше 1, в то время как μ_0 из МУД может (а в случае $c_\tau>c$ должно) превосходить 1. Вещественность μ_0 обусловливает слабозатухающий по расстоянию характер нулевой моды ($r^{-1/2}$), а расположение μ_0 по отношению к $\mu=1$ существенно влияет на свойства амплитудного множителя НМ ($A_0(\hat{z}, \hat{z}_0)$); если $\mu_0<1$, поведение $A_0(\hat{z}, \hat{z}_0)$ аналогично поведению обычной распространяющейся моды, если $\mu_0=1$, $A_0(\hat{z}, \hat{z}_0)$ линейно зависит от $\hat{z}$ и $\hat{z}_0$ ($\hat{z}=z/H$, $\hat{z}_0=z_0/H$ – обезразмеренные глубины приемника и источника), наконец, если $\mu_0>1$, $A_0(\hat{z}, \hat{z}_0)$ экспоненциально спадает при удалении $\hat{z}$ или $\hat{z}_0$ от дна. Эти выводы легко вытекают из вида амплитудного множителя [8, 1]:

$$A_0(\hat{z}, \hat{z}_0)=\frac{i}{2H}\frac{\sin(\mathscr{K}\sqrt{1-\mu_0^2}\,\hat{z})\sin(\mathscr{K}\sqrt{1-\mu_0^2}\,\hat{z}_0)}{1-\dfrac{\sin(\mathscr{K}\sqrt{1-\mu_0^2})}{2\mathscr{K}\sqrt{1-\mu_0^2}}+\dfrac{i}{\varkappa}f_1^2(\mu_0)f_2(\mu_0)\sin^2(\mathscr{K}\sqrt{1-\mu_0^2})},$$

$$0\leqslant\hat{z}_0,\qquad \hat{z}\leqslant 1, \tag{2}$$

где

$$f_1(\mu)=i\varkappa\left(\frac{(2\mu^2a^2-1)^2}{\sqrt{n_l^2-\mu^2}}-4\mu^2a^3\sqrt{1-\mu^2a^2}\right)^{-1}\frac{1}{\mathscr{K}}$$

$$f_2(\mu)=\left(\frac{(2\mu^2a^2-1)(8a^2n_l^2-6\mu^2a^2-1)}{(n_l^2-\mu^2)^{1/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{4(3a^2\mu^2-2)a^3}{(1-a^2\mu^2)^{1/2}}\right)\frac{1}{\mathscr{K}^3}.$$

Зависимости $A_0(\hat{z}, \hat{z}_0)$ от n_τ в каждом из отмеченных случаев, к изучению областей реализации которых мы приступаем, проанализированы ниже.

Если $g_2(\mu^*)=0$ при $\mu^*\geqslant 1$, то (см. рис. 1) для любого $\mathscr{K}$ $\mu_0>1$. Если же $\mu^*<1$, то при $\mathscr{K}\leqslant g_2(1)$ $\mu_0\leqslant 1$, в противном случае – $\mu_0>1$. Следовательно, μ_0 может быть меньше 1 только при условии $(2a^2-1)^2-4a^3\sqrt{a_2-1}\sqrt{1-n_l^2}\leqslant 0$, откуда следует

$$0\leqslant b\leqslant\left(a^2-\frac{(2a^2-1)^4}{16a^4(a^2-1)}\right)^{1/2}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{3}$$

поскольку $c_\tau\leqslant c_l/\sqrt{2}$ ($b\underset{Def}{=}an_l=c_\tau/c_l$). На рис. 2 изображена область D ре-

шения системы неравенств (3). Заметим, что лишь при $a>1{,}047$ существуют значения b, при которых возможна ситуация $\mu_0<1$, а при $a>1{,}14\mu_0$ может быть меньше 1 при любых допустимых b.

Увеличивая c_τ начиная с нуля и фиксируя при этом c и c_l, получим на плоскости (b, a) отрезок прямой $a=b/n_l$, $b\in[0, \sqrt{2}/2]$ (рис. 2). При n_l, меньших некоторого значения ($n_l\approx0{,}618$), часть отрезка лежащая правее точки пересечения с границей области D, полностью попадает в эту область, поскольку касание прямой, проходящей через начало координат с границей D ($a=1{,}567b$), происходит в точке $b=0{,}782>\sqrt{2}/2$.

Каждой точке области D отвечает определенное значение $\mathscr{K}=g_2(1, a, n_l)$, при котором $\mu_0=1$. Численные исследования показали, что $\mathscr{K}$ растет с уменьшением n_l, причем максимально возможное значение $\mathscr{K}$ в практически интересных случаях не превышает 5—6. Например, при $n_l\approx0{,}529$ $\mathscr{K}_{\max}\approx0{,}7$, при $n_l\approx0{,}369$ $\mathscr{K}_{\max}\approx4{,}8$.

В случае малых a (малых c_τ) асимптотика $\mu_0=\mu_0(a)$ имеет вид:

$$\mu_0(a)=\frac{u_0}{a}+O(a), \tag{4}$$

где u_0 определяется из уравнения

$$1+\varkappa^{-1}((2u^2-1)^2-4u^3\sqrt{u^2-1})=0, \tag{5}$$

имеющего на правой полуоси единственное решение $u_0>1$. Используя принцип аргумента, нетрудно показать, что в области $0<\operatorname{Re} u<1$ уравнение (5) имеет единственный комплексный корень $u_{0,k}$ (разумеется, в этой области выбирается другая ветвь функции $\sqrt{u^2-1}$), порождающий модовое число НКМ — $\mu_{0,k}(a)$. Величины u_0 и $u_{0,k}$ монотонно зависят лишь от $\varkappa$, причем для практически интересных случаев они меняются мало, при $\varkappa=0{,}91$ $u_0=1{,}18$; $\operatorname{Re} u_{0,k}=0{,}59$; $\operatorname{Im} u_{0,k}=0{,}25$; при $\varkappa=1/3$ $u_0=1{,}09$; $\operatorname{Re} u_{0,k}=0{,}52$; $\operatorname{Im} u_{0,k}=0{,}18$. Отметим, что при малых a $\operatorname{Im}\mu_{0,k}(a)$ велика, поэтому на больших расстояниях в этом случае вклад НКМ в поле невелик.

На рис. 3 показаны нормированные фазовые скорости нулевой моды ($v_0(a)/c=1/\mu_0(a)$) для различных значений n_l. Все кривые имеют монотонно возрастающий характер, причем при $a\in[0; 0{,}5]$ фазовые скорости, определяясь первым членом формулы (4), не зависят от n_l.

В случае НКМ больший интерес представляет величина $\mathscr{K}\operatorname{Im}\mu_{0,k}(a)$, которая быстро уменьшается с ростом a и при достаточно больших $c_\tau(>c)$ может обращаться в нуль, превращая НКМ в распространяющуюся моду.

Рассмотрим поведение μ_0 и $\mu_{0,k}$ при $\mathscr{K}\to\infty$. Переходя в (1) к пределу при $\mathscr{K}\to\infty$, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}}=-\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{(2\mu^2a^2-1)^2}{\sqrt{\mu^2-n_l^2}}-4\mu^2a^3\sqrt{\mu^2a^2-1}\right). \tag{6}$$

Вещественный корень этого уравнения — модовое число волны Стоунли. При $a<((\varkappa^2+1)/2)^{1/2}$ (6) имеет комплексный корень $\mu_{s,k}$, соответствующий $\mu_{0,k}$. Отметим, что при $\mathscr{K}\to\infty$ μ_0 стремится к μ_s экспоненциально. Численные расчеты показали, что в большинстве случаев при $\mathscr{K}>10$ μ_s приближает μ_0 с точностью 0,1%.

Вернемся к рассмотрению амплитуды нулевой моды $A_0(\hat{z}, \hat{z}_0)$ (2). При $a\to0$ $A_0(\hat{z}, \hat{z}_0)\sim\text{const}\cdot a^{-1}\exp\{-(2-\hat{z}_0-\hat{z})\mathscr{K}a^{-1}u_0\}$, если же $\hat{z}=\hat{z}_0=1$, то экспоненциальный множитель пропадает, и $A_0(1, 1)\sim\text{const}\, a^{-1}$. Было проведено численное исследование величины $|A_0(\hat{z}, \hat{z}_0)|$ в зависимости от $a\in[0, (\sqrt{2}n_l)^{-1}]$ при $0{,}25\leqslant n_l<0{,}83$ и 50 м$<H<$350 м. При $\hat{z}=1$, $\hat{z}_0=0{,}5$ модуль амплитуды нулевой моды монотонно возрастает, принимая на правом конце исследуемого интервала значения, сравнимые с амплитудами распространяющихся мод. Размещение приемника и источника на дне волновода усложняет картину. При малых $a|A_0(1, 1)|$ принимает весьма большие значения и до $a\approx0{,}66$ монотонно убывает. Далее идет возрастание $|A_0((1, 1)|$, а при достаточно больших c_l и H зависимость носит осцилли-

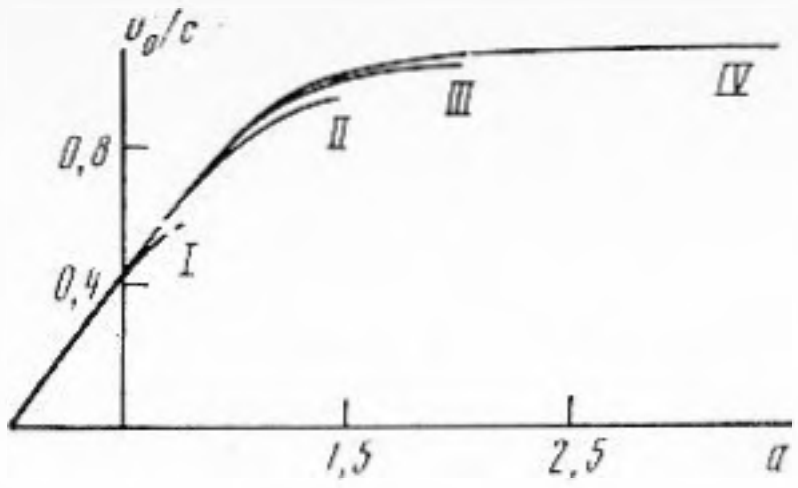

Рис. 3

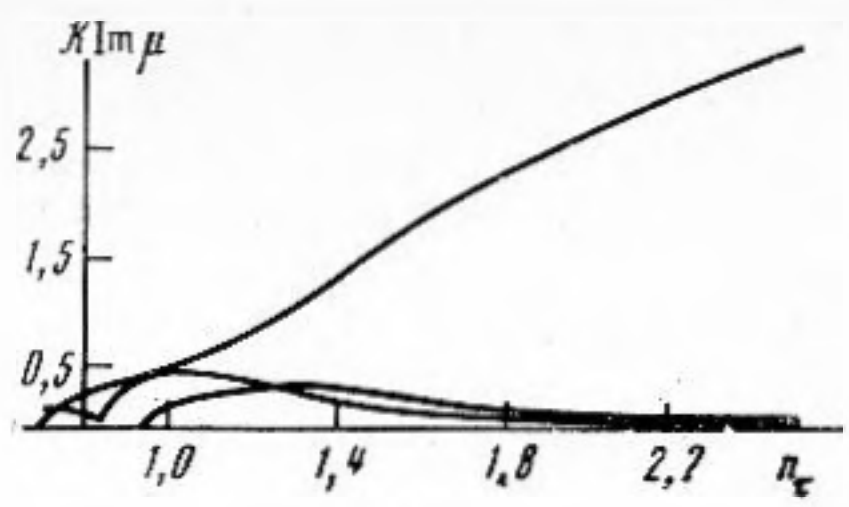

Рис. 4

Рис. 3. Зависимость нормированных фазовых скоростей нулевой моды v_0/c от параметра $a=c_\tau/c$ при различных значениях n_l: $n_{l_1}=0{,}884$; $n_{l_2}=0{,}472$; $n_{l_3}=0{,}343$; $n_{l_4}=0{,}204$; $\varkappa=0{,}55$; $\mathcal{K}=3{,}391$

Рис. 4. Зависимость величин $\mathcal{K}\,\mathrm{Im}\,\mu_{0,k}$, $\mathcal{K}\,\mathrm{Im}\,\mu_1$ и $\mathcal{K}\,\mathrm{Im}\,\mu_2$ от параметра c/c_τ в случае $\mathcal{K}=7{,}016$; $n_l=0{,}483$; $\varkappa=0{,}55$

рующий характер с разбросом значений, не превышающим 50%, причем уровень амплитуды здесь в 3—10 раз выше максимальных величин $|A_0(1;\,0{,}5)|$. Отметим, что $|A_0(1,\,1)|$ для $a\in[0,\,1]$ практически (с относительной погрешностью 10^{-3}—10^{-4}) не зависит от H. При $\mathcal{K}\to\infty$ $A_0(\hat z,\,\hat z_0)\sim$ $\sim\mathrm{const}\cdot\exp\{-(2-\hat z-\hat z_0)\mathcal{K}\sqrt{\mu_*^2-1}\}$. Численный анализ величины $A_0(\hat z,\,\hat z_0)$ как функции от $\hat z$ ($n_\tau=2$, $\hat z_0=0{,}5$) показал, что увеличение $\mathcal{K}$ ведет к значительному уменьшению $A_0(\hat z,\,\hat z_0)$, особенно при удалении от дна. Если при $\mathcal{K}=7{,}014$ существенными являются лишь значения для $\hat z>0{,}9$, то при $\mathcal{K}=12{,}794$ амплитуда пренебрежимо мала для всех $\hat z$. В случае $n_\tau=0{,}709$ отмеченные эффекты сохраняются, однако, проявляются в меньшей степени, например, при $\mathcal{K}=10{,}174$ амплитуда значительна для $\hat z>0{,}6$.

Вещественные корни дисперсионного уравнения модели Пекериса (см. (1) при $a=0$) лежат на отрезке $[n_l,\,1]$, сдвигаясь вверх в комплексную плоскость при введении в модель дна $c_\tau>0$. Последнее влечет экспоненциальное (хотя и с достаточно малым показателем) затухание соответствующих мод, называемых здесь квазираспространяющимися. Пусть $\mu_j=$ $=\mu_j(a)$ — модовые числа квазираспространяющихся мод, тогда при $a\to0$, используя метод возмущений, получим:

$$\mu_j(a)=\mu_{j,\,0}+\mu_{j,\,2}a^2+\mu_{j,\,3}a^3+O(a^4), \tag{7}$$

где $\mu_{j,\,0}$ — соответствующий корень модели Пекериса,

$$\mu_{j,2}=-4\mu_{j,0}\left(\frac{1+\varkappa\mathcal{K}(\mu_{j,0}^2-n_l^2)^{1/2}}{1-\mu_{j,0}^2}+\frac{1+\varkappa^{-1}\mathcal{K}(\mu_{j,0}^2-n_l^2)^{1/2}}{\mu_{j,0}^2-n_l^2}\right)^{-1},$$

$$\mu_{j,3}=-i(\mu_{j,0}^2-n_l^2)^{1/2}\mu_{j,2}.$$

Таким образом, при малых a $\mu_{j,\,0}$ сдвигается влево на величину порядка a^2 и вверх на величину порядка a^3 [3, 4]. Формулы типа (7) известны и применяются зачастую не только для очень малых a. Как показало проведенное численное сравнение, (7) хорошо совпадает с точным решением при $a<0{,}5$, а для качественных оценок дает приемлемые результаты вплоть до $a\approx0{,}8$.

Увеличение a влечет рост величины $\mathcal{K}\,\mathrm{Im}\,\mu_j(a)$, достигающей при $c_\tau=$ $=1100$—1300 м/с своего максимума, а затем довольно быстро убывающей. Заметим однако, что не всегда квазираспространяющаяся мода становится распространяющейся даже при достаточно больших c_τ. Например, возможно «втыкание» $\mu_j(a)$ в n_l при стремлении a к своему максимальному значению $a=(\sqrt{2}n_l)^{-1}$. В самом деле, при $a=(\sqrt{2}n_l)^{-1}$ уравнение (1) имеет корень при $\mu=n_l$. Асимптотический анализ показывает, что при малых $\varepsilon=1-\sqrt{2}n_la$ для некоторого решения (1) справедливо представление

$$\mu(a)=n_l+\frac{8}{\varkappa n_l}\left(\frac{\mathrm{tg}(\mathcal{K}\sqrt{1-n_l^2})}{\sqrt{1-n_l^2}}+\frac{i}{\varkappa n_l}\right)^{-2}\varepsilon^4+O(\varepsilon^5).$$

Отсюда следует, что при $\mathrm{tg}(\mathscr{K}\sqrt{1-n_l^2})>0$ этот корень расположен в верхней полуплоскости, а при $\mathrm{tg}(\mathscr{K}\sqrt{1-n_l^2})<0$ – в нижней. Поскольку для рассматриваемых задач имеют смысл только корни, расположенные в области $\mathrm{Im}\,\mu>0$, то первое из отмеченных условий и выделяет случаи «втыкания».

Проведенные численные исследования функции $\mathscr{K}\,\mathrm{Im}\,\mu_j(a)$ при различных значениях n_l показали, что величина эта растет с увеличением жесткости дна (уменьшением n_l). В частности, в случае $\mathscr{K}=3{,}508$; $\varkappa=0{,}556$ при $n_l=0{,}667$ $(\mathscr{K}\,\mathrm{Im}\,\mu_1(a))_{\max}\approx0{,}135$; при $n_l=0{,}580$ $(\mathscr{K}\,\mathrm{Im}\,\mu_1(a))_{\max}\approx0{,}234$; при $n_l=0{,}558$ $(\mathscr{K}\,\mathrm{Im}\,\mu_1(a))_{\max}\approx0{,}256$; при $n_l=0{,}435$ $(\mathscr{K}\,\mathrm{Im}\,\mu_1(a))_{\max}\approx0{,}347$. Отметим попутно, что в первых трех случаях происходит упомянутое «втыкание», если же $n_l=0{,}435$, $\mu_1(a)$ при больших a уходит на «нефизический» лист римановой поверхности уравнения (1).

Сравнительный анализ величин $\mathscr{K}\,\mathrm{Im}\,\mu_{0,k}(a)$ и $\mathscr{K}\,\mathrm{Im}\,\mu_j(a)$, проведенный для маломодовых волноводов, показал, что уже при $a\approx0{,}85$ затухание НКМ сравнимо с затуханием квазираспространяющихся мод. В качестве примера на рис. 4 приведен случай двухмодового волновода. Заметим, что здесь при больших значениях a $\mu_1(a)$ становится первой распространяющейся модой, $\mu_{0,k}(a)$ — второй, а $\mu_2(a)$ уходит на «нефизический» лист.

Выполненный в работе анализ показывает, что при малых c_τ акустическое поле в модели с упругим дном определяется в основном теми же модами, что и в модели Пекериса. При $c_\tau>1000$ м/с картина становится значительно сложнее, так как во многих случаях необходимо учитывать нулевую и нулевую комплексную моды. Кроме того, учет квазираспространяющихся мод здесь менее тривиален.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Распространение волн в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
2. *Толстой И., Клей К. С.* Акустика океана. М.: Мир, 1969.
3. *Ковалев А. Н., Ривелис Е. А., Эдельштейн С. Л.* Влияние параметров гидроакустического волновода на коэффициенты затухания мод // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 1. С. 132–134.
4. *Суханов В. В.* Нормальные волны для океана с дном, обладающим малой сдвиговой упругостью // Сб. Математические методы прикладной акустики/Под ред. Симоненко И. Б. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1986. С. 119–121.
5. *Ellis D. D., Chapman D. M. F.* A simple shallow water propagations model including shecer wave effects // JASA. 1985. V. 78. № 6. P. 2087–2095.
6. *Шерман Д. И.* О распространении звука в жидком слое, лежащем на упругом основании // М.: Тр. сейсмол. ин-та АН СССР, 1945. № 115. С. 1–43.
7. *Калинин А. В., Иванкин И. Д., Пивоваров Б. Л.* Динамика волн Стоунли на границах жидкой и твердой сред и возможные ее исследования в сейсмоакустике // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 3. С. 563–566.
8. *Пекерис К. Л.* Теория распространения звука взрыва в мелкой воде // В кн. Распространение звука в океане/Пер. с англ. М.: Мир, 1951. С. 48–156.
9. *Хауструпф О. Ф.* Аномалии потерь при отражении вблизи малых углов скольжения и их влияние на распространение в мелком море // Сб. Акустика дна океана. М.: Мир, 1982. С. 105–119.

Поступила в редакцию
16.IX.1988