АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXV 1989 Вып. 6

ВОЗБУЖДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЗАКРЫТОМ АКУСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ ©

Девятериков И. А.

В работе исследуется процесс установления вынужденных звуковых колебаний в резонаторе с неподвижными стенками, возникающих при действии пространственно распределенной внешней силы. Предложен ряд конечно-разностных алгоритмов решения поставленной задачи. Показано, что независимо от локализации источника в объеме резонатора установившиеся колебания имеют идентичные характерные особенности.

Исследование вынужденных звуковых колебаний конечной амплитуды в замкнутом объеме представляет интерес в связи с их использованием для интенсификации процессов тепломассопереноса и горения [1, 2], очистки паровых котлов [3], а также в теории акустических излучателей. В таких случаях акустические колебания столба газа возникают под действием пространственно распределенной внешней силы или при движении поршня, являющегося одной из стенок резонатора. Как правило, внешнее воздействие изменяется периодически с течением времени на частоте, совпадающей с частотой основного тона резонатора — тогда возбуждаются резонансные звуковые колебания. Кроме того, внешняя сила распределяется по длине резонатора «резонансным» способом — синусоидально. В теоретических исследованиях данной проблемы за последнее время достигнут значительный прогресс [4—6]. Несмотря на это, непосредственное применение аналитических методов в случае произвольного пространственного распределения вынуждающей силы по длине резонатора приводит к достаточно сложным вычислениям.

Цель настоящей работы — изучение численными методами особенностей установления интенсивных звуковых колебаний в резонаторе с неподвижными стенками.

Для описания вынужденного движения вязкого газа в замкнутом объеме при интенсивном силовом воздействии наиболее адекватным представляется подход, основанный на использовании системы уравнений нелинейной акустики [4]:

$$(\rho_0+\rho)\frac{\partial v}{\partial t}+\rho_0 v\frac{\partial v}{\partial x}+c_0^2\left(1+\Gamma\frac{\rho}{\rho_0}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x}=b\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+af(x,t),$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+(\rho_0+\rho)\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial x}=0. \qquad (1)$$

Здесь ρ, v — отклонения плотности и скорости движения газа от их равновесного значения ρ_0, $v_0=0$; b — коэффициент, определяемый вязкостью и теплопроводностью, a — амплитуда стороннего давления, действующего на единицу длины и распределенного вдоль резонатора по закону $f(x, t)$; $\Gamma=\gamma-1$, γ — показатель адиабаты, c_0 — скорость звука. Требование неподвижности стенок резонатора длины l приводит к нулевым граничным условиям

$$v(0, t)=v(l, t)=0. \qquad (2)$$

Введем безразмерные величины:

$$x'=\frac{x}{l},\quad t'=\frac{c_0 t}{l},\quad V=\frac{v}{c_0},\quad R=\frac{\rho}{\rho_0},\quad a'=\frac{al}{\rho_0 c_0^2},\quad b'=\frac{b}{\rho_0 c_0 l},$$

$$\Omega = \frac{\pi l}{c_0}.$$

С их использованием система (1) преобразуется так:

$$(1+R)\frac{\partial V}{\partial t'} + V\frac{\partial V}{\partial x'} + (1+\Gamma R)\frac{\partial R}{\partial x'} = \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + a' f(x', t'),$$

$$\frac{\partial R}{\partial t'} + (1+R)\frac{\partial V}{\partial x'} + V\frac{\partial R}{\partial x'} = 0. \tag{3}$$

В дальнейшем штрихи для краткости опускаем.

Математическая постановка задачи следующая. Требуется определить неизвестные функции $V(x, t)$ и $R(x, t)$, регулярные в полуполосе $\{0 \leqslant x \leqslant l, t \geqslant 0\}$, удовлетворяющие системе (3), граничным $V(0, t) = V(1, t) = 0$ и начальным условиям $V(x, 0) = R(x, 0) = 0$.

Для дальнейших рассуждений преобразуем систему определяющих уравнений к эволюционному виду [7]. Это можно сделать, поделив первое уравнение (3) на множитель при производной по времени или переписать систему в переменных импульс — плотность. Во втором способе необходимо учесть, что система (1) справедлива с точностью до квадратичных членов по числу Маха. С такой же точностью имеют место соотношения

$$V\frac{\partial R}{\partial t} = -V\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad (1+R)\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial (1+R)V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Воспользовавшись этим, получим требуемый вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{F}, \tag{4}$$

где

$$M = (1+R)V,$$

$$\mathbf{W} = \left\{V^2 + \left(1 + \Gamma\frac{R}{2}\right)R + (1+R)^{-1}\left(V\frac{\partial R}{\partial x} - b\frac{\partial M}{\partial x}\right), M\right\},$$

$$\mathbf{U} = \{M, 1+R\}, \quad \mathbf{F} = \{af, 0\}.$$

Для конструирования конечно-разностного алгоритма решения введем в области определения искомых функций сетку (x_j, t_n) с шагом h по пространству и τ по времени: $x_{j+1} = x_j + h$, $t_{n+1} = t_n + \tau$, $j = 1, \ldots, N$. В пространстве сеточных функций φ_j^n действуют разностные операторы L_1, L_2, аппроксимирующие дифференциальные операторы первой и второй производной по x.

Рассмотрим разностную схему общего вида с весом α:

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + L_1[\alpha \mathbf{W}^{n+1} + (1-\alpha)\mathbf{W}^n] = \mathbf{F}^n. \tag{5}$$

В силу представления (4) система (5) является системой нелинейных разностных уравнений относительно неизвестных величин на $n+1$ слое по времени. С целью построения безытерационных схем реализации разложим вектор $\mathbf{W}$ в ряд Тейлора относительно предыдущего временного шага [8]:

$$\mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}^n + \tau G^n \Delta \mathbf{U}^n + \tau\frac{\partial}{\partial x}(C^n \Delta \mathbf{U}^n) - \tau C_x^n \Delta \mathbf{U}^n + O(\tau^2). \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), получим линейный вариант

$$(I + \tau\alpha D^n)\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -L_1 \mathbf{W}^n + \mathbf{F}^n, \tag{7}$$

где I — единичная матрица, $G=\partial\mathbf{W}/\partial\mathbf{U}$, $C=\partial\mathbf{W}/\partial\mathbf{U}_x$, $C_x=\partial C/\partial x$, $\Delta\mathbf{U}=\dfrac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}$

$D^n=(G^n-C_x{}^n)+L_2C^n$.

Полученная система разностных уравнений может непосредственно вычисляться векторными прогонками. Для ее реализации в этом конкретном случае требуется обращение матриц порядка 2×2. Практическое использование схем (5) и (7) показало преимущество линейного варианта перед нелинейным, несмотря на то что расчеты по (5) при условии устойчивости алгоритма векторной прогонки требуют три — семь итераций по методу Ньютона для нахождения вектора решения на следующем шаге по времени. Более экономичным способом реализации (5) было бы использование скалярной прогонки. Этого можно достичь приближенной факторизацией стабилизирующего оператора $(I+\tau\alpha D^n)\simeq(I+\tau\alpha S^n)(I+\tau\alpha P^n)$. Если выбрать выражения для слагаемых

$$S_{11}{}^n=2L_1\left(\frac{V}{1+R}\right)^n-bL_2\left(\frac{1}{1+R}\right)^n,\quad S_{12}{}^n=S_{22}{}^n=P_{11}{}^n=P_{12}{}^n=P_{22}{}^n=0,$$

$$P_{12}{}^n=L_1\left[1+\Gamma R^n-2\left(\frac{V^2}{1+R}\right)^n\right]+bL_2\left(\frac{V}{1+R}\right)^n,\quad S_{21}{}^n=L_1,$$

тогда вспомогательный вектор $\xi=\{\xi_1,\ \xi_2\}$ на дробных шагах удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{gathered}(I+\tau\alpha S^n)\xi^{n+1/2}=-L,\ \mathbf{W}^n+\mathbf{F}^n,\\ (I+\tau\alpha P^n)\xi^{n+1}=\xi^{n+1/2},\\ \mathbf{U}^{n+1}=\mathbf{U}^n+\tau\xi^{n+1}.\end{gathered}\tag{8}$$

Примем $\alpha={}^1/_2$, что соответствует схеме Кранка — Николсона. Ниже будет показана правомерность такого выбора весового параметра. В этом случае сначала определяем вектор $\xi^{n+1/2}$, считая величины на предыдущем шаге по времени известными, из системы

$$\left(1+\frac{\tau}{2}S_{11}{}^n\right)\xi_1^{n+1/2}=-L_1W_1{}^n+af^n,$$

$$\xi_2^{n+1/2}+L_1\xi_1^{n+1/2}=-L_1W_2{}^n.$$

Если здесь в качестве L_1 взять симметричную разность второго порядка, то будет обеспечена устойчивость алгоритма скалярной прогонки и трехточечной процедурой можно определить компоненту $\xi_1^{n+1/2}$. Другая составляющая вектора находится из второго уравнения. На целом шаге по времени, как следует из (8), $\xi_2{}^{n+1}$ просто переносится с $n+{}^1/_2$ слоя, а $\xi_1{}^{n+1}$ вычисляется явно: $\xi_1^{n+1}=\xi_1^{n+1/2}-\dfrac{\tau}{2}P_{12}{}^n\xi_2^{n+1}$. В конце расчета шага по времени вычисляем вектор решения и последовательность операций повторяется.

Отдельной задачей во всех численных методах является вычисление сеточных функций в граничных точках [7—9]. Здесь после проведения тестовых расчетов стало ясно, что значение вектора решения можно определять явно, полагая компоненты вспомогательного вектора $\xi^{n+1/2}$ и ξ^{n+1} на границе нулевыми. При этом импульс или скорость удовлетворяют граничным условиям (2): $M_1{}^{n+1}=M_1{}^n=M_N{}^{n+1}=M_N{}^n=0$, а значение плотности определяется уравнением неразрывности из равенств

$$R_1^{n+1}=R_1{}^n+\tau R_1{}^n\frac{-3V_1{}^n+4V_2{}^n-V_3{}^n}{2h}$$

на левой границе и

$$R_N^{n+1}=R_N^n+\tau R_N^n\frac{3V_N^n-4V_{N-1}^n+V_{N-2}^n}{2h}$$

для противоположной точки.

Рассмотрим сходимость предложенных численных алгоритмов. Анализ устойчивости схемы (8) проведем в линейном приближении для системы с замороженными коэффициентами. Если воспользоваться заменой $X=ax$, $T=at$, то ее можно записать с одним коэффициентом при старшей производной $\beta=ab$:

$$\frac{\partial V}{\partial T}+u_0\frac{\partial V}{\partial X}+\frac{\partial R}{\partial X}-\beta\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}=0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial T}+u_0\frac{\partial R}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial X}=0,\qquad u_0=\text{const}.$$

Аппроксимируем эту систему схемой (8):

$$\{I+\tau\alpha[L_1(G_0-C_x)+L_2C]\}\frac{\mathbf{U}^{n+1}-\mathbf{U}^n}{\tau}=-L_1\mathbf{W}^n.$$

Здесь

$$\mathbf{U}=\{V,R\},\quad C_x=0,\quad G_0=\begin{pmatrix}u_0 & 1\\ 1 & u_0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $\mathbf{W}^n=G_0\mathbf{U}^n$, запишем аппроксимацию более удобным образом:

$$\{I+\tau\alpha(G_0L_1+CL_2)\}(\mathbf{U}^{n+1}-\mathbf{U}^n)=-\tau G_0\mathbf{U}^n. \tag{9}$$

В соответствии со спектральным методом исследования устойчивости будем искать решение (9) в виде гармоник $\mathbf{U}^n=\mathbf{U}_0\lambda^n\exp(ipjh)$. Действие оператора симметричной разности второго порядка на такое представление решения приводит к соотношению $L_1\mathbf{U}^n=\mathbf{U}^n i\Psi$, $\Psi=\sin(ph)/h$, а для аппроксимации второй производной к $L_2\mathbf{U}^n=\mathbf{U}^n\Phi$, $\Phi=2(\cos ph-1)/h^2$. Характеристическая матрица системы относительно U_0 будет иметь следующий вид: $z=\lambda-1$, $\nu=\tau\Psi$, $d=\tau\Phi$

$$\begin{pmatrix}z+iu_0\nu(1+\alpha z)-z\alpha\beta d, & i\nu(1+\alpha z)\\ i\nu(1+\alpha z), & z+iu_0\nu(1+\alpha z)\end{pmatrix}.$$

В большинстве практически важных случаев коэффициент β можно считать малым, так как $a<1$ и $b\ll 1$. По этой причине решение характеристического уравнения будем искать в виде прямого разложения в ряд по малому параметру $z=z_0+\beta z_1+\ldots$. Подставим данное разложение в характеристическое уравнение, и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях β, ограничимся преобладающим членом

$$z_{1,2}=\frac{i\nu(\pm 1-u_0)-\alpha\nu^2(1-u_0^2)}{1+\alpha^2\nu^2(1-u_0^2)+2i\alpha\nu u_0}.$$

В предельном случае $u_0=1$ корни характеристического уравнения даются соотношениями [10] $\lambda_1=1$, $\lambda_2=(1+2i\tau\Psi(\alpha-1)/(1+2i\tau\alpha\Phi)$. Откуда следует, что $|\lambda|\leqslant 1$ при $\alpha\geqslant{}^1/_2$. При произвольных u_0 спектральный признак устойчивости требует выполнения неравенства $(1-2\alpha)[\tau^2\nu^2(1-u_0^2)^2+(1\mp u_0)^2]\leqslant 0$, которое также выполняется при $\alpha\geqslant{}^1/_2$. Полученный результат позволяет полагать, что не существует полностью явной схемы, аппроксимирующей систему (4) с порядком $O(\tau^2+h^k)$, безусловно, устойчивой в линейном приближении.

Численные эксперименты, проведенные с различными значениями параметров a и b, показали удовлетворительную сходимость предложенных разностных схем к теоретическим результатам [4]. При сравнении учи-

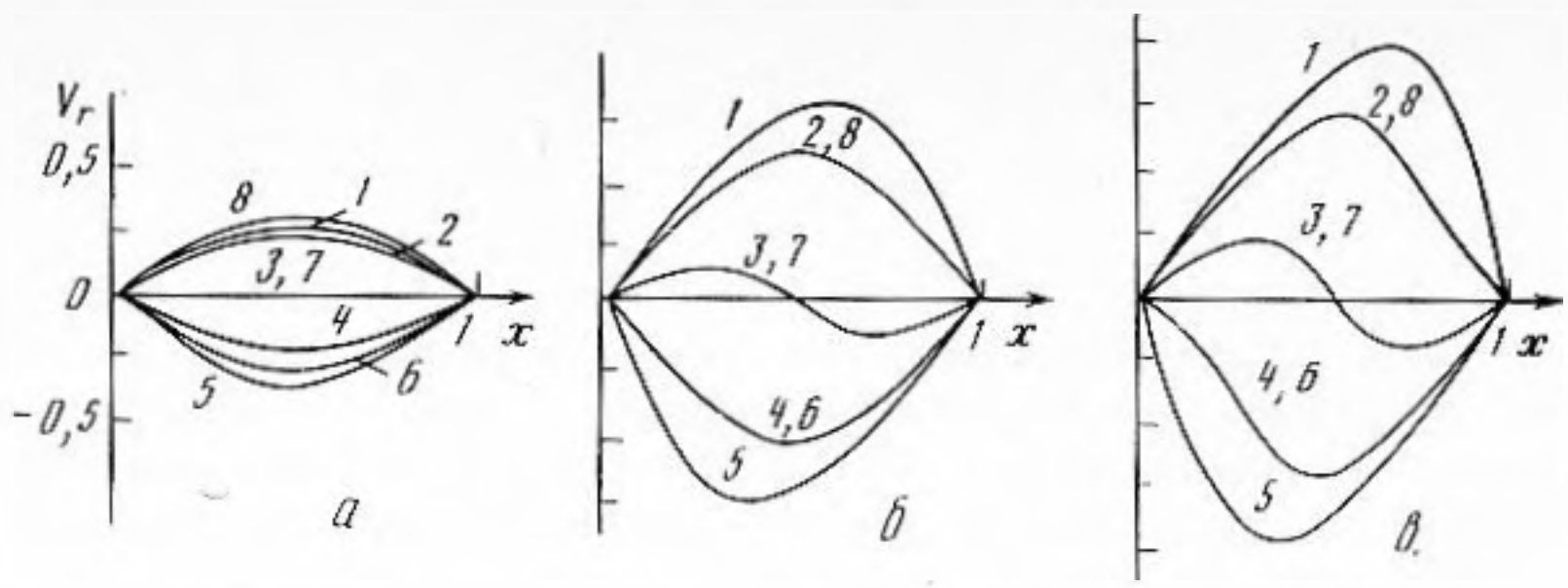

Рис. 1. Зависимости распределения скорости внутри резонатора в течение различных периодов действия внешней силы с амплитудой 0,05 и $f(x, t)=\sin \Omega x \cos \Omega t$: *а* – 2 период, *б* – 5, *в* – 13 период действия источника; $V_r=V/V_{max}$, $b=0{,}02$, $V_{max}=0{,}1613$

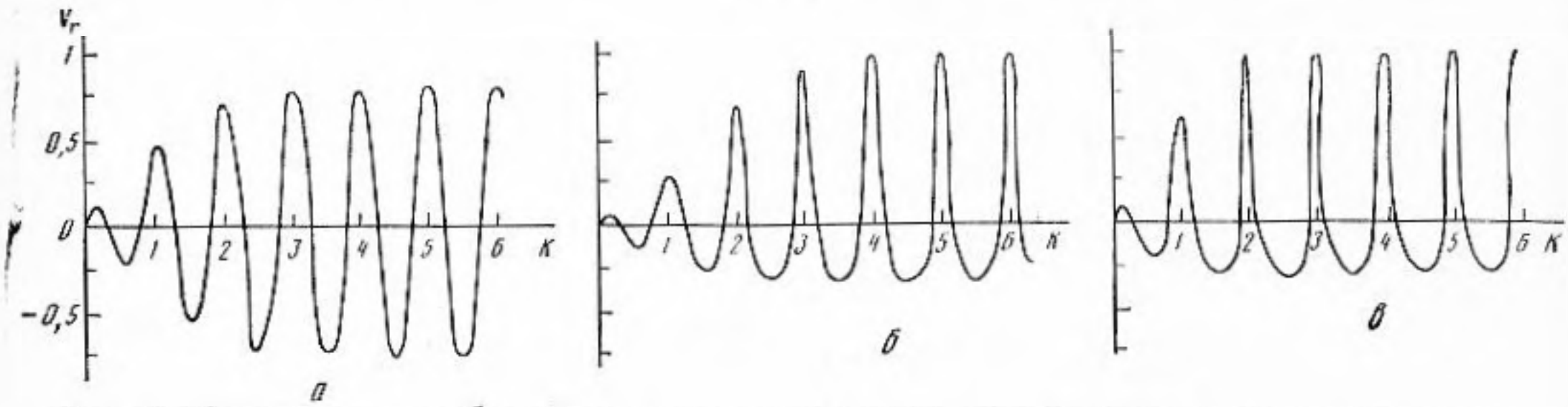

Рис. 2. Нарастание колебаний скорости в различных точках резонатора в зависимости от числа периодов действия источника $f(x, t)=\sin \Omega x \cos \Omega t$: *а* – $x=0{,}5$, *б* – $x=0{,}8$ при амплитуде 0,21, $в=0{,}02$, $V_{max}=0{,}736$, *в* – $x=0{,}8$ для $a=0{,}6$, $b=0{,}02$, $V_{max}=0{,}74$, $b=10^{-8}$

тывалась связь варьируемых коэффициентов с характерным параметром A из [4] – $A=(\gamma+1)a/2\Omega^3b^3$. Количественное отличие численных результатов при $A=20$ составило не более 3%. Аналогичное расхождение, не превышающее 3,5%, было получено при измельчении пространственной сетки в 1,7 раза и уменьшении шага по времени.

Результаты некоторых расчетов приведены на рис. 1–4. На приведенных графиках цифры у кривых обозначают номер $^1/_8$ части периода внешнего воздействия – *1* кривая соответствует началу периода, *2* – $^1/_8$, *3* – одной четверти периода и т. д.

Рисунок 1 иллюстрирует установление квазистационарного режима вынужденных колебаний скорости. В течение первого периода воздействия колебания нарастают подобно малым вынужденным осцилляциям (рис. 1, *а*). Известно, что при малых вынужденных колебаниях на основной моде резонатора с закрепленными концами узлы скорости расположены на стенках, а пространственный профиль колебательной скорости симметричен относительно центра резонатора. С ростом интенсивности колебаний на «симметричной» моде возникает дополнительный узел, который движется от одной стенки резонатора к другой, что видно на рис. 1, *б*. Уже к третьему периоду заметна деформация профиля колебательной скорости и появление бегущего узла.

На рис. 2 показаны особенности установления максимальной амплитуды гидродинамической скорости в разных точках резонатора в зависимости от количества периодов действия внешней силы K. В середине резонатора (рис. 2, *а*) максимальная амплитуда колебаний составляет 78% от абсолютного максимума, достигаемого в точке $x=0{,}8$ (рис. 2, *б*). Колебания в срединной точке нарастают синусоидальным образом и при установлении ведут себя синфазно с временной зависимостью внешней силы. Аналогичное поведение имеет место и при $x=0{,}8$, но здесь имеются более значительные градиенты по времени у скорости, и сам график расположен асимметрично по отношению к оси K. Максимальная амплитуда скорости в положительной фазе колебаний почти в 3 раза превышает максимум в отрицательном полупериоде. С увеличением a установление проходит

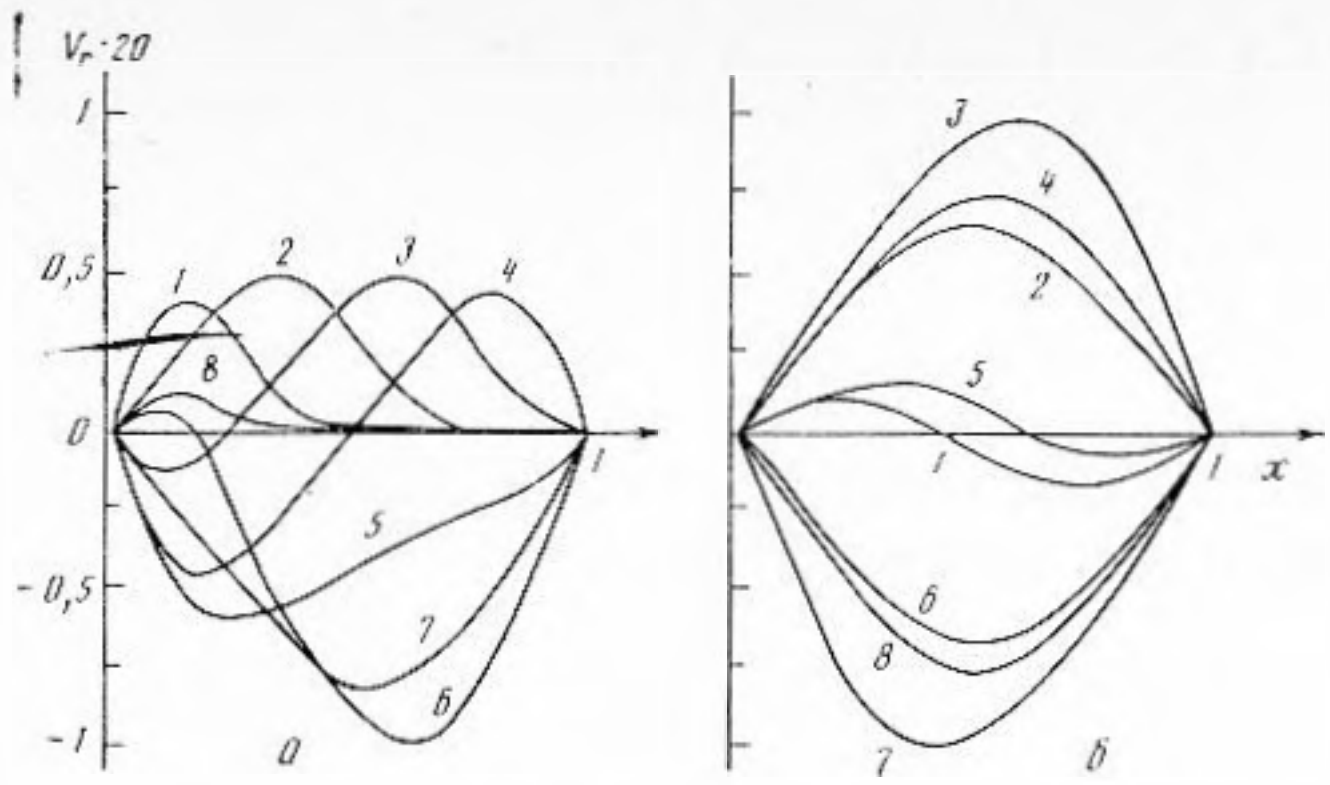

Рис. 3

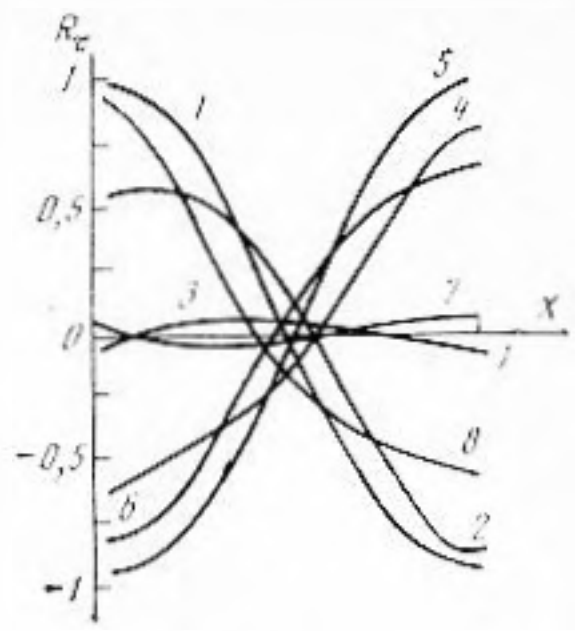

Рис. 4

Рис. 3. Пространственные профили колебаний скорости в течение двух периодов «нерезонансной» вынуждающей силы с амплитудой 0,222, $x_0=\delta=0{,}1$: *а* – в течение первого периода, *б* – 14 период воздействия, $V_{max}=0{,}025$

Рис. 4. Безразмерные функции $R_r(x, t)=R/R_{max}$, $R_{max}=0{,}0244$ для 14-го периода действия источника силы с параметрами, соответствующими рис. 3

быстрее, и для $a=0{,}6$, $b=0{,}02$ квазистационарный режим наблюдается через два периода воздействия (рис. 2, *в*).

Все отмеченные выше особенности так или иначе проявляются и при «нерезонансном» пространственном распределении вынуждающей силы. На рис. 3 приводятся результаты расчетов при $f(x, t)=x(1-x)\times\times\exp[-(x-x_0)^2/\delta^2]\sin\Omega t$. Варьируя параметры x_0 и δ, можно моделировать различную локализацию стороннего источника колебаний. Интересная особенность подобного возбуждения состоит в том, что во время первого периода действия источника профиль скорости повторяет распределение сторонней силы по длине резонатора. Так, кривая *1* на рис. 3, *а* имеет максимум в окрестности точки $x=x_0+\delta^2(x_0-{}^1/_2)/x_0(x_0-1)$, что соответствует экстремуму $f(x, t)$. В дальнейшем пространственные профили газодинамических параметров движения газа принимают вид, характерный для установившихся колебаний при резонансном возбуждении. Например, рис. 4 демонстрирует динамику нарастания плотности для этого случая.

Анализ проведенных расчетов показывает, что эффективность «нерезонансного» возбуждения колебаний мала. Максимальная амплитуда колебаний скорости установившихся колебаний зависит от локализации источника в объеме резонатора и почти на порядок меньшей соответствующей амплитуды колебаний при резонансном распределении вынуждающей силы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галицейский Б. М., Рыжов Ю. А., Якуш Е. В.* Тепловые и гидродинамические процессы в колеблющихся потоках. М.: Машиностроение, 1977.
2. *Галиуллин Р. Г., Репин В. Б., Халилов Г. Г.* Течение вязкой жидкости и теплообмен в звуковом поле. Казань: Изд-во Казанского гос. университета, 1978.
3. *Лебедева И. В.* Седьмая Акустическая конференция в ГДР // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 4. С. 760.
4. *Канер В. В., Руденко О. В., Хохлов Р. В.* К теории нелинейных колебаний в акустических резонаторах // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 5. С. 756–765.
5. *Штарас А. Л.* О малых вынужденных колебаниях нелинейного звукового резонатора // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 3. С. 592–595.
6. *Гусев В. Э.* Установление вынужденных колебаний в акустических резонаторах // Акуст. журн. 1986. Т. 30. № 2. С. 204–215.
7. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. Новосибирск: Наука, 1973.
8. *Ковеня В. М., Яненко Н. Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
9. *Березин Ю. А.* Моделирование нелинейных волновых процессов. Новосибирск: Наука, 1982.
10. *Девятериков И. А.* Установление интенсивных вынужденных колебаний в акустическом резонаторе // Тез. докл. II конф. Численные методы в современных волновых задачах акустики. М.: АКИН, 1988. С. 62.

Отдел теоретических проблем
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
27.XII.1988