АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXV 1989 Вып. 6

УДК 534.26

БАЛАНСНАЯ КОМПЕНСАЦИЯ АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ©

Митюгов В. В.

На основе простой модели обсуждаются общие закономерности акустического излучения механических конструкций. Выведены формулы, позволяющие оценить суммарный выигрыш от снижения дипольного излучения за счет воздействия добавочной компенсирующей силы.

Для расчета акустического излучения протяженных конструкций обычно используют разложение по мультипольным составляющим сферических волн [1]. Во многих случаях оказывается, что определяющее значение имеют лишь монопольная и дипольная компоненты. Во-первых, это заведомо так в области низких частот. Во-вторых, излучение высших порядков нередко оказывается подавлено как затуханием звука в излучающей конструкции, так и отсутствием в ее свойствах какой-либо значительной пространственной симметрии.

Частотные зависимости дипольной и монопольной компонент излучаемой мощности различны. Поэтому существует возможность уменьшить суммарное излучение в некотором диапазоне частот путем изменения симметрии расположения сил, возбуждающих вибрации. Так, дипольное излучение можно полностью подавить, если в противовес возбуждающей силе $f(t)$ синфазно приложить силу в диаметрально противоположной точке конструкции (динамическая балансная компенсация). Можно выбрать и другую точку, но позаботившись об отсутствии дисбалансов по моментам сил. Заметим, что компенсирующее воздействие будет наиболее эффективным в легких частях конструкции.

Разумеется, при этом заведомо возрастет излучение монопольной компоненты, однако полная мощность может упасть. Мы покажем, что внесение дополнительной локальной жесткости в точке приложения силы может сделать это уменьшение суммарного излучения значительным.

В большинстве практически интересных случаев интенсивности монопольной и дипольной компонент излучения мало зависят от формы излучающего тела. Для монополя эта интенсивность определяется просто амплитудой изменений объема [2]. Для диполя слабая зависимость низкочастотного излучения от формы получается в предположении нулевой плавучести тела [3], дающем возможность однородным образом учитывать колебания самого тела и присоединенной массы среды.

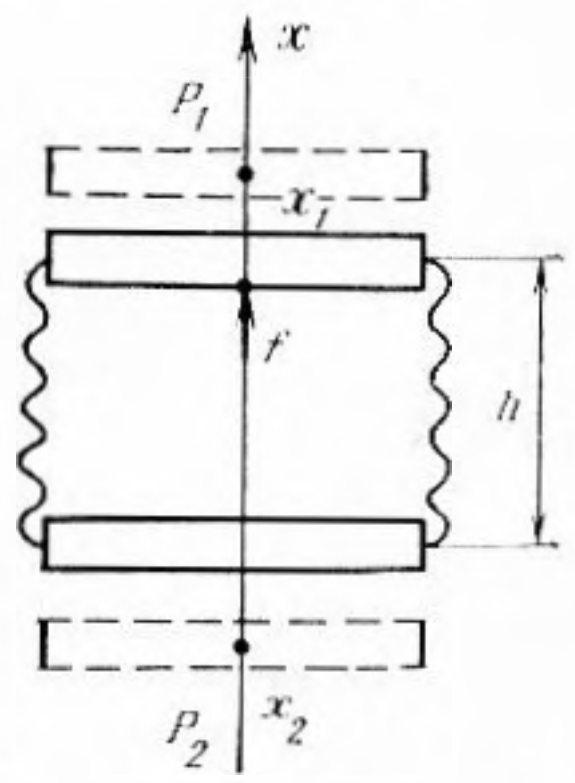

Рис. 1. Двухпоршневая модель

Указанные обстоятельства позволяют исследовать акустическое излучение сложного объекта на простых моделях в надежде, что затем соответствие реальности может быть достигнуто подбором небольшого числа исходных параметров.

Рассмотрим два круглых поршня одного диаметра, помещенных в торцах упругой непроницаемой оболочки (рис. 1). Расстояние между поршнями h, мгновенные координаты колеблющихся поршней — x_1 и x_2. Обозначим через $P(x)$ амплитуду давления звукового излучения от поршней, осциллирующих по закону $\exp(i\omega t)$ с произвольными амплитудами и на-

чальными фазами. Предполагая получить лишь оценочные формулы, будем считать амплитуду давления на всей площади каждого из поршней постоянной. Численные расчеты показывают [4], что это допущение не слишком далеко от истины даже для поршней малых волновых размеров.

Запишем колебательные скорости прилегающих слоев жидкости, совпадающие со скоростями поршней:

$$u_1 = \frac{i}{k\rho c}\left(\frac{dP}{dx}\right)_{x=\frac{h}{2}} = \dot{x}_1, \tag{1}$$

$$u_2 = \frac{i}{k\rho c}\left(\frac{dP}{dx}\right)_{x=-\frac{h}{2}} = \dot{x}_2, \tag{2}$$

где $k=\omega/c$. Обозначим $P_{1,2}=P(x=\pm h/2)$ и введем элементы z_{jk} акустической импедансной матрицы, определив их с помощью формулы

$$P_j = \sum_{k=1,2} z_{jk} u_k. \tag{3}$$

Здесь нужно полагать $z_{21}=-z_{12}$, поскольку вектор нормали к излучающей поверхности $\mathbf{n}_2$ в точке $x=-h/2$ направлен против $\mathbf{n}_1$. При переходе от давлений к векторам сил и механическим импедансам привычная симметрия матриц восстанавливается.

Вычислим излучаемую мощность N как среднее по времени и суммарное по элементам излучающей поверхности значение проекции вектора Умова $P\cdot\mathbf{u}$ на единичные векторы нормалей

$$N = \frac{1}{2} S \operatorname{Re}(P_1 u_1^* - P_2 u_2^*) = \frac{1}{2} S \operatorname{Re}[z_{11}|u_1|^2 - z_{22}|u_2|^2 + z_{21}(u_1 u_2^* + u_1^* u_2)], \tag{4}$$

где S — площади поршней. Чтобы исключить перекрестные члены типа $u_1 u_2^*$, воспользуемся следующим обстоятельством. Учитывая симметрию условий взаимодействия поршней со средой и очевидное $(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2)=-1$, имеем $z_{11}=-z_{22}$. Поэтому диагонализация импедансной матрицы в (4) достигается введением скоростей v_1, v_2, связанных с исходными u_1, u_2 плоским поворотом на угол $\pi/4$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_2 - v_1), \tag{5}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_2 + v_1). \tag{6}$$

Вместо (4) получим

$$N = \frac{1}{2} S \operatorname{Re}[(z_{11}-z_{12})|v_1|^2 + (z_{11}+z_{12})|v_2|^2]. \tag{7}$$

Сделаем небольшое отступление. Введение скоростей v_1, v_2 здесь необязательно означает переход к нормальным колебаниям рассматриваемой механоакустической системы. В свою очередь правильным образом введенные амплитуды скоростей нормальных колебаний не всегда выражают излучаемую мощность N через простую комбинацию их квадратов.

Сформулируем достаточный критерий возможности совпадения «нормально-колебательных» переменных с «нормально-излучательными». Обозначим $\mathfrak{z}_{jk}$ ту составляющую полной матрицы механического импеданса Z_{jk}, которая обусловлена наличием среды:

$$\begin{gathered} \mathfrak{z}_{11}=Sz_{11};\ \mathfrak{z}_{12}=Sz_{12}, \\ \mathfrak{z}_{21}=-Sz_{21};\ \mathfrak{z}_{22}=-Sz_{22}, \end{gathered} \tag{8}$$

Согласно известной теореме [5], матрицы $\mathfrak{z}_{jk}$ и Z_{jk} могут быть приведены

к диагональному виду одним и тем же линейным преобразованием переменных, если они коммутируют между собой

$$\sum_k (\mathfrak{z}_{jk}Z_{kl}-Z_{jk}\mathfrak{z}_{kl})=0. \tag{9}$$

Чтобы обладать универсальностью, условие (9) должно выполняться на всех частотах [1]. Это и есть искомый критерий, в такой форме пригодный для объекта с любым числом степеней свободы. В частности, сформулированному критерию удовлетворяют конструкции, у которых симметрия внутренних механических свойств не ниже их акустической симметрии. Это, например, сферические или цилиндрические оболочки с однородным распределением масс. В рассматриваемой нами простейшей схеме представителем класса однородных конструкций будет симметричная двухпоршневая модель, в которой массы поршней одинаковы.

Из структуры (5)—(6) нетрудно видеть, что независимо от характера движения поршней слагаемые в правой части (7) суть просто монопольная и дипольная компоненты излучения. Поэтому комбинация в квадратных скобках перед $|v_2|^2$ есть акустический импеданс диполя $z_д$, нормированный к единичной площади. Чтобы получить простые обозримые оценки, воспользуемся формулой для плоского ($h<r$) диполя

$$z_{11}+z_{12}=z_д=\frac{\rho cikr}{\sigma+\sigma^{-1}}, \tag{10}$$

где $\sigma=1+ikr$, а r — радиус сферы, равновеликой поршню по площади: $S=4\pi r^2$ (см. [2]). Удельное сопротивление излучения диполя при $kr\ll 1$ есть

$$R_д=\mathrm{Re}\, z_д \simeq \frac{1}{4}\rho c k^4 r^4. \tag{11}$$

Аналогично для $z_{11}-z_{12}$ примем акустический импеданс монополя

$$z_{11}-z_{12}=z_м=\rho cikr\sigma^{-1}. \tag{12}$$

Отсюда получаем

$$z_{11}=\frac{\rho cikr(2+\sigma^{-2})}{2(\sigma+\sigma^{-1})}, \tag{13}$$

$$z_{12}=-\frac{\rho cikr}{2\sigma(1+\sigma^2)}. \tag{14}$$

Вычислим амплитуды колебаний поршней при заданном монохроматическом силовом воздействии. Импедансная форма уравнений движения системы связанных механических элементов имеет вид

$$\sum_k Z_{jk}u_k=f_j; \tag{15}$$

здесь f_j представляют собой амплитуды сил, действующих по закону $\exp(i\omega t)$ на элементы (или степени свободы) системы.

Рассмотрим случай, когда возбуждающая сила с амплитудой f действует на первый поршень. Тогда

$$Z_{11}u_1+Z_{12}u_2=f, \tag{16}$$

$$Z_{21}u_1+Z_{22}u_2=0,$$

где под Z_{jk} понимаются элементы матрицы полного импеданса, учитывающие как чисто механические факторы, так и взаимодействие поршней со

[1] В общем случае имеются еще дополнительные тонкости, связанные с эрмитовостью импедансных матриц. Однако в этой статье мы их затрагивать не будем.

средой. Подставляя (5)–(6) в (16), найдем амплитуды скоростей

$$v_1 = -\frac{f}{\sqrt{2}} \frac{Z_{22}+Z_{21}}{Z_{11}Z_{22}-Z_{12}^2}, \tag{17}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Z_{22}-Z_{12}}{Z_{11}Z_{22}-Z_{12}^2}. \tag{18}$$

Конкретизируем эти формулы. Обозначим $m_{1,2}$ массы поршней и χ – коэффициент упругой связи между ними. Внутренние вязкие потери легко учесть, считая χ комплексным: $\chi \to \chi + i\omega\lambda$. На этом этапе можно усложнить модель, заменив простую упруговязкую связь некоторой колебательной системой с произвольным числом собственных резонансов. Однако здесь этого делать не будем. Составим уравнение движения первого поршня сначала без учета его взаимодействия со средой

$$i\omega m_1 u_1 + \frac{\chi}{i\omega}(u_1 - u_2) = f. \tag{19}$$

Отсюда

$$Z_{11} = i\omega m_1 + \frac{\chi}{i\omega}; \quad Z_{12} = -\frac{\chi}{i\omega}. \tag{20}$$

Аналогично

$$Z_{21} = Z_{12}; \quad Z_{22} = i\omega m_2 + \frac{\chi}{i\omega}. \tag{21}$$

Запишем числители формул (17), (18), теперь уже добавив к внутренним силам проекции на ось x сил, действующих со стороны среды. Получим

$$Z_{22} - Z_{12} = i\omega m_2 + 2\frac{\chi}{i\omega} + Sz_{\text{м}}, \tag{22}$$

$$Z_{22} + Z_{12} = i\omega m_2 + Sz_{\text{д}}. \tag{23}$$

Обратимся к знаменателю правых частей указанных формул (детерминанту системы (16)). Без учета среды получим

$$Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 = -\omega^2 m_1 m_2 + \chi(m_1 + m_2). \tag{24}$$

Чтобы учесть влияние среды, нужно просто добавить к элементам импедансной матрицы значения Sz_{jk}, взятые с надлежащими знаками. Это изменит эффективные значения параметров в (24), однако выписывать соответствующие поправки в общем виде мы не будем.

Формулы (17), (18) принимают особенно простой вид в случае однородной (симметричной) модели, когда $Z_{11} = Z_{22}$. Тогда в нашем примере

$$v_1 = \frac{-f}{\sqrt{2}\left(i\omega m + 2\frac{\chi}{i\omega} + Sz_{\text{м}}\right)}, \tag{25}$$

$$v_2 = \frac{f}{\sqrt{2}(i\omega m + Sz_{\text{д}})}, \tag{26}$$

где $m = m_1 = m_2$. Из (26) следует, что дипольное излучение имеет нерезонансный характер. Пренебрегая в знаменателе (26) реальной частью дипольного импеданса, для второго слагаемого в (7) получим приближенное выражение ($kr \ll 1$)

$$N_{\text{д}} = \frac{f^2}{16} S\rho c \frac{\omega^2}{\omega_{\text{г}}^4 (m + m_{\text{д}})^2}, \tag{27}$$

где $\omega_{\text{г}} = c/r$ и $m_{\text{д}} = S\,\mathrm{Im}\, z_{\text{д}}/i\omega$ – присоединенная масса диполя. Это выражение (дипольную формулу, [3]) удобно использовать в качестве норми-

рующего делителя, относя к $N_д$ при $kr \ll 1$ вклады различных излучательных механизмов в полную мощность. Так, нормированный к (27) дипольный вклад для произвольных kr выразится формулой

$$\eta_д = \left(1 + \frac{1}{4} k^4 r^4\right)^{-1} = \frac{4\omega_г^4}{\omega^4 + 4\omega_г^4}. \tag{28}$$

Нерезонансное излучение монополя на низкой частоте при условии $kr \ll 1$ дает вклад

$$\eta_м = \omega^2 \omega_г^2 \frac{(m+m_д)^2}{(\mathrm{Re}\,\chi)^2}. \tag{29}$$

Согласно (25) резонанс монопольного излучения наступает на частоте $\omega_м = \sqrt{2\,\mathrm{Re}\,\chi/(m+m_м)}$, где $m_м = S\,\mathrm{Im}\,z_м/i\omega$. Для определенности в дальнейшем будем полагать $\omega_м > \omega_г$. Тогда при $kr > 1$ получим

$$\eta_м = \frac{16\omega_г^4}{[(\omega_м^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma_м^2]} \left(\frac{m+m_д}{m+m_м}\right)^2. \tag{30}$$

Здесь $2\gamma_м = S\rho c/(m+m_м)$ — ширина монопольного резонанса без учета внутренних потерь. На рис. 2 показана качественная зависимость от частоты нормированной полной мощности излучения, полученная на основе формул (28)—(30). Тонкой линией изображены парциальные вклады монопольной и дипольной компонент, жирной — результирующее суммарное значение. Пунктиром намечены резонансные всплески, возможные у реальной конструкции за счет ее более сложной колебательной структуры по сравнению с нашей моделью.

В неоднородной модели ($Z_{11} \neq Z_{22}$) дипольное излучение приобретает резонансный характер. Проанализируем поведение дипольной колебательной скорости v_2 в отсутствие среды. С учетом сделанных допущений получим

$$v_2 = \frac{f}{\sqrt{2}} \frac{\omega_2^2 - \omega^2}{i\omega m_1 (\omega_0^2 - \omega^2)}, \tag{31}$$

где $\omega_2^2 = 2\chi/m_2$, $\omega_0^2 = \chi(m_1+m_2)/m_1 m_2$. Если χ комплексна, то комплексными нужно считать и ω_0, ω_2. При $m_1 = m_2$ колебания диполя становятся нерезонансными. Характерно, что знак резонансной амплитуды v_2 при $\omega^2 = \mathrm{Re}\,\omega_0^2$ будет определяться соотношением $m_1 \gtrless m_2$. Учет влияния среды лишь изменит значения реальных и мнимых частей ω_0^2 и ω_2^2, тогда как все последующие выводы качественного характера останутся в силе.

Как показывает структура числителя в (31), существует принципиальная возможность управлять спектральным составом дипольной компоненты излучения, изменяя ω_2. Например, этого можно достичь присоединением добавочной массы ко второму поршню (для конструкций более общего вида — в точке, противоположной точке приложения возбуждающей силы). К тому же результату приведет изменение χ. Разумеется, в обоих случаях будет меняться и резонансная частота ω_0.

Смена знака амплитуды v_2 приводит к изменению углового распределения излучаемой мощности. Хотя диаграмма направленности излучения не вычислялась, сформулировать некоторые общие соображения на этот счет можно без особого труда. Сохраняя прежние допущения, запишем амплитуду колебательной скорости монополя

$$v_1 = -\frac{f}{\sqrt{2}} \frac{i\omega}{m_1(\omega_0^2 - \omega^2)}. \tag{32}$$

Диаграмма направленности совместного результирующего излучения монополя и диполя хорошо известна [3]. В нашей модели максимум этой кривой будет расположен в направлении внешней нормали к тому из поршней, скорость которого u_j возрастает по модулю при когерентном

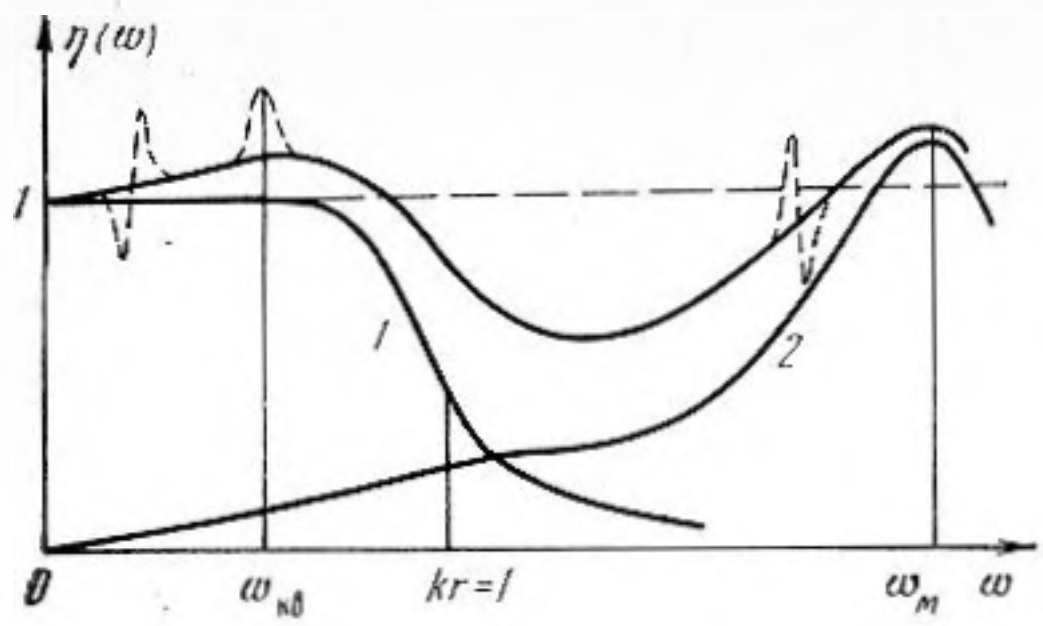

Рис. 2

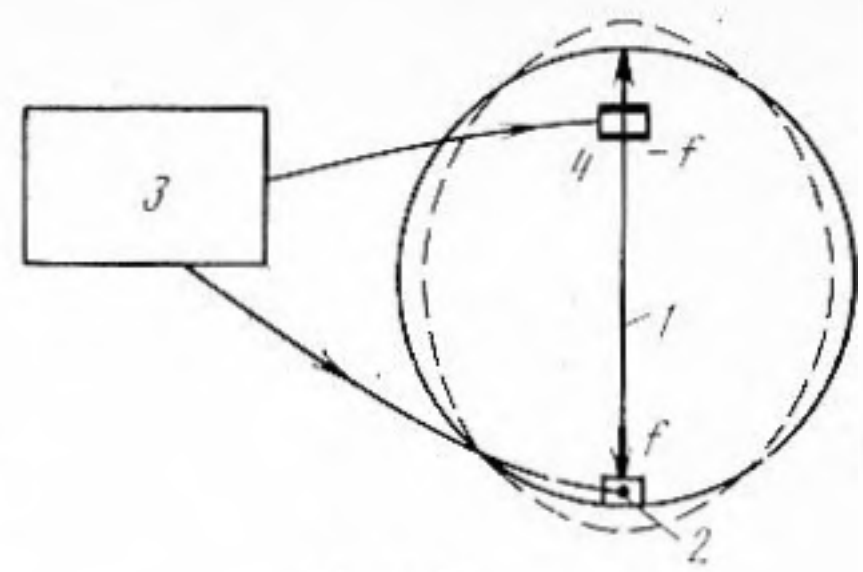

Рис. 3

Рис. 2. Излучательная способность модели (нормирована к диполю малых размеров): *1* – парциальный вклад дипольной компоненты, *2* – вклад монопольной компоненты

Рис. 3. Схема балансной компенсации акустического излучения от упругого кольца: *1* – струна, *2* – датчик силы, *3* – усилитель, *4* – вибровозбудитель

сложении монопольной и дипольной компонент. С учетом (8) запишем

$$u_2 = \frac{f}{\sqrt{2}} \frac{\omega_2^2}{i\omega m_1(\omega_0^2-\omega^2)}. \tag{33}$$

Удобно сравнивать модуль этой величины с величиной $|v_1|/\sqrt{2}$, соответствующей вкладу в $|u_2|$ одного лишь монополя. При $\mathrm{Re}\,\omega_2^2>\omega^2$ имеем $|u_2|>|v_1|/\sqrt{2}$, следовательно, максимум излучения лежит в направлении внешней нормали второго поршня. При $\mathrm{Re}\,\omega_2^2<\omega^2$ все происходит наоборот, т. е. преобладает излучение в направлении $\mathbf{n}_1$ (на рис. 1 – вверх). Отсюда легко определить и преимущественную направленность резонансного излучения, просто положив $\omega^2=\mathrm{Re}\,\omega_0^2$. Обращаясь к связи частот ω_2 и ω_0 с массой m_2 и приведенной массой $m_1m_2/(m_1+m_2)$, сформулируем следующее почти очевидное утверждение: бо́льшая резонансная мощность излучается в сторону меньшей массы. Нетрудно проследить, что справедливость этого утверждения не зависит от того, куда приложена возбуждающая сила.

Оценим возможности динамической балансной компенсации дипольного излучения, воспользовавшись для этой цели формулами (27)–(29). Приложим ко второму поршню осциллирующую силу с амплитудой $-f$ (сохраняя прежнее возбуждение f на первом поршне). Непосредственно из (15) применительно к однородной модели обнаружим полную компенсацию дипольной скорости ($v_2=0$), тогда как v_1 по сравнению с (25) удвоится. Полная мощность $\tilde{N}$ станет равна учетверенной мощности, первоначально содержавшейся в монопольной компоненте.

Сейчас мы не будем обсуждать способы реализации такого компенсирующего воздействия. Например, это может быть активная система, включающая датчик в точке приложения силы к первому поршню, усилитель и возбудитель антивибраций, действующий на второй поршень (рис. 3).

При $\omega<\omega_г$ относительное изменение мощности легко находится с помощью (29)

$$\frac{\tilde{N}}{N} = \frac{4\eta_м}{1+\eta_м}. \tag{34}$$

Эта величина меньше единицы, если $\chi>2\omega\omega_г(m+m_д)$. Фактически нужно обеспечить выполнение этого неравенства во всем диапазоне частот $0\leqslant\omega\leqslant\omega_г$, т. е. удовлетворить условию

$$\mathrm{Re}\,\chi>2\omega_г^2(m+m_д). \tag{35}$$

Таким образом, для эффективности обсуждаемого метода жесткость конструкции должна быть достаточно велика. При этом в конструкциях общего вида существенно, чтобы никакая из резонансных частот не оказалась слишком низкой.

Отметим одну возможность искусственного создания локальной жесткости в точках приложения сил, что достаточно для осуществления эффективной балансной компенсации. Закрепим в этих точках концы струны (стержня, троса) и натянем ее, тем самым реализовав предварительно напряженную конструкцию. На рис. 3 эта ситуация показана на примере упругого кольца (отрезка цилиндрической оболочки). Для малых колебаний результирующая жесткость по отношению к возбуждению вибраций в указанных точках будет суммироваться из жесткости исходной конструкции и продольной жесткости струны на растяжение. Подбирая материал и диаметр струны, эту величину можно сделать значительной.

Непосредственно из рис. 3 нетрудно видеть, что в такой схеме будет подавлено и резонансное квадрупольное излучение, связанное с изгибными деформациями кольца (показаны пунктиром). Это существенно, поскольку при неоднородном распределении масс подобные колебания способны дать резонансный вклад и в дипольную компоненту, тем самым существенно подняв суммарный уровень излучения. Справедливость последнего утверждения можно обосновать соображениями симметрии, подобными использованным выше, без детального расчета. Собственная частота квадруполя $\omega_{кв}$ нередко лежит ниже $\omega_г$ (рис. 2), что делает отмеченное обстоятельство достаточно важным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лепендин Л. Ф.* Акустика. М.: Высш. шк., 1978.
2. *Скучик Е.* Простые и сложные колебательные системы. М.: Мир, 1971.
3. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1978.
4. *Шендеров Е. Л.* Излучение звука осциллирующим диском без экрана // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 2. С. 326–335.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1977.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
12.XII.1988