

УДК 550.344.094 + 534.222.2

© 1990 г.

В. Е. Назаров, Л. А. Островский

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С СИЛЬНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Исследуются закономерности распространения упругих волн в средах с сильной акустической нелинейностью, когда нелинейность уравнения состояния среды преобладает над кинематической нелинейностью уравнений движения. На примере среды с разномодульной упругостью рассматривается процесс формирования ударной волны и находится ее форма.

Нелинейная эволюция профиля волн конечной амплитуды с образованием разрывов — ударных волн — изучается в акустике, как правило, применительно к средам со слабой квадратичной нелинейностью [1, 2]. Это относится и к волнам в твердых средах, для которых используют (в изотропном случае) известную пятиконстантную теорию упругости [1, 3]. Для продольных деформаций в изотропной среде зависимость напряжения σ от деформации ε имеет вид

$$\sigma(\varepsilon) = E \left(\varepsilon - \frac{\gamma}{2} \varepsilon^2 + \dots \right), \quad (1)$$

где $E = (\partial\sigma/\partial\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$ — модуль упругости среды, $\gamma = E^{-1} (\partial^2\sigma/\partial\varepsilon^2)|_{\varepsilon=0}$ — параметр квадратичной нелинейности.

Вместе с тем в последнее время все больше внимания уделяется структурно-неоднородным средам, в которых величина нелинейности оказывается аномально большой по отношению к той, которая связана с межмолекулярными силами и описывается формулой (1). При этом зависимость $\sigma(\varepsilon)$ имеет более сложный вид. Такие зависимости характерны для сред с дислокациями, микротрещинами и другими неоднородностями. Эффекты аномальной акустической нелинейности наблюдались в последнее время, например, для грунта Земли [4, 5] и для металлов [6].

Для таких сред эффективный параметр γ , имеющий порядок отношения физической упругой нелинейности к кинематической, достигает значений 10^2 — 10^3 .

В данной работе обсуждаются свойства упругих волн в средах с сильной нелинейностью, когда нелинейность уравнения состояния среды $\sigma(\varepsilon)$ преобладает над кинематической нелинейностью уравнений движения.

Рассмотрим сначала некоторые общие свойства упругих волн в таких средах. Согласно сказанному выше, в уравнениях движения среды будем учитывать только нелинейность зависимости $\sigma(\varepsilon)$ и пренебрегать кинематической нелинейностью, т. е. различием лагранжевой и эйлеровой форм уравнений упругости. В этом случае уравнения упругости для одномерных продольных волн можно записать в виде

$$\rho_0 V_t = \sigma_x(\varepsilon) + \Pi_x, \quad (2)$$

$$\rho_t + \rho_0 V_x = 0, \quad (3)$$

$$\varepsilon = U_x, \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (4)$$

$$V = U_t, \quad (5)$$

где ρ_0 — невозмущенная плотность среды, $\rho' = \rho - \rho_0$ — возмущение плотности среды, U — смещение, V — скорость частиц среды, Π — продольная компонента вязкого тензора. Мы не конкретизируем вида Π

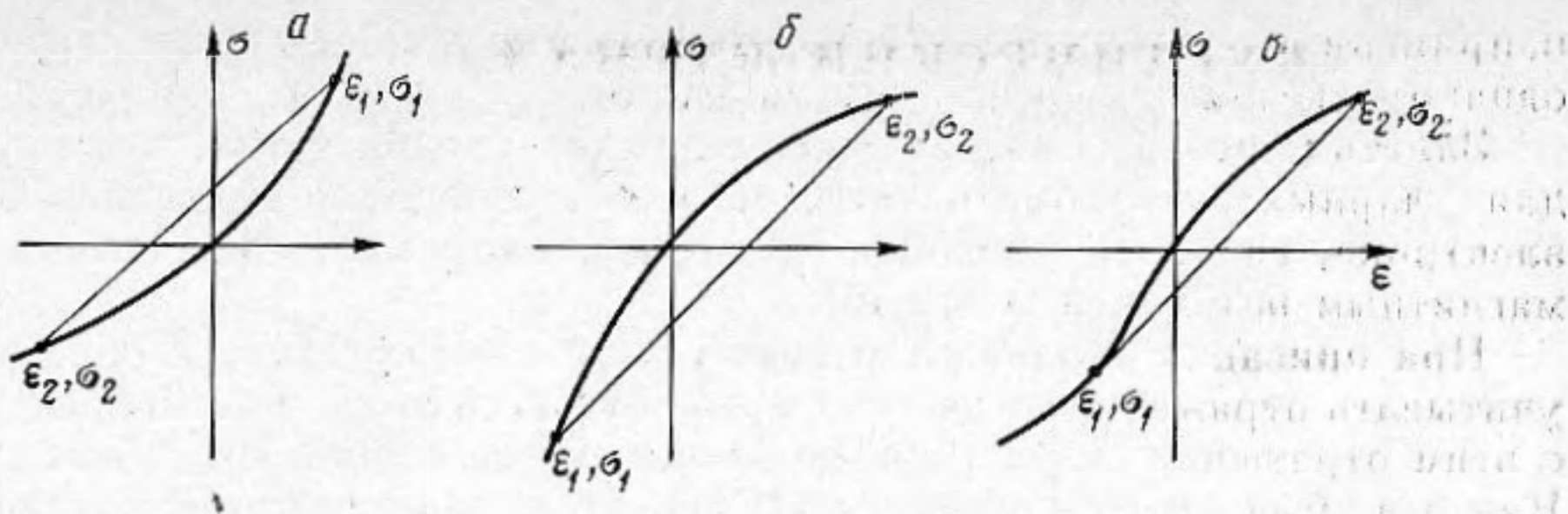


Рис. 1.

Рис. 1. Примеры устойчивых разрывов для сред с различными зависимостями $\sigma(\epsilon)$

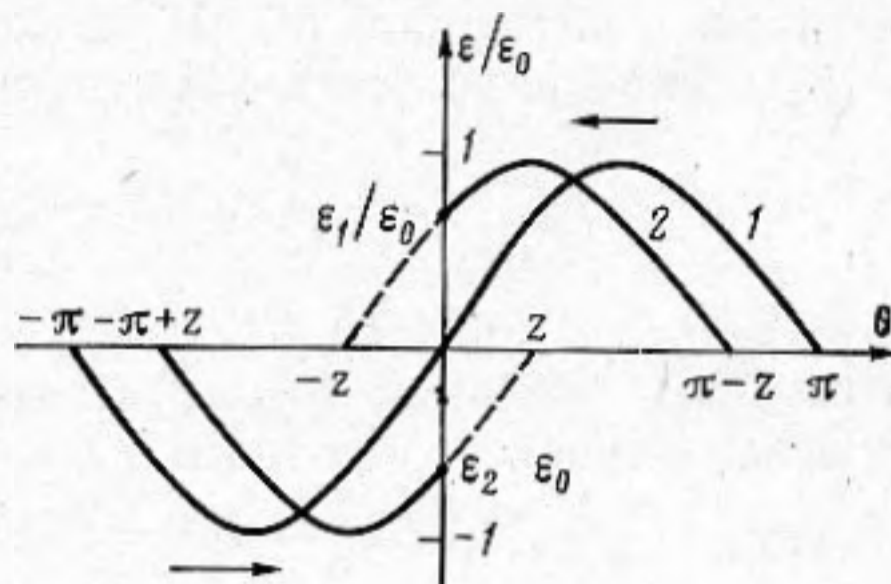


Рис. 2.

Рис. 2. Эволюция первоначально гармонической волны; 1 — форма колебания при $z = 0$; 2 — профиль волны на расстоянии $z < \pi$

(в подобных случаях классические модели вязкости могут и не работать), предполагаем только, что $\Pi = 0$ (U_{xx}). Заметим сразу, что уравнение непрерывности линейно. Записывая решение в виде стационарной бегущей волны, т. е. полагая $U, V, \epsilon, \sigma \propto \xi = x - c_s t$ ($c_s = \text{const}$) и интегрируя по ξ от $-\infty$ до $+\infty$, получим граничные условия на разрыве — ударном фронте:

$$\rho_0 c_s (V_1 - V_2) = -(\sigma_1 - \sigma_2), \quad (6)$$

$$c_s (\rho_1 - \rho_2) = \rho_0 (V_1 - V_2). \quad (7)$$

$$c_s (\epsilon_1 - \epsilon_2) = -(V_1 - V_2). \quad (8)$$

где индексы 1 и 2 относятся к величинам за и перед разрывом (напомним, что $\Pi_1 = \Pi_2 = 0$). Из этих уравнений следует выражение для скорости разрыва

$$c_s = [(\sigma_1 - \sigma_2)/\rho_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2)]^{1/2}. \quad (9)$$

Эта формула (отвечающая адиабате Гюгонио в газодинамике [7]) имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Очевидно, что тангенс угла наклона касательной к кривой $\sigma(\epsilon)$ в каждой точке пропорционален квадрату местной скорости звука (скорости простой волны) $c_l = (\rho_0^{-1} \sigma_{\epsilon}')^{1/2}$. Вместе с тем, согласно (9), c_s^2 пропорционально тангенсу угла наклона секущей, соединяющей точки (ϵ_1, σ_1) и (ϵ_2, σ_2) . Для эволюционного скачка, как известно [7], должно выполняться условие $c_{l2} < c_s < c_{l1}$, обеспечивающее его устойчивость. Поэтому в случае, изображенном на рис. 1, а, на устойчивом перепаде σ и ϵ растут, а для рис. 1, б — падают. Отметим еще случай, когда кривая $\sigma(\epsilon)$ имеет точку перегиба (рис. 1, в). Здесь возможны ударные волны разных знаков. Но для эволюционного скачка прямая, соединяющая точки 1 и 2, не должна пересекать кривую $\sigma(\epsilon)$ между этими точками, поскольку участок за точкой касания превращается в волну разрежения. Этот вопрос рассматривался применительно к модифицированному (с кубичной нелинейностью) уравнению Бюргера [8].

Из уравнений (7), (8) следует

$$\rho_1 - \rho_2 = -\rho_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2), \quad (10)$$

т. е. рост ϵ на скачке отвечает ударной волне разрежения ($\rho_1 < \rho_2$), уменьшение ϵ — ударной волне сжатия ($\rho_1 > \rho_2$). Следовательно, здесь

неприменимо утверждение о неустойчивости ударных волн разрежения, однако энтропия, конечно, всегда растет.

Заметим, что рассматриваемая ситуация сходна с той, что изучалась для ударных электромагнитных волн в нелинейном магнетике или диэлектрике, где роль кривой $\sigma(\epsilon)$ играет, например, зависимость между магнитным потоком и током [9].

При описании эволюции ударной волны необходимо, вообще говоря, учитывать отражение от нее непрерывной части поля. Рассмотрим в связи с этим отражение от разрыва догоняющей его слабой (линейной) волны. Как и в обычной газодинамике [7], запишем возмущенные граничные условия (6)–(8), используя при этом линейные связи между возмущениями переменных в падающей (ϵ'_+ , V'_+) и отраженной (ϵ'_- , V'_-) волнах, с учетом (4), (5) (впереди разрыва возмущения отсутствуют):

$$V_{\pm}' = \frac{\partial}{\partial t} \int \epsilon_{\pm}'(x - c_1 t) dt = \mp c_1 \epsilon_{\pm}'. \quad (11)$$

Здесь $c_1 = c_l(\epsilon_1) = (\sigma_{\epsilon}'/\rho_0)^{1/2}|_{\epsilon=\epsilon_1}$.

Из граничных условий (6), (8) имеем (учитывая, что среда перед скачком остается невозмущенной)

$$\begin{aligned} \epsilon_1' (c_1^2 - c_s^2) &= 2c_s c_s' (\epsilon_1 - \epsilon_2), \\ V_1' + c_s \epsilon_1' &= -c_s' (\epsilon_1 - \epsilon_2), \end{aligned} \quad (12)$$

где штрихами помечены возмущения соответствующих величин. Подставляя сюда $\epsilon_1' = \epsilon_+' + \epsilon_-'$, $V_1' = V_+' + V_-'$ и используя равенства (11), находим коэффициент отражения

$$R = \frac{\epsilon_-'}{\epsilon_+'} = - \left(\frac{1 - c_s/c_1}{1 + c_s/c_1} \right)^2. \quad (13)$$

При этом частота отраженной волны преобразуется по известной формуле двойного доплер-эффекта:

$$\omega_- = \omega_+ \frac{1 - c_s/c_1}{1 + c_s/c_1}.$$

Заметим сразу, что при близких значениях c_s и c_1 коэффициент отражения оказывается, как и следовало ожидать, величиной второго порядка малости по разности $(1 - c_s/c_1)$.

Рассмотрим далее распространение упругой волны в модели нелинейной среды, материальное уравнение которой описывается кусочно-линейной функцией

$$\sigma(\epsilon) = \begin{cases} E_1 \epsilon, & \epsilon > 0, \\ E_2 \epsilon, & \epsilon < 0, \end{cases} \quad (14)$$

где E_1 и E_2 — модули упругости среды на растяжение и сжатие.

В работе [10] отмечалось, что сильная разномодульность присуща широкому классу материалов; в других работах [11] эти выводы подвергаются сомнению, однако допускается небольшое (единицы процентов) различие модулей E_1 и E_2 , что также отвечает сильной нелинейности в акустическом смысле, если $|\epsilon| \ll 10^{-2}$, а это практически всегда выполняется. Отмечалась также возможность разномодульности грунта Земли [4]. Причины этого эффекта не выяснены, однако результаты работы [12], где разномодульность создавалась искусственно в резине путем прорезания в ней щели, показывает, что возможной причиной разномодульности может служить наличие микротрещин, уменьшающих жесткость среды при растяжении.

Будем рассматривать распространение достаточно длинной продольной волны, когда членом Π_x в (2) можно пренебречь всюду, кроме разрывов. Дифференцируя (2) по x , получаем уравнение для ϵ

$$\epsilon_{tt} = \begin{cases} c_1^2 \epsilon_{xx}, & \epsilon > 0 \\ c_2^2 \epsilon_{xx}, & \epsilon < 0 \end{cases} \quad (15)$$

где $c_{1,2} = \sqrt{E_{1,2}/\rho_0}$ — скорость продольных волн разрежения и сжатия соответственно. Уравнение (15), учитывающее только нелинейность зависимости $\sigma(\varepsilon)$, справедливо при выполнении условий:

$$|\varepsilon| \ll |\beta|, \quad \beta = (E_1 - E_2)/(E_1 + E_2). \quad (16)$$

Для волны, бегущей в направлении положительных x , решение (15) удобно записать в виде

$$\varepsilon = \mathcal{F} \left\{ t - \frac{x}{c_0 \sqrt{1 + \beta \operatorname{sign} \varepsilon}} \right\}, \quad (17)$$

где $c_0^2 = (c_1^2 + c_2^2)/2$, а \mathcal{F} — произвольная функция, определяемая граничным условием на излучателе.

При гармоническом возбуждении среды, когда $\varepsilon(x=0, t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$, получаем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega \left\{ t - \frac{x}{c_0 \sqrt{1 + \beta \operatorname{sign} \varepsilon}} \right\}. \quad (18)$$

Представим функцию $\Phi(\beta) = (1 + \beta \operatorname{sign} \varepsilon)^{-1/2}$ в виде ряда

$$\Phi(\beta) = 1 - \frac{\beta}{2} \operatorname{sign} \varepsilon + \frac{3\beta^2}{8} + \dots = 1 - f_1 \operatorname{sign} \varepsilon + f_2, \quad (19)$$

где f_1 и f_2 определяются из уравнений

$$(1 + \beta)^{-1/2} = 1 - f_1 + f_2, \quad (1 - \beta)^{-1/2} = 1 + f_1 + f_2. \quad (20)$$

Подставляя (17) в (15), получаем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin [\theta + z \operatorname{sign} \varepsilon], \quad (21)$$

где $\theta = \omega \tau$, $\tau = t - x(1 + f_2)/c_0$, $\omega = c_0 k$, $z = kx f_1$. В отсутствие отражений решение (21) описывает эволюцию волны в системе координат, движущейся со скоростью $c_0(1 + f_2)^{-1}$. На рис. 2 показана эта эволюция на конечном расстоянии $z > 0$ от входа $z = 0$ (для определенности полагаем $\beta > 0$). Стрелками показаны направления движения положительного и отрицательного полупериодов волны в движущейся системе координат. Очевидно, на интервале $|\theta| \leq z$ сразу возникает неоднозначность в профиле волны (при $\beta < 0$ неоднозначность возникает в интервале $|\theta - \pi| \leq z$). Как обычно в подобных ситуациях, для устранения такой неоднозначности необходимо ввести разрыв, соединяющий точки на профиле волны, определяемые из граничного условия (9). Здесь, как и в «обычной» нелинейной акустике, возникают отражения от разрыва.

Далее, однако, мы будем считать разномодульность среды слабой, полагая $|\beta| \ll 1$. Покажем, что в линейном по β приближении отраженной волной можно пренебречь. Подставляя в (13) значение c_s из (9) при $|\beta| \ll 1$, т. е.

$$c_s = c_0 \left(1 + \frac{\beta}{2} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \right), \quad (22)$$

и $c_1 = c_0(1 + \beta/2)$, получаем

$$R = -\frac{\beta^2}{4} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \right)^2. \quad (23)$$

Коэффициент отражения R оказывается, как и следовало ожидать, малой величиной порядка β^2 , поэтому в первом приближении отраженной от разрыва волной можно пренебречь; при этом в разложении (19) нужно учитывать только линейные по β слагаемые, т. е.

$$\Phi(\beta) = 1 - (\beta/2) \operatorname{sign} \varepsilon, \quad f_1 = \beta/2. \quad (24)$$

Перейдем теперь к нахождению фазы разрыва θ_s . Для этого вычислим производную по времени от интеграла: $S = \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} (z - z_s) d\varepsilon$, где z_s — координата разрыва. Очевидно, S соответствует площади, отсекаемой разрывом в профиле волны (штриховая линия на рис. 2). Поскольку $\dot{z} = k\beta c_1/2$,

$a \dot{z}_s = kc_s/2$, легко показать

$$\frac{dS}{dt} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left(c_s - \frac{c_2 \varepsilon_2 - c_1 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \right) = 0. \quad (25)$$

Таким образом (с учетом нулевого начального значения S), получаем, что $S \equiv 0$, т. е. «правило площадей» [7] выполняется и в этом случае. Из этого, очевидно, следует, что если на входе в среду ($z = 0$) задано гармоническое (или любое нечетное) осциллирующее поле, то положительная и отрицательная фазы волны эволюционируют симметрично относительно разрыва, покоящегося в выбранной системе координат, так что $\theta_s = 0$. Следовательно, значения деформаций за и перед разрывом определяются выражением

$$\varepsilon_{1,2} = \pm \varepsilon_0 \sin z, \quad (26)$$

и, как следует из (22), $c_s = c_0$.

Интересно отметить, что уже на конечном расстоянии $z_d = \pi$ (или $x_d = \lambda \beta^{-1}$, $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны) в этом приближении вся энергия волны диссипирует и поле исчезает. Остается, правда, открытым вопрос, является ли этот результат точным; в принципе в следующем приближении по β может остаться слабый однополярный импульс, который уже не затухает.

В заключение приведем выражение для спектра первоначально гармонической волны в разномодульной среде при $z \ll \pi$:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left\{ \left[\cos z - \frac{1}{\pi} (z \cos z - \sin z) \right] \sin \theta + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \sin z + (-1)^n \sin nz}{n^2 - 1} \sin n\theta \right\}. \quad (27)$$

При $nz \ll \pi$ полученный таким методом спектр первоначально гармонической волны совпадает со спектром этой волны, найденным методом возмущений [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику М.: Наука, 1966.
2. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
4. Алешин А. С., Кузнецов В. В. О параметрах нелинейности грунтов // Нелинейная сейсмология (международ. симпоз. Тез. докл.). М.: Наука, 1986. С. 4.
5. Галкин И. Н., Григорянц Э. А. Нелинейные и неупругие эффекты при распространении интенсивных волн в горном массиве // Проблемы нелинейной сейсмологии. М.: Наука, 1987. С. 186—188.
6. Назаров В. Е., Островский Л. А., Соустова И. А., Сутин А. М. Исследование аномальной акустической нелинейности в металлах // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 3. С. 491—499.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
8. Lee-Barty I. P., Gripton D. G. Nonlinear wavemotion governed by the modified Burgers equation // Phil. Trans. Roy. Soc. L. 1987. V. A323. P. 173—209.
9. Островский Л. А. Образование и развитие ударных электромагнитных волн в линиях передачи с насыщенным ферритом // ЖТФ. 1963. Т. 33. № 9. С. 1080—1092.
10. Амбарцумян С. А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982.
11. Жуков А. М. Модули упругости материалов при растяжении и сжатии // ПМТФ. 1985. № 4. С. 128—131.
12. Антонец В. А., Донской Д. М., Сутин А. М. Нелинейная вибродиагностика расслоений и непрочности в многослойных конструкциях // Механика композитных материалов. 1986. № 5. С. 934—937.
13. Назаров В. Е., Сутин А. М. Генерация гармоник при распространении упругих волн в твердых нелинейных средах // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 4. С. 711—716.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26.09.88

V. E. Nazarov, L. A. Ostrovskii

ELASTIC WAVES IN MEDIA WITH STRONG ACOUSTIC NONLINEARITY

Regularities of the elastic wave propagation in media with the strong acoustic nonlinearity, when the nonlinearity of the medium state equation exceeds the kinematic one of the motion equations, are investigated. The formation of a shock wave is considered and its form is defined for a medium with different-module elasticity as an example.