

УДК 534

© 1990 г.

А. Н. Некрасов

ОБ ОДНОЙ АППРОКСИМАЦИИ СКОРОСТИ ЗВУКА  
В РАМКАХ СЛОИСТОЙ МОДЕЛИ ОКЕАНА

В работе описан алгоритм аппроксимации скорости звука в слоистом океане в виде дважды непрерывно дифференцируемой функции глубины. Приведены примеры расчетов, показывающих высокую точность вычисления лучевых траекторий.

Известно, что аппроксимация скорости звука в океане непрерывной, но не гладкой функцией глубины приводит к появлению нефизических особенностей вычисленного звукового поля — так называемых ложных каустик [1]. Введение гладкой аппроксимации с разрывами второй производной порождает бесконечно быстрые изменения вычисленного звукового поля как функции расстояния. Для их ликвидации необходимо введение дважды непрерывно дифференцируемой аппроксимации скорости звука. Применение для этой цели кубических сплайнов [2] заставляет решать лучевые уравнения либо численным интегрированием, либо вычислением эллиптических интегралов, что крайне неэффективно с точки зрения затрат машинного времени.

В настоящей работе описан алгоритм аппроксимации скорости звука в виде дважды непрерывно дифференцируемой функции глубины, допускающей вычисление лучевых траекторий в аналитическом виде, без применения каких-либо специальных функций.

Пусть имеется набор значений скорости звука на различных глубинах  $c(z_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . В дальнейшем удобно иметь дело с набором значений квадрата показателя преломления, определяемым согласно выражениям

$$n^2(z_i) = \frac{c_0^2}{c^2(z_i)}, \quad i = 1, \dots, N; \quad c_0 = \min_{i=1, \dots, N} \{c(z_i)\}. \quad (1)$$

Предположим, что имеются также значения производной квадрата показателя преломления  $g(z_i) = dn^2/dz|_{z=z_i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Поскольку эта величина не измеряется экспериментально, ее вертикальный профиль может быть вычислен, например, исходя из сплайн-интерполяции измеренного дискретного набора  $n^2(z_i)$ .

Будем считать, что на концах промежутков аппроксимации имеет место соотношение

$$\frac{d^2n^2(z)}{dz^2} = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим некоторый отрезок  $[z_L, z_R]$ . Будем считать, что

$$\begin{aligned} \frac{d^2n^2(z)}{dz^2} \Big|_{z=z_R} = \frac{d^2n^2(z)}{dz^2} \Big|_{z=z_L} = 0; \\ g(z_R) = g_R, \quad g(z_L) = g_L, \quad n^2(z_R) = n_R, \quad n^2(z_L) = n_L^2. \end{aligned} \quad (3)$$

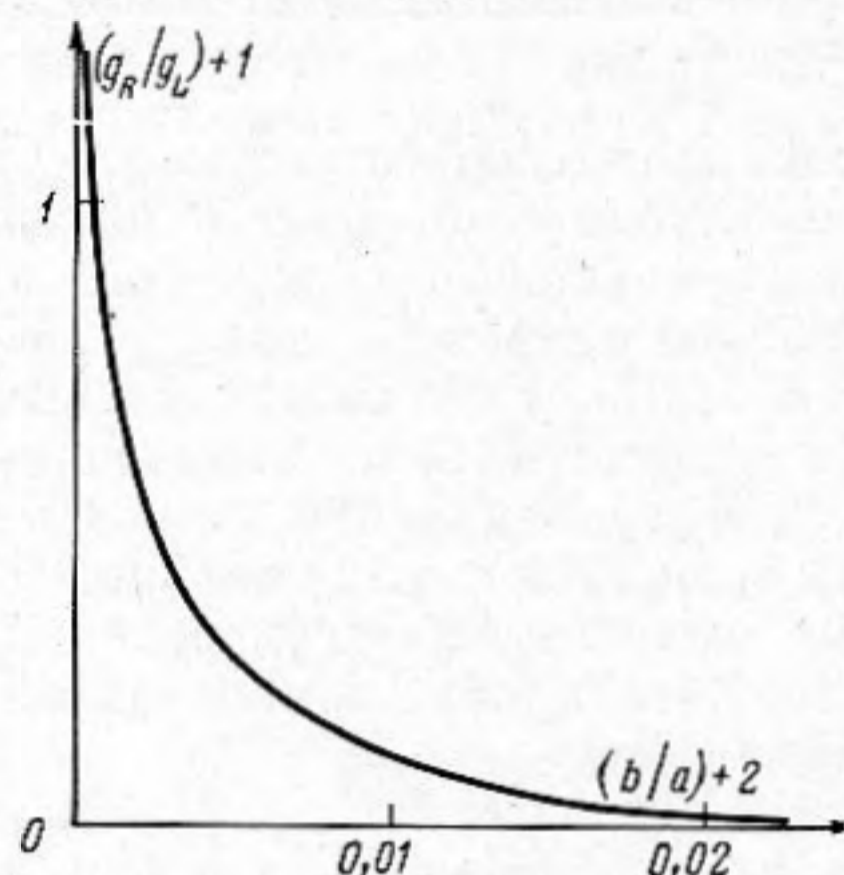
При этом  $z_L$  и  $z_R$  не обязаны совпадать с точками  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Введем аппроксимацию  $g(z)$  на указанном отрезке:

$$g(z) = a \frac{1 + \text{ch}^2(pz + q)}{\text{sh}^3(pz + q)} + b \frac{\text{ch}(pz + q)}{\text{sh}^3(pz + q)}. \quad (4)$$

Положим  $g_L = 1$  и выясним, какие значения может принимать величина  $g_R$  в зависимости от отношения  $\alpha = b/a$ . Из (3), (4) получаем систему

$$\begin{aligned} a \frac{1 + \operatorname{ch}^2 \tau_L}{\operatorname{sh}^3 \tau_L} + b \frac{\operatorname{ch} \tau_L}{\operatorname{sh}^3 \tau_L} &= g_L, \\ a \frac{1 + \operatorname{ch}^2 \tau_R}{\operatorname{sh}^3 \tau_R} + b \frac{\operatorname{ch} \tau_R}{\operatorname{sh}^3 \tau_R} &= g_R, \\ \frac{a \operatorname{ch} \tau_L (\operatorname{ch}^2 \tau_L + 5) + b (1 + 2 \operatorname{ch}^2 \tau_L)}{\operatorname{sh}^4 \tau_L} &= 0, \\ \frac{a \operatorname{ch} \tau_R (\operatorname{ch}^2 \tau_R + 5) + b (1 + 2 \operatorname{ch}^2 \tau_R)}{\operatorname{sh}^4 \tau_R} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\tau_L = pz_L + q$ ,  $\tau_R = pz_R + q$ . Выясним, при каких  $\tau_L$  и  $\tau_R$  могут удовлетворяться два последних уравнения (5). Исследование функции  $f(y) = (-y(5 + y^2))/(1 + 2y^2)$  при  $1 \leq y < +\infty$  показывает, что для любо-



Отношение производных квадрата показателя преломления на концах отрезка  $[z_L; z_R]$  в зависимости от отношения коэффициентов аппроксимации  $b/a$

го  $\alpha$  из интервала  $(-2; -(5/8)\sqrt{2,5})$  существуют два значения  $y$ :  $1 < y_L < \sqrt{5/2}$  и  $\sqrt{5/2} < y_R < 2$ , таких, что  $f(y) = \alpha$ . Следовательно, при  $-2 < \alpha < -(5/8)\sqrt{2,5}$  могут быть найдены  $\tau_L > 0$  и  $\tau_R > 0$ ,  $\tau_L < \tau_R$ , такие, что последние два уравнения системы (5) удовлетворяются. Величины  $a$ ,  $b$ ,  $g_R$  могут быть затем вычислены из первых двух уравнений системы (5). Зависимость  $g_R$  от  $\alpha$  при  $g_L = 1$  показана на рисунке, откуда видно, что эта величина может приобретать любое значение в интервале  $(+1; +\infty)$  (этот факт может быть строго доказан). Коэффициенты  $p$  и  $q$  вычисляются из системы уравнений

$$\begin{aligned} pz_L + q &= \tau_L, \\ pz_R + q &= \tau_R. \end{aligned} \quad (6)$$

Очевидно, полагая  $g_R = 1$ , можно подобрать коэффициенты в (4) так, чтобы  $g_L$  приобретало любое значение из интеграла  $(0; 1)$ . Следовательно, система (5) может быть (с помощью ЭВМ) решена при любых значениях  $g_L$  и  $g_R$ , если  $g_L > 0$ ,  $g_R > 0$ . Можно также доказать, что при любом фиксированном  $g_L \neq 0$  справедливы соотношения

$$\lim_{g_R \rightarrow +\infty} \int_{z_L}^{z_R} g(z) dz = \infty, \quad (7)$$

$$\lim_{g_R \rightarrow 0} \int_{z_L}^{z_R} g(z) dz = 0, \quad (8)$$

причем интеграл в (7), (8) является непрерывной и монотонной функцией  $g_R$ .

Перейдем теперь к аппроксимации  $n^2(z)$  на отрезке вертикального профиля  $[z_j; z_{j+1}]$ . На концах отрезка имеем

$$\begin{aligned} \left. \frac{dn^2(z)}{dz} \right|_{z=z_j} &= g_j, & \left. \frac{dn^2(z)}{dz} \right|_{z=z_{j+1}} &= g_{j+1}, \\ \left. \frac{d^2n^2(z)}{dz^2} \right|_{z=z_j} &= \left. \frac{d^2n^2(z)}{dz^2} \right|_{z=z_{j+1}} = 0, & g_j g_{j+1} &> 0. \end{aligned}$$

Кроме того, очевидно, должно выполняться следующее условие:

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} g(z) dz = n^2(z_{j+1}) - n^2(z_j). \quad (9)$$

Пусть  $z_M = (z_j + z_{j+1})/2$ . Функция  $g(z)$  будет аппроксимирована на отрезках  $[z_j; z_M]$  и  $[z_M; z_{j+1}]$  разными функциями вида (4), при этом величина  $g(z_M)$ , которая не задана в исходном профиле  $g_i, i = 1, \dots, N$ , должна быть подобрана так, чтобы выполнялось равенство (9). При условии

$$g_j g_{j+1} > 0, \quad (10)$$

как следует из (7), (8), такое значение  $g(z_M)$  существует. Оно может быть найдено методом последовательных приближений. Аналогично строится аппроксимирующее выражение при  $g_j < 0, g_{j+1} < 0, n^2(z_j) > n^2(z_{j+1})$ . Если же знаки  $g_j, g_{j+1}$  и  $n^2(z_{j+1}) - n^2(z_j)$  разные, то в исходные вертикальные профили  $n^2(z)$  и  $g(z)$  должны быть добавлены дополнительные точки для устранения такой ситуации. Это может быть сделано опять-таки с помощью сплайн-интерполяции профиля  $n^2(z)$ . Выражение для  $n^2(z)$  на каждом промежутке аппроксимации имеет вид

$$n^2(z) = h - \frac{a}{p} \frac{\text{ch}(pz + a)}{\text{sh}^2(pz + q)} - \frac{b}{2p} \frac{1}{\text{sh}^2(pz + q)}. \quad (11)$$

Заметим, что, поскольку в (6)  $\tau_L > 0$  и  $\tau_R > 0$ , знаменатели в (11) в нуль не обращаются. Если  $g_j g_{j+1} < 0$ , то в вертикальный профиль добавляется еще одна точка

$$\tilde{z} = z_j - \frac{(z_{j+1} - z_j)}{g_j} (g_{j+1} - g_j),$$

причем  $g(\tilde{z}) = 0, n^2(\tilde{z})$  можно вычислить исходя из сплайн-интерполяции профиля  $n^2(z)$ .

Рассмотрим, наконец, случай, когда  $dn^2/dz$  обращается в нуль в одной из точек вертикального профиля с номером  $j$ , причем  $1 < j < N, g_{j-1} g_{j+1} < 0$ . Тогда на отрезке  $[z_j - \delta; z_j + \delta]$  используется следующая аппроксимация  $g(z)$ :

$$g(z) = \frac{a \text{sh}(pz + q)}{\text{ch}^3(pz + q)}. \quad (12)$$

На концах отрезка  $g(z)$  приобретает равные по модулю и противоположные по знаку значения:  $g_0$  и  $-g_0$ ; при этом должно быть  $g_j g_0 > 0$  и  $g_{j+1} g_0 < 0$ , производная  $g(z)$  на концах отрезка обращается в нуль. Система уравнений для коэффициентов имеет вид

$$\begin{cases} a \text{sh} \tau_L / \text{ch}^3 \tau_L = g_0, & a \text{sh} \tau_R / \text{ch}^3 \tau_R = -g_0, \\ ap \frac{1 - 2 \text{sh}^2 \tau_L}{\text{ch}^4 \tau_L} = 0, \\ ap \frac{1 - 2 \text{sh}^2 \tau_R}{\text{ch}^4 \tau_R} = 0, \end{cases} \quad (13)$$

где  $\tau_L = p(z_j - \delta) + q$ ,  $\tau_R = p(z_j + \delta) + q$ . Решение системы (13) таково:  $\tau_L = \operatorname{arsh}(1/\sqrt{2})$ ,  $\tau_R = -\tau_L$ ,  $a = (3/2)\sqrt{3}g_0$ . Коэффициенты  $p$  и  $q$  находятся из системы уравнений, аналогичной (6). Константы  $\delta$  и  $g_0$  могут быть выбраны произвольно; в рассмотренном ниже примере расчетов было использовано  $\delta = \frac{1}{2} \min\{|z_j - z_{j-1}|, |z_{j+1} - z_j|\}$ ,  $|g_0| = \frac{1}{2} \min\{|g_{j-1}|, |g_{j+1}|\}$ , где  $j$  — номер точки, в которой  $d^2n^2(z)/dz = 0$ .

Аппроксимация  $n^2(z)$  на отрезке  $[z_j - \delta; z_j + \delta]$  имеет вид

$$n^2(z) = h - \frac{a}{2p} \frac{1}{\operatorname{ch}^2(pz + q)}. \quad (14)$$

Коэффициент  $h$  вычисляется из условия  $n^2|_{z=z_j} = n_j^2$ . Аппроксимация  $n^2(z)$  на отрезках  $[z_{j-1}; z_j - \delta]$  и  $[z_{j+\delta}; z_{j+1}]$  выполняется, как описано выше для случая одинаковых по знаку производных квадрата показателя преломления на концах промежутка. При этом вместо (9) используются соотношения

$$\int_{z_{j-1}}^{z_j - \delta} g(z) dz = n^2(z_j) - n^2(z_{j-1}) - \frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{arsh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) g_0 \delta,$$

$$\int_{z_j + \delta}^{z_{j+1}} g(z) dz = n^2(z_{j+1}) - n^2(z_j) + \frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{arsh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) g_0 \delta.$$

Вышеописанная процедура аппроксимации не охватывает некоторые из возможных ситуаций; так, аппроксимация невозможна, если в одной из точек профиля  $n^2(z)$  имеет перегиб. Однако подобные ситуации могут быть устранены введением в профили  $n^2(z)$  и  $g(z)$  новых, «фиктивных» точек. Вычисление лучевых траекторий производится по формуле [3]

$$x - x_0 = \int_{z_0}^z \frac{\cos \varphi dz}{\sqrt{n^2(z) - \cos^2 \varphi}}, \quad (15)$$

где  $\varphi$  — угол скольжения луча на оси подводного звукового канала. С учетом (11) имеем

$$x - x_0 = \int_{z_0}^z \frac{\cos \varphi dz}{\left[ -\frac{a}{p} \frac{\operatorname{ch}(pz + q)}{\operatorname{sh}^2(pz + q)} - \frac{b}{2p} \frac{1}{\operatorname{sh}^2(pz + q)} + h - \cos^2 \varphi \right]^{1/2}}. \quad (16)$$

Заменой  $y = \operatorname{ch}(pz + q)$  выражение (16) преобразуется к виду

$$x - x_0 = \int_{\operatorname{ch}(pz_0 + q)}^{\operatorname{ch}(pz + q)} \frac{\cos \varphi dy}{\left[ p^2 (h - \cos^2 \varphi) y^2 - apy - \frac{bp}{2} + (h - \cos^2 \varphi) p^2 \right]^{1/2}}. \quad (17)$$

Интеграл из правой части (17) имеется в таблицах и здесь не приводится. Вычисление лучевых траекторий при аппроксимации  $n^2(z)$  согласно (14) производится аналогично.

Остановимся на вычислении времени распространения вдоль луча. Имеем [3]

$$t = \frac{1}{c_0} \int_{z_0}^z \frac{n^2(z) dz}{\sqrt{n^2(z) - \cos^2 \varphi}}, \quad (18)$$

где  $c_0$  — скорость звука на оси подводного звукового канала. Подстановка в (18) выражений для  $n^2(z)$  из (11) или (14) позволяет выразить  $t$  в виде интеграла, также вычисляющегося, хотя и весьма громоздко, в элементарных функциях.

Угол выхода, град	Длина полуцикла луча выше оси канала, км			
	новая аппроксимация	точное значение	$\nabla c = \text{const}$	$\nabla n^2 = \text{const}$
3	21,157	21,006	19,776	19,775
4	20,869	20,227	19,151	19,131
5	19,318	19,505	20,498	20,506
6	18,814	18,837	18,183	18,154
7	18,402	18,219	17,600	17,571
8	17,577	17,649	17,783	17,781
9	17,034	17,126	17,125	17,118
10	16,522	16,649	16,075	16,031
11	16,201	16,219	15,777	15,745

Описанная выше процедура аппроксимации была применена в случае, когда  $c(z)$  задана в виде канонического профиля Манка [4]:  $c(z) = c_1 [1 + \varepsilon (\eta + e^{-\eta} - 1)]$  где  $\eta = 2(z - z_1)/B$  при  $z_1 = 1,2$  км,  $B = 1,2$  км,  $\varepsilon = 7,4 \cdot 10^{-3}$ ; расстояние между соседними точками, в которых была измерена глубина, было принято равным 0,3 км. Источник располагался на оси подводного звукового канала, т. е. на глубине 1,2 км. Лучевая траектория вычислялась до первого возвращения луча на ось канала. Расстояние от этой точки до источника для различных углов выхода представлено в таблице, где приведены также результаты вычислений при кусочно-линейной аппроксимации  $n^2(z)$  и  $c(z)$ . Видно, что при всех углах выхода, кроме одного, новая аппроксимация дает более точный результат.

Необходимо также отметить, что, несмотря на наличие в формулах (11) и (14) трансцендентных функций, вычисление лучевых траекторий с использованием этих формул практически не требует дополнительных затрат машинного времени по сравнению с гладкой аппроксимацией  $n^2(z)$ , получаемой с помощью квадратных трехчленов  $az^2 + bz + c$ , поскольку пределы интегрирования в (17) могут быть вычислены раз и навсегда для данного профиля  $n^2(z)$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pedersen M. A., Lordon D. F. Comparison of curvilinear and linear profile approximations in the calculation of underwater sound intensities by ray theory // J. Acoust. Soc. Amer. V. 41. 1966. № 3. P. 419—438.
2. Moler C., Solomon L. P. Use of splines and numerical integration in geometrical acoustics // J. Acoust. Soc. Amer. 1970. V. 48. № 3. P. 738—744.
3. Брежневский Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
4. Munk W. H. Sound channel in an exponentially stratified ocean, with application to SOFAR // J. Acoust. Cos. Amer. 1974. V. 55. № 1. P. 220—232.

Акустический институт  
им. Н. Н. Андреева  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
24.10.88

*A. N. Nekrasov*

#### ON ONE SOUND SPEED APPROXIMATION WITHIN THE MODEL OF STRATIFIED OCEAN

The algorithm of an approximation of a sound speed in a stratified ocean with the help of twice continuous differentiable function of a depth is described. Adduced examples show high precision of ray trajectory calculations.