АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 1

УДК 534.26.51

А. В. Осипов

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ МАЛЮЖИНЦА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Предложены новые способы аппроксимации функции Малюжинца $\psi_\Phi(z)$, которые при значениях параметра Φ, больших $\pi/2$, позволяют достаточно просто, но вместе с тем с высокой точностью и небольшими затратами машинных ресурсов, вычислять ее значения для произвольных комплексных аргументов.

С помощью функции Малюжинца $\psi_\Phi(z)$ записываются решения многих важных задач дифракции акустических волн в угловых областях [1]. Вещественный параметр Φ связан с углом раствора угловой области и всегда принадлежит интервалу $(0, \pi]$. Аргумент z может иметь произвольную мнимую часть и для проведения расчетов волновых полей необходимо уметь вычислять функцию Малюжинца на всей комплексной плоскости аргумента.

В настоящее время известно несколько способов вычисления функции Малюжинца. Методика, изложенная в книге [1], позволяет при произвольных значениях параметра Φ получать значение $\psi_\Phi(z)$ в полосе $|\operatorname{Im} z| < a$ с абсолютной точностью, равной 10^{-5}. Число a определяется из условия совпадения двух первых значащих цифр в численном значении функции с двумя первыми цифрами ее приближенного асимптотического значения [2]

$$\psi_\Phi(z) \approx \sqrt{\cos\left(\frac{\pi z}{4\Phi}\right)} \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{\pi s}{4\Phi}\right)\right)\frac{ds}{\operatorname{ch} s}\right), \tag{1}$$

справедливого при $|\operatorname{Im} z| \gg 1$. Внутри же полосы $|\operatorname{Im} z| < a$ функция аппроксимируется бесконечным рядом с коэффициентами в виде интегралов или двойных сумм. В работе [3] описана полиномиальная аппроксимация функции Малюжинца, основанная на представлении $\psi_\Phi(z)$ экспонентой с полиномиальным показателем

$$\psi_\Phi(z) \approx \exp\left(\sum_{j=1}^{10} b_{2j} z^{2j}\right). \tag{2}$$

Коэффициенты b_{2j} находятся из условия минимизации абсолютной погрешности вычисления функции на отрезке вещественной оси $z \in [0, 2\Phi]$. Максимальная абсолютная ошибка формулы (2) при $\Phi \in [\pi/2, \pi]$ не превышает 10^{-6}. Полиномиальная аппроксимация применима и для комплексных значений аргумента, но по мере удаления от вещественной оси точность быстро снижается, так что при $|\operatorname{Im} z| = 3\pi/2$ погрешность достигает значения 10^{-1}. Простые формулы, позволяющие вычислять $\psi_\Phi(z)$ на всей комплексной плоскости с относительной погрешностью порядка 1% были предложены для частного случая $\Phi = \pi$ в статье [4], а для более общего случая $\pi/2 \leqslant \Phi \leqslant \pi$ — в статье [5].

Таким образом, известные в литературе алгоритмы не обеспечивают высокую точность расчета $\psi_\Phi(z)$ при произвольных значениях $\operatorname{Im} z$. Между тем при расчетах волновых полей, например с помощью равномерных асимптотических формул [6], в ряде случаев требуется повышенная точность, так как вблизи линий, связанных с границами тени для падающей и отраженных волн, вычисления сопровождаются потерей точности. Кроме того, нахождение входящих в последующие члены асимптотического представления производных функций Малюжинца по конечноразностным формулам также требует как можно большего количества значащих цифр для значений $\psi_\Phi(z)$.

В настоящей статье предложены новые способы аппроксимации функции Малюжинца, которые при $\Phi \geqslant \pi/2$ дают возможность достаточно просто, но вместе с тем с высокой точностью и небольшими затратами машинных ресурсов вычислять ее значения для произвольных комплексных аргументов. Алгоритм типа А обеспечивает относительную погрешность расчета $\psi_\Phi(z)$ менее 10^{-4}, а алгоритм типа Б — менее $3 \cdot 10^{-9}$ на всей комплексной плоскости аргумента.

Исходным для последующего рассмотрения является интегральное представление функции Малюжинца [1]

$$\psi_\Phi(z) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(z\xi) - 1}{\xi \operatorname{ch}(\pi\xi/2)\operatorname{sh}(2\Phi\xi)}\, d\xi\right], \qquad (3)$$

которое сходится в полосе $|\operatorname{Re} z| < \pi/2 + 2\Phi$. Вне этой полосы значения $\psi_\Phi(z)$ можно определить с помощью функционального соотношения

$$\psi_\Phi(z)\,\psi_\Phi(z - \pi) = \psi_\Phi^2(\pi/2)\cos\left[\frac{\pi}{4\Phi}(z - \pi/2)\right]. \qquad (4)$$

Из (4) с учетом очевидных из интегрального представления (3) свойств $\psi_\Phi(-z) = \psi_\Phi(z)$, $\psi_\Phi(z^*) = \psi_\Phi^*(z)$ (звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения) следует, что вычисление функции Малюжинца для произвольного комплексного аргумента сводится к определению ее значения в полуполосе: $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \pi/2$, $\operatorname{Im} z > 0$. В дальнейшем предполагается, что аргумент функции $\psi_\Phi(z)$ принадлежит этой полуполосе.

Воспользуемся представлением (3) и преобразуем его к виду, удобному для численного интегрирования. Учитывая соотношение $\operatorname{ch} z - 1 = 2\operatorname{sh}^2(z/2)$ и выделяя в знаменателе подынтегрального выражения множители, описывающие поведение гиперболических функций при $\xi \to +\infty$, получаем для функции Малюжинца следующее выражение:

$$\psi_\Phi(z) = \exp\left[\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} F(x, z, \Phi)\, dx\right],$$
$$F(x, z, \Phi) = \frac{-4\operatorname{sh}^2(zx/2p)}{x(1 - \exp(-4\Phi x/p))(1 + \exp(-\pi x/p))}, \qquad (5)$$
$$p = \pi/2 + 2\Phi.$$

Интеграл в (5) может быть приближенно вычислен с помощью квадратурных формул типа Чебышева—Лагерра [7], что приводит к искомой аппроксимации функции Малюжинца

$$\psi_\Phi(z) \approx \exp\left(\sum_{k=1}^{n} w_k F(x_k, z, \Phi)\right), \qquad (6)$$

где x_k — нули полиномов Лагерра $L_n^{(0)}$, w_k — весовые коэффициенты.

Как показали численные расчеты, квадратурная формула с $n = 24$ обеспечивает высокую точность вычисления $\psi_\Phi(z)$ вблизи вещественной оси на плоскости z. При $\operatorname{Im} z = 0$ относительная погрешность

$$\Delta = \max_{\pi/2 \leqslant \Phi \leqslant \pi}\ \max_{0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \pi/2}\left|\frac{\tilde{\psi}_\Phi(z) - \psi_\Phi(z)}{\psi_\Phi(z)}\right|$$

приближенного значения функции $\tilde{\psi}_\Phi(z)$ по сравнению с точным значением $\psi_\Phi(z)$ не превышает 10^{-12}. Величина погрешности Δ оценивалась на множество значений параметров, рационально кратных π: $\Phi = \pi l/4m$, l и m — натуральные числа, причем l — нечетно (в этом случае функция Малюжинца записывается в замкнутом виде [1]). При увеличении мнимой

Коэффициенты полиномиальной формулы (7)

n	Φ/π = 0,5	0,6	0,7
1	4,5422 5282 3217 E–2	3,3782 9685 8492 E–2	2,6064 0282 5562 E–2
2	9,3896 5437 5473 E–4	5,5382 8815 4677 E–4	3,4616 4025 5573 E–4
3	2,9342 2533 2413 E–5	1,3641 8012 4182 E–5	6,8927 3748 1237 E–6
4	1,0128 7943 8424 E–6	3,6932 1535 2964 E–7	1,5039 0004 8843 E–7
5	3,6826 0461 4383 E–8	1,0495 3690 7791 E–8	3,4353 1983 8416 E–9
6	1,3868 8592 7622 E–9	3,0833 3863 7454 E–10	8,0977 1757 5934 E–11
7	5,3603 3089 2777 E–11	9,2866 6237 2395 E–12	1,9548 0871 3213 E–12
8	2,1131–5064 0586 E–12	2,8514 5292 2510 E–13	4,8079 2439 0052 E–14
9	8,4600 5517 0800 E–14	8,8894 4145 4915 E–15	1,2002 7462 2094 E–15
10	3,4289 5276 5138 E–15	2,8053 2034 5472 E–16	3,0327 5976 0498 E–17
n	Φ/π = 0,8	0,9	1,0
1	2,0688 6206 0074 E–2	1,6800 2860 6282 E–2	1,3900 3858 8422 E–2
2	2,2662 9111 2903 E–4	1,5411 6657 8450 E–4	1,0818 7572 3003 E–4
3	3,7224 9870 6818 E–6	2,1231 7439 5122 E–6	1,2675 0080 1470 E–6
4	6,6889 2330 4976 E–8	3,1977 0984 9650 E–8	1,6235 1326 5733 E–8
5	1,2558 6268 4854 E–9	5,0250 3392 7203 E–10	2,1676 6382 8821 E–10
6	2,4293 0996 7485 E–11	8,1245 7256 8628 E–12	2,9743 8088 9183 E–12
7	4,8073 3755 0354 E–13	1,3424 5269 0505 E–13	4,1670 4480 1246 E–14
8	9,6862 9169 9242 E–15	2,2570 2768 2678 E–15	5,9361 8421 6665 E–16
9	1,9802 6058 4997 E–16	3,8486 5863 0189 E–17	8,5729 6840 3599 E–18
10	4,0967 2497 4101 E–18	6,6394 0684 9556 E–19	1,2522 3445 2669 E–19

части z функция $F(x, z, \Phi)$ начинает осциллировать, что приводит к потере точности; так, при $\operatorname{Im} z = 20$ относительная погрешность достигает уровня 10^{-3}. Время счета одного значения функции по формуле (6) для $n = 24$ составляет 0,04 с (здесь и далее время счета указано для ЭВМ с быстродействием порядка 10^6 операций в секунду).

Другой способ аппроксимации функции Малюжинца связан с заменой функции $\operatorname{ch}(z\xi) - 1$ в формуле (3) отрезком ряда Тейлора, при этом получаем представления, имеющие вид полиномиальной формулы (2):

$$\psi_\Phi(z) \approx \exp\left[-\sum_{j=1}^{N} \frac{2c\,(\Phi)}{(2j)!}\left(\frac{z}{p}\right)^{2j}\right],$$
$$c_j(\Phi) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2j-1}e^{-x}}{(1-\exp(-4\Phi x/p))\,(1+\exp(-\pi x/p))}\,dx. \qquad (7)$$

В табл. 1 для параметра Φ, изменяющегося от $\pi/2$ с шагом $\pi/10$, представлены первые десять коэффициентов $2c_j(\Phi)/((2j)!\,p^{2j})$ в разложении показателя экспоненты. Вычисление коэффициентов $c_j(\Phi)$ выполнено по квадратурной формуле Чебышева—Лагерра с числом узлов, равным 24. Заметим, что коэффициенты при степенях z в формуле (7) отличаются от коэффициентов b_{2j} формулы (2), так как в [3] они были определены с помощью другого правила. Главное преимущество аппроксимации (7) состоит в том, что коэффициенты разложения не зависят от z и при расчетах функции Малюжинца в комплексной плоскости аргумента их достаточно вычислить один раз.

Расчеты $\psi_\Phi(z)$ по формуле (7) показали, что при $N = 10$ на отрезке $z \in [0, \pi/2]$ достигается точность $\Delta = 10^{-12}$, такая же, как и у методики, связанной с прямым численным интегрированием. Однако при увеличении мнимой части аргумента происходит более быстрое падение точности и для $\operatorname{Im} z = 6{,}0$ $\Delta \approx 4{,}0\cdot 10^{-2}$. Время счета по полиномиальной форму-

Таблица 2

Значения функции $I_0(\Phi)$

Φ/π	$I_0(\Phi)$	Φ/π	$I_0(\Phi)$
0,5	5,5012 6862 5785 E–2	0,8	5,5818 8625 4716 E–2
0,6	5,7458 1321 4723 E–2	0,9	5,3845 9952 2500 E–2
0,7	5,7248 9433 5582 E–2	1,0	5,1667 2487 9577 E–2

ле (7) в силу обстоятельства, указанного выше, в среднем снижается в 5 раз по сравнению с аналогичным показателем для квадратурной формулы (6).

Для построения алгоритма расчета функции Малюжинца на всей комплексной плоскости аргумента аппроксимации (6), (7) необходимо дополнить приближением, применимым в области больших значений $\operatorname{Im} z$. Одночленная асимптотика (1) не позволяет достичь требуемой точности сшивания с результатами расчетов по формулам (6) и (7) при промежуточных значениях мнимой части z. Покажем, как могут быть получены все члены разложения $\psi_\Phi(z)$ при $\operatorname{Im} z > 0$.

Рассмотрим интегральное представление (3) и сомножитель в подынтегральном выражении запишем в следующем виде:

$$\frac{1}{\operatorname{ch}(\pi\xi/2)\operatorname{sh}(2\Phi\xi)} = \frac{p}{2\Phi\operatorname{sh}(p\xi)} + C_\Phi(\xi), \tag{8}$$

где

$$G_\Phi(\xi) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi\xi/2)\operatorname{sh}(2\Phi\xi)} - \frac{p}{2\Phi\operatorname{sh}(p\xi)}.$$

Смысл преобразования заключается в том, что таким образом выделяется главная часть знаменателя в подынтегральном выражении при $\xi \to 0$. В результате открывается возможность аналитических преобразований интеграла. После подстановки (8) в (3) получаем

$$\begin{gathered}\psi_\Phi(z) = \exp(I + I_0 + I_1), \quad I = -\frac{p}{4\Phi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}(z\xi) - 1}{\xi\operatorname{sh}(p\xi)}\,d\xi, \\ I_0 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} G_\Phi(\xi)\frac{d\xi}{\xi}, \quad I_1 = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\operatorname{ch}(z\xi)\,G_\Phi(\xi)\frac{d\xi}{\xi}.\end{gathered} \tag{9}$$

Заметим, что все интегралы в (9) существуют в обычном смысле. Интеграл I является табличным и вычисляется в замкнутом виде [8]

$$I = \frac{p}{4\Phi}\ln\left[\cos\left(\frac{\pi z}{2p}\right)\right]. \tag{10}$$

Интеграл I_0 запишем в форме, удобной для применения квадратурных формул Чебышева—Лагерра:

$$I_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}F_0(x,\Phi)\,dx,$$

$$F_0(x,\Phi) = \frac{1}{2x}\left[\frac{4}{(1-\exp(-4\Phi x/p))(1+\exp(-\pi x/p))} - \frac{p}{\Phi}\frac{1}{1-\exp(-2x)}\right].$$

Значения I_0 с тринадцатью десятичными знаками для $\Phi \in [\pi/2, \pi]$ и шагом $\pi/10$, полученные с помощью квадратурной формулы для числа узлов $n = 24$, представлены в табл. 2.

Интеграл I_1 после замены гиперболического косинуса полусуммой экспонент сводится к интегралу по вещественной оси и вычисляется по вычетам в полюсах подынтегрального выражения на комплексной плос-

Относительная погрешность алгоритмов

Im z	0	2	4	6	8	10	15
Алгоритм А	4,7E−13	2,0E−10	1,6E−5	1,0E−6	1,9E−8	3,5E−10	8,8E−12
Алгоритм Б	4,7E−13	1,4E−12	6,3E−12	2,5E−11	9,4E−11	3,5E−10	8,8E−12

кости ξ. Объединяя результат с выражением (10), получаем искомое представление функции Малюжинца

$$\psi_\Phi(z) = \exp\left[I_0(\Phi) - \frac{p}{4\Phi}\ln 2 - i\,\frac{\pi z}{8\Phi} + \tilde{I}(z, \Phi)\right], \tag{11}$$

где

$$\tilde{I}(z, \Phi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k}\left(\frac{e^{i\pi kz/(2\Phi)}}{\cos(\pi^2 k/(4\Phi))} + \frac{e^{iz(2k-1)}}{(1-1/(2k))\sin(4\Phi(k-1/2))}\right).$$

Представление (11) является точным и обобщает известную формулу (1). Ряд для функции $\tilde{I}(z, \Phi)$ при $\operatorname{Im} z > 0$ сходится абсолютно и его сходимость тем быстрее, чем больше мнимая часть z. При значениях параметра Φ, равных $\pi l/2\,(2m-1)$, где l, m — натуральные числа, в сумме возникают неограниченные слагаемые. Однако можно показать, что они в точности компенсируют друг друга и функция $\tilde{I}(z, \Phi)$ остается ограниченной.

В практических расчетах использовалась трехчленная аппроксимация функции

$$\tilde{I}(z, \Phi) \approx \frac{e^{i\pi z/(2\Phi)}}{2\cos(\pi^2/(4\Phi))} - \frac{e^{i\pi z/\Phi}}{4\cos(\pi^2/(2\Phi))} + \frac{e^{iz}}{\sin(2\Phi)}. \tag{12}$$

Точность вычислений $\psi_\Phi(z)$ по формулам (11), (12) возрастает при увеличении $\operatorname{Im} z$; при $\operatorname{Im} z \geqslant 15$ относительная погрешность Δ не превышает 10^{-11}. При приближении к вещественной оси точность падает и для $\operatorname{Im} z = 0$ $\Delta = 10^{-1}$. Как и для полиномиальной аппроксимации (7), расчет функции Малюжинца на комплексной плоскости аргумента при фиксированном значении параметра Φ требует лишь однократного применения квадратурных формул для вычисления $I_0(\Phi)$, что заметно снижает затраты машинного времени. Время счета одного значения функции $\psi_\Phi(z)$ с помощью аппроксимации (11), (12) составляет 0,005 с.

Приведенные выше формулы (6), (7), (11) дают возможность с высокой точностью вычислять функцию Малюжинца как вблизи вещественной оси на комплексной плоскости аргумента, так и вдали от нее. Комбинируя эти представления, получаем алгоритмы расчета $\psi_\Phi(z)$ для произвольных значений $\operatorname{Im} z$.

Объединение выражений (11), (12) с полиномиальной аппроксимацией (7) ($N = 10$) приводит к алгоритму (назовем его алгоритмом типа А), который не требует численного интегрирования для каждого значения z и поэтому характеризуется относительно малым временем счета. Положение линии $\operatorname{Im} z = a$, на которой происходит смена представлений функции $\psi_\Phi(z)$, определяется из условия их наилучшего сшивания. Величина числа a зависит от Φ и, как оказалось, описывается простым соотношением: $a = 5{,}4 - 4{,}8\cdot(1 - \Phi/\pi)$. При этом $\max\limits_{0 \leqslant \operatorname{Im} z < \infty} \Delta$ — максимальная относительная погрешность — не превосходит 10^{-4}.

Большей точности позволяет достичь алгоритм типа Б, в котором вычисление $\psi_\Phi(z)$ при $\operatorname{Im} z \leqslant b$ проводится по квадратурной формуле (6) ($n = 24$), а в области $\operatorname{Im} z > b$ применяются формулы (11) и (12). Положение линии наилучшего сшивания приближенно может быть найдено с помощью формулы $b = 12{,}4 - 11{,}2\cdot(1 - \Phi/\pi)$. Относительная погрешность алгоритма Б не превосходит $3\cdot 10^{-9}$.

Указанные для обоих алгоритмов погрешности реализуются лишь в окрестности линий сшивания. Вблизи вещественной оси или при достаточно больших значениях $\operatorname{Im} z$ точность вычисления $\psi_\Phi(z)$ существенно выше, что для случая $\Phi = 3\pi/4$ иллюстрируется табл. 3, в которой показана зависимость относительной погрешности $\Delta_{\text{отн}} = \max\limits_{0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \pi/2} |(\tilde{\psi}_\Phi - \psi_\Phi)/\psi_\Phi|$ от величины мнимой части аргумента z.

Предложенные алгоритмы дают возможность при $\Phi \in [\pi/2, \pi]$ с высокой точностью проводить вычисление функции Малюжинца произвольного комплексного аргумента. Аппроксимирующие формулы содержат только элементарные функции или интегралы от элементарных функций, которые имеют вид, удобный для применения реализованных во многих широко доступных библиотеках стандартных подпрограмм квадратурных формул типа Чебышева—Лагерра. Для значений параметра Φ, меньших $\pi/2$, качество аппроксимации снижается и при $\Phi = \pi/4$ максимальная относительная погрешность алгоритмов А и Б достигает значений 10^{-3} и $5 \cdot 10^{-7}$ соответственно. Построение удобных высокоточных аппроксимирующих формул в этих случаях требует дальнейших усилий.

Автор благодарен Е. Л. Шендерову за привлечение внимания к интересной области исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Завадский В. Ю.* Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах М.: Наука, 1972.
2. *Malyughinetz G. D.* Das Sommerfeldsche Integral und die Lösung von Beugungsaufgaben in Winkelgebieten // Ann. d. Physik. 1960. B. 6. S. 107—112.
3. *Hongo K., Nakajiama E.* // Polynomial approximation of Maliuzhinets function // IEEE Trans AP. 1986. V. 34. № 7. P. 942—947.
4. *Volakis J. L., Senior T. B. A.* Simple expressions for a function occuring in diffraction theory // IEEE Trans. AP. 1985. V. 33. № 6. P. 678—680.
5. *Herman M. I., Volakis J. L., Senior T. B. A.* Analytic expressions for a function occuring in diffraction theory // IEEE Trans. AP 1987. V. 35. № 9. P. 1083—1086.
6. *Филиппов А. К.* Исследование решения нестационарной задачи дифракции плоской волны на импедансном клине // ЖВММФ. 1967. Т. 7. № 4. С. 825—835.
7. *В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина.* Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, 1966.
8. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию
11.01.89

A. V. Osipov

CALCULATION OF A MALIUZHINETS FUNCTION IN A COMPLEX REGION

The new method of a Maliuzhinets function approximation, which enables rather simple calculation of its values for any complex arguments with a high precision and a few computer time expenditure, are proposed.