

УДК 534

© 1990 г.

*Н. Д. Векслер, В. М. Корсунский, С. А. Рыбак*

**РАСSEЯНИЕ ПЛОСКОЙ НАКЛОННО ПАДАЮЩЕЙ ВОЛНЫ  
КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ**

Приводятся результаты расчета и выполняется анализ частотной зависимости, а также резонансных компонентов парциальных мод в задаче рассеяния плоской звуковой волны круговой цилиндрической оболочкой. Направление распространения падающей волны составляет угол  $\alpha$  с нормалью к продольной оси оболочки. По сравнению с задачей о рассеянии оболочкой нормально падающей волны, когда  $\alpha = 0$ , здесь выявлены два эффекта: падающая волна возбуждает в оболочке крутильную волну; с ростом  $\alpha$  резонансы каждой из возбужденных в оболочке волн смещаются по частоте вправо. Дана формула для нахождения фазовой скорости периферической волны по положению ее резонансов. Расчеты проведены для тонкой ( $h = 1/512$ ) пустой алюминиевой оболочки, погруженной в воду, в узком диапазоне частот ( $0 \leq x = ka \leq 50$ ) при  $\alpha = 5$  и  $10^\circ$ . Оказалось, что для рассматриваемого примера фазовая скорость периферической волны  $S_0$  почти не зависит от  $\alpha$  и равна  $c_{pl}$  — «пластинчатой» скорости волны  $S_0$  для плоского «сухого» слоя; фазовая скорость крутильной волны (волны  $T$ ) постоянна и равна  $c_t$  — скорости поперечной волны в линейной теории упругости.

Круговая цилиндрическая оболочка бесконечной протяженности расположена в безграничной идеальной сжимаемой жидкости. На нее падает и ею рассеивается плоская акустическая волна, направление распространения которой составляет угол  $\alpha$  с нормалью к продольной оси оболочки. Давление в падающей волне  $p_i$  запишем в виде  $p_i = p_0 \exp(-i\delta\xi)$ , где  $p_0 = p_* \exp[i(\gamma\eta - \omega t)]$ ,  $\delta = k \cos \alpha$ ,  $\gamma = k \sin \alpha$ . Здесь  $\eta$  — координата вдоль продольной оси оболочки,  $\xi$  — координата вдоль нормали к продольной оси оболочки,  $k$  — волновое число в жидкости,  $\omega$  — частота,  $t$  — время,  $p_*$  — постоянная, имеющая размерность давления.

В цилиндрической системе координат  $(r, \theta, \eta)$  давление  $p_i$  можно представить в виде

$$p_i = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-i)^n J_n(\delta r) \cos n\theta \quad (\epsilon_0 = 1, \epsilon_n = 2 \text{ при } n \geq 1).$$

Рассеянное оболочкой давление  $p_s$  имеет вид

$$p_s = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-i)^n R_n H_n^{(1)}(\delta r) \cos n\theta,$$

где  $R_n$  — коэффициент, отыскиваемый из условий контакта. На наружной поверхности оболочки при  $r = a$  выполняются четыре условия контакта:  $\partial v_r / \partial t = \partial^2 u_r / \partial t^2$ ,  $\sigma_{rr} = -(p_i + p_s)$ ,  $\sigma_{r\theta} = 0$ ,  $\sigma_{r\eta} = 0$ , а на ее внутренней поверхности при  $r = b$  — три условия контакта:  $\sigma_{rr} = 0$ ,  $\sigma_{r\theta} = 0$ ,  $\sigma_{r\eta} = 0$  (оболочка считается пустой). Выше использованы такие обозначения:  $\partial v_r / \partial t$  — радиальное ускорение в жидкости,  $\partial^2 u_r / \partial t^2$  — радиальное ускорение упругой среды. Знак минус во втором условии контакта связан с принятым правилом знаков, согласно которому положительное напряжение считается растягивающим.

Для каждого значения индекса суммирования  $n$  коэффициент  $R_n$  находится из системы семи алгебраических уравнений и записывается в виде  $R_n = A_n / B_n$ , где  $A_n$  и  $B_n$  — определители седьмого порядка.

В дальнем поле (при  $\delta r \gg 1$ ) вместо  $H_n^{(1)}(\delta r)$  можно использовать его асимптотическое представление  $H_n^{(1)}(\delta r) \sim (2/i\pi\delta r)^{1/2} (-i)^n \exp(i\delta r)$ .

Тогда  $p_s$  получит вид

$$p_s \cong p_* \left(\frac{a}{2r}\right)^{1/2} \exp[i(\delta r + \gamma\eta - \omega t)] \sum_{n=0}^{\infty} 2(i\pi\delta a)^{-1/2} \varepsilon_n R_n \cos n\theta.$$

Если ввести парциальную функцию рассеяния  $S_n = 2R_n + 1$  и парциальную функцию формы  $f_n(\theta) = (i\pi\delta a)^{-1/2} \varepsilon_n (S_n - 1) \cos n\theta$ , то рассеянное оболочкой давление примет вид  $p_s \cong p_* (a/2r)^{1/2} \exp[i(\delta r + \gamma\eta - \omega t)] f(\theta)$ , где

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\theta).$$

Величина  $f(\theta)$  называется функцией формы.

В предельном случае, когда  $\rho/\rho_1 \rightarrow \infty$  (здесь  $\rho$  — плотность жидкости, а  $\rho_1$  — плотность материала оболочки) можно получить парциальную функцию рассеяния, соответствующую акустически мягкому цилиндру  $R_n^{(s)} = -J_n(\delta a)/H_n^{(1)}(\delta a)$ .

В дальнем поле разность между акустическим давлением, рассеянным упругой оболочкой  $p_s$ , и давлением, рассеянным акустически мягким цилиндром  $p_s^{(s)}$ , может быть записана в виде

$$p_s - p_s^{(s)} = p_* (a/2r)^{1/2} \exp[i(\delta r + \gamma\eta - \omega t)] \psi^{(s)}(\theta),$$

где

$$\psi^{(s)}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^{(s)}(\theta),$$

$$\psi_n^{(s)}(\theta) = 2(i\pi\delta a)^{-1/2} \varepsilon_n \left( R_n + \frac{J_n(\delta a)}{H_n^{(1)}(\delta a)} \right) \cos n\theta.$$

В фиксированной точке наблюдения для удобства записи введем следующие обозначения:  $p = |f|$ ,  $\zeta_n = |\psi_n^{(s)}|$ ,  $x = ka$ . Величину  $p(x)$  будем называть частотной зависимостью, а  $\zeta_n(x)$  — резонансным компонентом парциальной моды.

Расчет  $p(x)$  проводился при рассеянии назад ( $\alpha = 0^\circ$ ) для тонкостенной оболочки с относительной толщиной  $h = 1 - b/a = 1/512$  в диапазоне  $0 \leq x \leq 50$ . Шаг счета по  $x$   $l_x$  был выбран  $l_x = 10/256$ . Счет выполнялся для алюминиевой оболочки в воде алюминий;  $\rho_1 = 2,79 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_l = 6380$  м/с,  $c_t = 3100$  м/с, вода:  $\rho = 1 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 1470$  м/с.

Выше  $a$ ,  $b$  — наружный и внутренний радиусы оболочки;  $c_l c_t$  — скорости распространения продольной и поперечной волн в материале оболочки.

На рис. 1 и 2 показаны графики частотных зависимостей для углов падения  $\alpha = 0$  и  $10^\circ$ . На них отмечены положения резонансных частот парциальных мод. Как известно, эти частоты совпадают с резонансными частотами периферических волн, возбужденных в оболочке падающей волной. При нормальном падении, когда  $\alpha = 0$ , возбуждается только нулевая симметричная волна Лэмба ( $S_0$ ). Ее резонансы помечены  $(n, 0)$ . Первое число ( $n$ ) задает порядковый номер резонанса, а второе ( $l$ ) определяет семейство. Резонанс имеет место, когда на пути волны укладывается целое число ее длин. При  $\alpha \neq 0$  в дополнение к волне  $S_0$  в оболочке возбуждается крутильная волна ( $T$ ). Ее резонансы помечены  $\langle n, t \rangle$ . Для каждой из волн фазовая скорость  $c^{ph}$  определяется по формуле

$$\left(\frac{\omega}{c^{ph}}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{c} \sin \alpha\right)^2 + \left(\frac{n}{a}\right)^2,$$

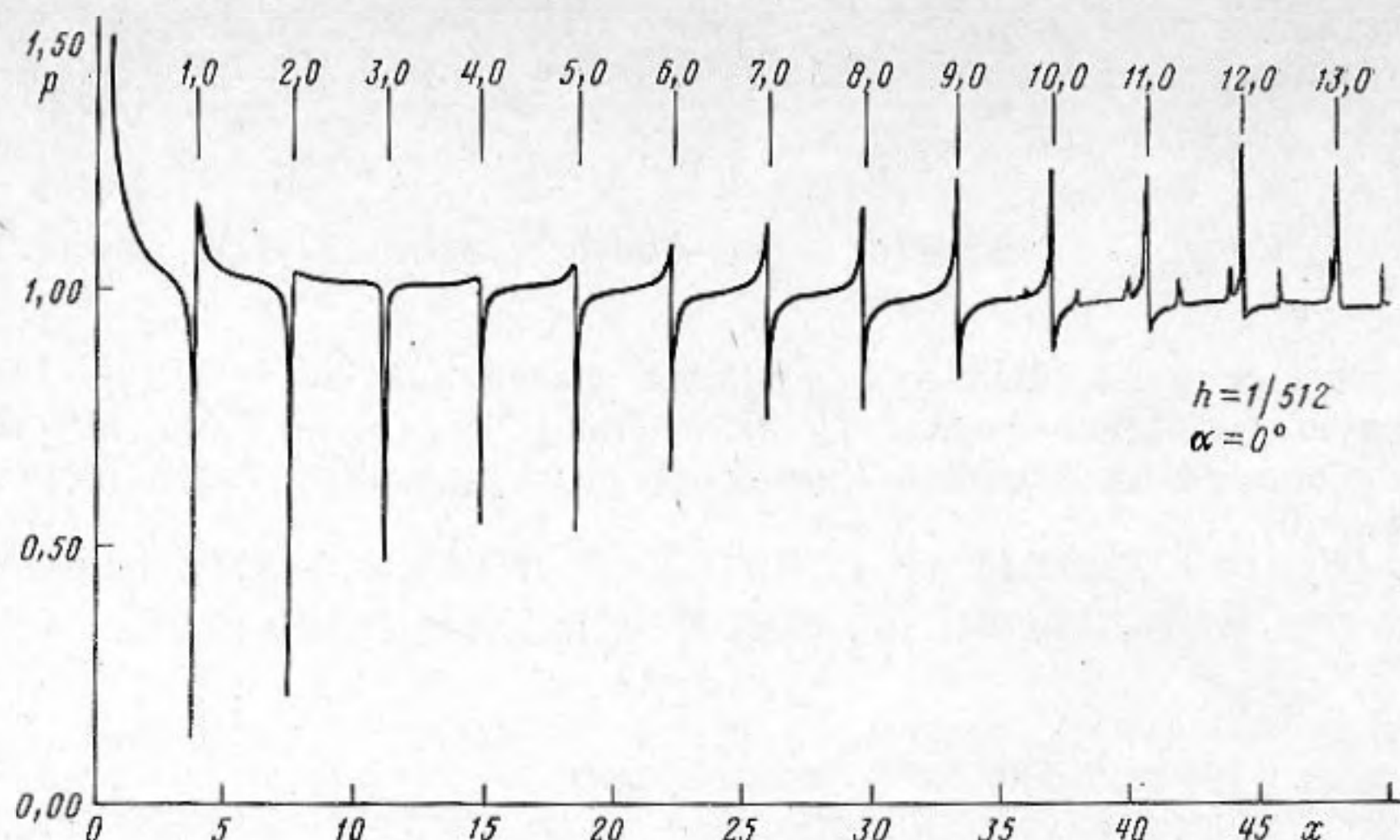


Рис 1.



Рис 2.

которую можно записать в форме

$$c^{ph} = c \frac{x/n}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{n} \sin \alpha\right)^2}},$$

где  $x$  — положение  $n$ -го резонанса. В таблицу сведены координата (верхняя строка) и амплитуда (нижняя строка)  $n$ -го резонансного компонента парциальной моды волн  $S_0$  и  $T$  в зависимости от угла падения  $\alpha$ .

В рассматриваемом диапазоне частот  $0 \leq x \leq 50$  счет по приведенным в таблице данным показал, что для волны  $S_0$   $c^{ph} = 5420$  м/с, а для волны  $T$   $c^{ph} = 3100$  м/с и почти не зависит от угла падения  $\alpha$ . Кроме того, в рассматриваемом диапазоне частот фазовые скорости обеих волн  $S_0$  и  $T$  почти не зависят от частоты, т. е. эти волны бездисперсионны.

Как известно, на плоскости  $c^{ph}/c_t - k_t d$  (здесь  $k_t = \omega/c_t$ ,  $d = 1/2 (a \rightarrow b)$ ) для тонких оболочек (при  $h \lesssim 1/30$ ) и  $k_t d \lesssim 0,5$  дисперсионные кривые фазовой скорости волны  $S_0$  расположены над «полочкой» дисперсионной волны  $S_0$  для предельного случая — плоского «сухого» слоя. Ордината этой кривой при  $k_t d \rightarrow 0$  определяется известной формулой

$$\frac{c_{pl}}{c_t} = \frac{\sqrt{1 - 2\nu}}{1 - \nu} \frac{c_l}{c_t}, \quad \nu = \frac{c_l^2 - 2c_t^2}{2(c_l^2 - c_t^2)},$$

n	S <sub>0</sub>			T	
	α, °C				
	0	5	10	5	10
1	3,71	3,91	4,81	2,15	2,27
	1,09	1,14	1,03	1,46	1,22
2	7,38	7,81	9,61	4,30	4,53
	0,826	0,757	0,727	0,709	0,728
3	11,09	11,68	14,41	6,45	6,80
	0,611	0,591	0,592	0,403	0,491
4	14,77	15,59	19,22	8,59	9,06
	0,585	0,552	0,510	0,255	0,360
5	18,48	19,49	24,02	10,74	11,33
	0,470	0,511	0,454	0,172	0,282
6	22,15	23,40	28,83	12,89	13,59
	0,477	0,459	0,411	0,120	0,232
7	25,86	27,30	33,63	15,04	15,86
	0,396	0,393	0,377	0,084	0,198
8	29,53	31,17	38,44	17,15	18,13
	0,413	0,363	0,350	0,070	0,174
9	33,24	35,08	43,24	19,30	20,43
	0,347	0,368	0,327	0,072	0,164
10	36,91	38,98	48,05	21,45	22,70
	0,368	0,362	0,307	0,074	0,198
11	40,63	42,89		23,59	24,96
	0,311	0,336		0,076	0,251
12	44,30	46,80		25,74	27,23
	0,336	0,285		0,078	0,326
13	48,01			27,89	29,49
	0,282			0,080	0,398
14				30,04	31,76
				0,081	0,398
15				32,19	34,02
				0,083	0,335
16				34,34	36,29
				0,085	0,273
17				36,48	38,55
				0,087	0,229
18				38,63	40,82
				0,089	0,199
19				40,78	43,09
				0,091	0,178
20				42,93	45,35
				0,093	0,162

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона. В рассматриваемом примере  $\nu = 0,3455$ ,  $c_{pl}/c_t = 1,7484$ ,  $c_{pl} = 5420$  м/с. Величина найденной выше  $c^{ph}$  совпадает с  $c_{pl}$ .

Крутильная волна, возбуждаемая в цилиндрической оболочке, бездисперсионна, а ее фазовая скорость равна  $c_t$ . Это показывают и результаты счета. Характер изменения по частоте (или по номеру  $n$ ) амплитуды и коэффициента затухания крутильной волны виден из кривых резонансных компонентов парциальных мод, показанных на рис. 3 для угла  $\alpha = 10^\circ$ . О добротности резонанса можно судить по его ширине на уровне половинной амплитуды. Как видно из таблицы и приведенных графиков, с ростом  $n$  положение каждого из резонансов волн  $S_0$  и  $T$  смещается по частоте вправо.

При более толстой оболочке, скажем с  $h = 1/32$ , в рассматриваемом диапазоне частот помимо волн  $S_0$  и  $T$  в ней была бы возбуждена волна  $A_0$  — нулевая антисимметричная волна Лэмба. При малых  $x$  фазовая скорость этой волны сильно зависит от частоты. Если бы был рассмотрен более широкий диапазон частот, то можно было бы наблюдать резонансы волны  $A_1$ , фазовая скорость которой в окрестности критической частоты (частоты запирания) сильно зависит от частоты. Здесь мы ограничились случаем тонкой оболочки и сравнили только низкой частоты, чтобы наглядно продемонстрировать влияние угла падения  $\alpha$ .

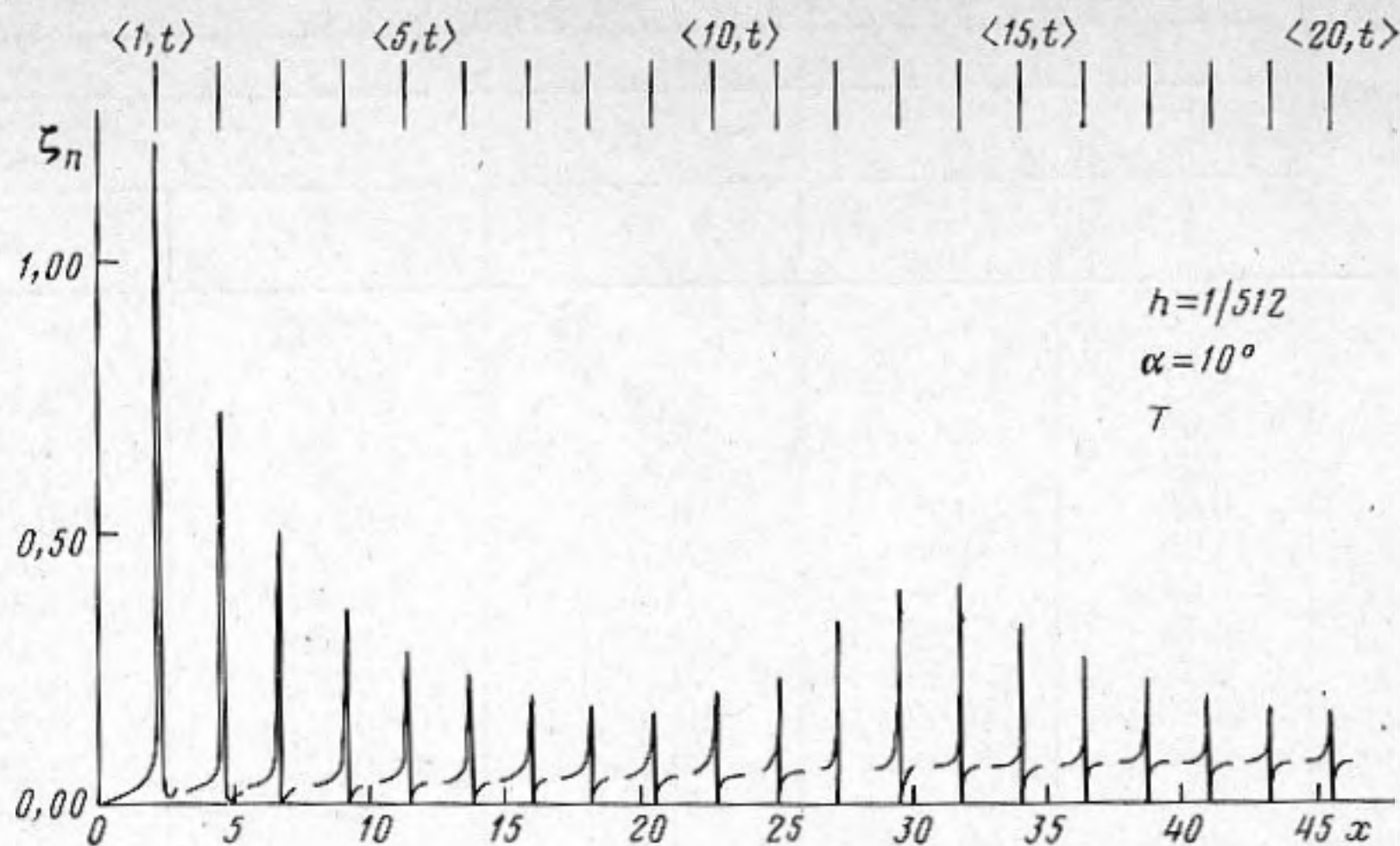


Рис. 3

Отметим, что возбуждение волны  $T$  при  $\alpha \neq 0$  хотя существенно «портит» прозрачный вид частотной зависимости, рассчитанной при  $\alpha = 0$ , но одновременно однозначно связывает положение резонансов волны  $T$  с углом  $\alpha$  и  $c_t$ . Это обстоятельство можно использовать для суждения о  $c_t$  по регистрируемой кривой частотной зависимости.

Институт кибернетики  
Академии наук ЭССР  
Акустический институт  
им. Н. Н. Андреева  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
07.02.89

*N. D. Veksler, V. M. Korsunskii, S. A. Rybak*

#### SCATTERING OF AN OBLIQUELY INCIDENT PLANE ACOUSTIC WAVE BY CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL

The steady-state problem of an obliquely incident plane acoustic wave scattering by circular cylindrical shell is investigated. The direction of the initial wave propagation forms an angle  $\alpha$  with the normal to the longitudinal axis of the shell. The computational results concerning both the form function and modal resonances are presented and analysed. In contrast with the limit problem of plane acoustic wave scattering at normal angle of incidence, when  $\alpha = 0$ , here two effects are observed. First, the initial wave generates the torsional one in the shell. Second, with  $\alpha$  increasing the resonances of every wave generated in the shell are shifted to the right on the frequency scale. The formula for phase velocity of a peripheral wave is given. The computation has been carried out in the case of thin ( $h = 1/512$ ) aluminum shell immersed in water for the narrow frequency range ( $0 \leq x \leq ka \leq 50$ ) at  $\alpha = 5$  and  $10^\circ$ . It turns out that in the considered example the phase velocity of the peripheral wave  $S_0$  does not almost depend on  $\alpha$  and is equal to  $c_{pl}$  — the plate velocity of the  $S_0$  wave in the case of plane «dry» layer. The phase velocity of the torsional wave (T) is constant and equal to  $c_t$  — the transverse velocity in linear elasticity theory.