

УДК 539.3

© 1990 г.

А. В. Сергеев

## ОЦЕНКА ЗНАЧЕНИЙ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ ВОЛН РЭЛЕЕВСКОГО ТИПА В УПРУГИХ ТЕЛАХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ С ПОМОЩЬЮ ОПОРНЫХ ЧАСТОТ

Рассмотрена возможность нахождения резонансных частот волн рэлеевского типа для сплошных упругих цилиндров и толстостенных цилиндрических оболочек с помощью опорных частот.

В [1] была предложена методика, позволяющая определить резонансные частоты упругих тонкостенных сферических и бесконечных цилиндрических оболочек в жидкости с помощью опорных частот. В данной статье будет рассмотрена возможность использования такого подхода для нахождения резонансных частот волн рэлеевского типа в упругих телах цилиндрической формы.

Рассмотрим упругое тело, представляющее собой бесконечно протяженный круговой цилиндр, имеющий радиус внешней поверхности  $R$ . Оно может быть сплошным или же представлять собой толстостенную цилиндрическую оболочку с толщиной стенок  $h$  и заполненную воздухом. Тип рассматриваемого цилиндрического тела будем характеризовать индексом  $i = h/R$ , который принимает значение  $i = 1$  в случае сплошного цилиндра и  $i = 0,8$  в случае толстостенной оболочки. Тела находятся в акустической среде с плотностью  $\rho_1$  и скоростью звука  $c_1$  и изготовлены из материалов, описываемых плотностью  $\rho$ , скоростями продольных и поперечных волн  $c_L$ ,  $c_T$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Объединяя эти параметры, будем описывать далее материал упругих тел с помощью вектора  $\mathbf{P} = \{\rho, c_L, c_T, \nu\}$ . Кроме того, известны резонансные частоты волн рэлеевского типа (РТ)  $\kappa_{nr}^{(i)}$ , определяемые с помощью резонансной теории рассеяния (РТР) [2] для упругого цилиндра и толстостенной оболочки, изготовленных из материала, описываемого вектором  $\mathbf{P}_v = \{\rho_r, c_{Lr}, c_{Tr}, \nu_r\}$ , где  $n$  — номер собственного колебания упругого тела. Назовем частоты  $\kappa_{nr}^{(i)}$ , а также тела, изготовленные из материала  $\mathbf{P}_r$ , опорными. Задача состоит в том, чтобы по известным опорным частотам  $\kappa_{nr}^{(i)}$  и вектору  $\mathbf{P}_r$  найти резонансные частоты  $\kappa_{ntr}^{(i)}$  цилиндрического тела  $i$ -го типа, изготовленного из материала, характеризуемого вектором  $\mathbf{P}_m = \{\rho_m, c_{Lm}, c_{Tm}, \nu_m\}$  и имеющего те же геометрические размеры, что и опорное тело в диапазоне частот  $0 < \kappa \leq 20$ , где  $\kappa = \omega R/c_1$  — безразмерная частота,  $\omega$  — круговая частота.

Согласно [1], резонансные частоты волн РТ для цилиндрического тела  $i$ -го типа, изготовленного из материала  $\mathbf{P}_m$ , выражаются через резонансные частоты опорного тела следующим образом:

$$\kappa_{ntr}^{(i)} = \kappa_{nr}^{(i)} c_{pm} / c_{pr}, \quad (1)$$

где  $c_{pr}$ ,  $c_{pm}$  — фазовые скорости волн РТ для опорного тела и исследуемого тела, изготовленного из материала, описываемого  $\mathbf{P}_m$ . Известно [3], что фазовые скорости поверхностных волн РТ на выпуклых поверхностях превышают фазовую скорость рэлеевской волны  $c_R$ , которая имеет место на плоской границе упругого полупространства. Величина вносимой поправки зависит от физических параметров материала, радиуса кривизны поверхности упругого тела и частоты возбуждаемой волны [3],

На основании этого соотношение (1) можно записать в следующем виде:

$$\kappa_{nmr}^{(i)} = \kappa_{nr}^{(i)} \frac{c_{Rm} (1 + A_m c_{Rm} / \kappa_{nmr}^{(i)} c_1)}{c_{Rr} (1 + A_r c_{Rr} / \kappa_{nr}^{(i)} c_1)}, \quad (2)$$

где

$$A_j = \frac{(a_1 + a_2) a_{3j} + (a_1 - a_2) a_{4j} + a_{5j}}{a_{6j} (a_{3j} - a_{4j}) + a_{7j}}, \quad j = m, r,$$

$$a_{1j} = 1 + s_{Rj} / q_{Rj}, \quad a_{2j} = (1 - s_{Rj}^2 / q_{Rj}^2) k_{Rj} / 2s_{Rj},$$

$$a_{3j} = [(k_{Rj} + q_{Rj})(k_{Rj} - s_{Rj})] / [(k_{Rj} - q_{Rj})(k_{Rj} + s_{Rj})],$$

$$a_{4j} = a_{3j}^{-1}, \quad a_{5j} = 2(1 - k_{Tj}^2 / k_{Lj}^2) s_{Rj}^2 / k_{Tj}^2,$$

$$a_{6j} = 1 - s_{Rj} / q_{Rj}, \quad a_{7j} = 2a_{5j} k_{Rj} / s_{Rj},$$

$$k_{Lj} = c_{Lj}^{-1}, \quad k_{Tj} = c_{Tj}^{-1}, \quad k_{Rj} = c_{Rj}^{-1},$$

$$s_{Rj} = (c_{Rj}^{-2} - c_{Tj}^{-2})^{1/2}, \quad q_{Rj} = (c_{Rj}^{-2} - c_{Lj}^{-2})^{1/2},$$

$$c_{Rj} = c_{Tj} (0,87 + 1,12\nu) / (1 + \nu).$$

Из (2) получаем, что резонансные частоты  $\kappa_{nmr}^{(i)}$  цилиндрических тел, изготовленных из материала  $P_m$ , выражаются через опорные частоты следующим образом:

$$\kappa_{nmr}^{(i)} = [a_i + (a_i^2 + 4a_i b)^{1/2}] / 2, \quad (3)$$

где  $a_i = \kappa_{nr}^{(i)} c_{Rm} / [c_{Rr} (1 + A_r c_{Rr} / \kappa_{nr}^{(i)} c_1)]$ ,  $b = A_m c_{Rm} / c_1$ .

Формулы (2) и (3) справедливы при значениях  $\kappa \geq 100$  и использование их в области частот  $0 < \kappa \leq 20$  должно приводить к увеличению погрешностей при определении резонансных частот волн РТ. Для уменьшения этих погрешностей целесообразно использовать численные результаты, приведенные на рис. 1.21 в [3]. Из рассмотрения этих результатов следует, что величина отношения фазовых скоростей волн РТ на цилиндрической поверхности к скорости рэлеевских волн в диапазоне  $0 < \kappa \leq 50$  практически не зависит от материала цилиндрических тел и поэтому можно считать, что выполняется соотношение  $c_{pm} / c_{pr} \simeq c_{Rm} / c_{Rr}$ . В этом случае (1) принимает следующий вид:

$$\kappa_{nmr}^{(i)} = \kappa_{nr}^{(i)} c_{Rm} / c_{Rr}. \quad (4)$$

Представляет интерес сравнить погрешности резонансных частот волн РТ, вычисляемых с помощью выражений (3) и (4) в диапазоне  $0 < \kappa \leq 20$  для тел, изготовленных из различных материалов. Погрешности будем оценивать с помощью следующего выражения:

$$\delta_{nmr}^{(i)} = 100 | \kappa_{nmr}^{(i)} - \kappa_{nm}^{(i)} | / \kappa_{nm}^{(i)} \%, \quad (5)$$

где  $\kappa_{nm}^{(i)}$  — точные значения резонансных частот волн РТ, рассчитанных с помощью РТР для упругого цилиндрического тела  $i$ -го типа, изготовленного из материала  $P_m$ .

Были исследованы резонансные частоты тел, изготовленных из пяти различных материалов, которые обозначим следующим образом: 1 — алюминий, 2 — сталь, 3 — латунь, 4 — цинк, 5 — никель, т. е.  $m = 1, 5$ . В табл. 1 приведены физические параметры исследуемых материалов. Любой из этих материалов можно использовать в качестве опорного, т. е.  $r = 1, 5$ . Исследуемые цилиндрические тела находятся в воде ( $\rho_1 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_1 = 1500$  м/с).

Для проведения сравнительного анализа погрешностей резонансных частот, вычисляемых по формулам (3) и (4), были определены величины

$$\Delta_n^{(i)} = \frac{1}{N_r} \sum_{r=1}^{N_r} \Delta_{nr}^{(i)} \%, \quad (6)$$

где  $\Delta_{nr}^{(i)} = \max_m \delta_{nmr}^{(i)}$ ,  $m = \overline{1, M}$ ;  $M$  — количество исследуемых материалов,  $N_r$  — количество опорных материалов. Результаты расчетов по формулам (3)–(6) представлены в табл. 2, в которой для каждого

Таблица 1

Материал	$c_L$ , м/с	$c_T$ , м/с	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\nu$
Алюминий	6420	3040	2700	0,355
Сталь	6100	3280	7700	0,297
Латунь	4700	2110	8600	0,374
Цинк	4170	2440	7110	0,24
Никель	5850	2960	8800	0,328

Таблица 2

$i$	$n$				
	2	3	4	5	6
1	3,1696	2,4194	1,779	1,401	1,158
	1,893	1,3554	0,8806	0,6198	0,4332
0,8	1,394	1,996	1,819	1,561	1,1336
	1,4076	1,0312	0,9122	0,7196	0,4332

$i$ -го типа тел приведены два ряда значений  $\Delta_n^{(i)}$  — верхний соответствует результатам расчетов по формулам (3), (5) и (6), а нижний — (4)–(6). Из рассмотрения результатов расчета видно, что вычисление резонансных частот волн РТ в диапазоне частот  $0 < \kappa \leq 20$  с помощью опорных частот по формуле (4) обеспечивает большую точность, чем по формуле (3). Кроме того, из табл. 2 видно, что с увеличением номера собственного колебания  $n$ , т. е. при перемещении в более высокочастотную область, точность с которой определяют резонансные частоты волн РТ, возрастает при расчетах как по формуле (3), так и по формуле (4).

Чтобы выяснить, какой из пяти материалов наиболее целесообразно использовать в качестве опорного, необходимо определить наименьшую усредненную погрешность, получаемую усреднением по количеству исследуемых материалов, а также по количеству собственных колебаний, резонансные частоты которых лежат в диапазоне  $0 < \kappa \leq 20$ . Результаты расчетов показали, что наименьшую усредненную погрешность резонансных частот волн РТ получаем при использовании никеля в качестве опорного материала для упругих цилиндров и стали для оболочек  $\epsilon$   $i = 0,8$ .

Таким образом, для определения значений резонансных частот волн РТ с помощью опорных частот в диапазоне  $0 < \kappa \leq 20$  целесообразно использовать формулу (4), которая устанавливает связь между резонансными частотами  $n$ -го собственного колебания двух цилиндрических тел одного типа, имеющих одинаковые геометрические размеры, и физическими параметрами, описывающими материал этих тел. Параметры окружающей среды  $\rho_1$  и  $c_1$  учитываются в (4) неявным образом. Они влияют на значение опорной резонансной частоты  $\kappa_{nr}^{(i)}$ , вычисляемой с помощью РТР.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергеев А. В. Об определении резонансных частот упругих тонкостенных оболочек с помощью опорных частот // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 1. С. 109–115.
2. Gaunard G. C., Brill D. Acoustic spectrogram and complex-frequency poles of a resonantly excited elastic tube // J. Acoust. Soc. Amer. 1984. V. 75. № 6. P. 1680–1693.
3. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.

НИИ прикладных физических проблем  
им. А. Н. Севченко

Поступила в редакцию  
16.12.88

A. V. Sergeev

AN ESTIMATION OF RESONANCE FREQUENCIES OF RAYLEIGH  
TYPE WAVES IN ELASTIC CYLINDRICAL BODIES BY MEANS  
OF BASE FREQUENCIES

A possibility of determination of resonance frequencies for Rayleigh type waves in elastic cylinders and thick-walled cylindrical shells by means of base frequencies is considered.