

УДК 534.21

© 1990 г.

Старков А. С.

АСИМПТОТИКА НОРМАЛЬНОЙ ВОЛНЫ
В СЛАБОНЕРЕГУЛЯРНОМ ВОЛНОВОДЕ

Рассматривается задача о распространении отдельной нормальной волны в слабонерегулярном изогнутом волноводе, состоящем из низкоскоростного слоя, граничащего с основной средой. Исследуется влияние кривизны границы слоя и нормальной составляющей градиента скорости звука в основной среде на процесс распространения нормальных волн и на явление «высвечивания» нормальной волны в критическом сечении.

Двумерная задача о распространении волн в слабонерегулярных волноводах с однородным заполнением и криволинейными стенками рассматривалась многими авторами [1, 2]. Наличие малого параметра p , характеризующего плавность изменения свойств волновода, привело к развитию различных асимптотических методов: двухмасштабных разложений [3], плавных возмущений, асимптотического интегрирования волноводных уравнений [4]. В данной работе исследуется задача о распространении акустической нормальной волны в слабонерегулярном волноводе, состоящем из изогнутого низкоскоростного слоя переменной толщины, граничащего с основной средой. Решение задачи известно в адиабатическом приближении [5], не учитывающем кривизны границ слоя. Цель работы — изучение влияния кривизны слоя и нормальной составляющей градиента скорости звука в основной среде на параметры нормальной волны.

Рассмотрим двумерный слой переменной толщины, ограниченный двумя гладкими непересекающимися кривыми S_1 и S_2 (рис. 1). Границу S_2 будем считать заданной своим естественным уравнением $\rho = \rho(s)$, ρ — радиус кривизны, s — длина дуги вдоль S_2 . Если ввести в окрестности S_2 координаты (s, ν) , где ν — длина нормали к S_2 , то граница S_1 может быть задана уравнением $\nu = -h(s) < 0$. По другую сторону от S_2 расположена среда, которую назовем основной и которая характеризуется плотностью d_2 и скоростью распространения звука $c_2(s, \nu)$. Плотность и скорость распространения звуковых волн в слое есть d_1 и $c_1(s, \nu)$, причем предполагается, что для любых s, ν выполняется неравенство $c_2(s, \nu)/c_1(s, \nu) > 1$. При этом предположении слой обладает волноведущими свойствами и в нем может распространяться конечное число M нормальных волн, отвечающих лучам, отражающимся от границы S_1 и S_2 и экспоненциально убывающих в основной среде. Кроме указанных волн возможно существование волн типа шепчущей галереи, соответствующих лучам, отражающимся все время от одной границы и имеющим внутри слоя каустику. Эффектом взаимодействия волн двух типов можно пренебречь, если выполнены следующие условия:

$$\frac{h}{\rho} \ll 1, \quad h' \equiv \frac{dh}{ds} \ll 1, \quad \frac{\omega}{c} hh' \ll 1. \quad (1)$$

Первое из неравенств (1) означает, что толщина слоя должна быть много меньше радиуса кривизны границы. Второе требует, чтобы изменение толщины было достаточно плавным. Третье неравенство накладывает ограничение на частоту ω рассматриваемых гармонических волн.

Кривизну границы $\rho(s)$ и скорости распространения звука $c_1(s, \nu)$, $c_2(s, \nu)$ будем считать мало изменяющимися на расстояниях порядка

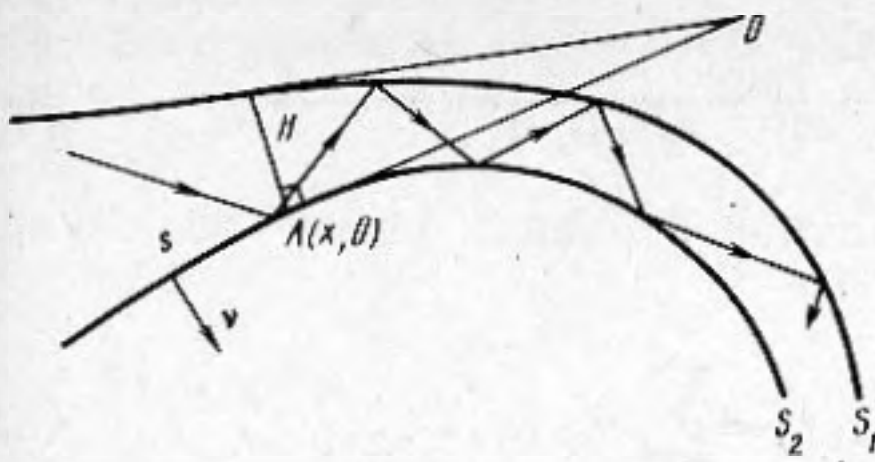


Рис. 1

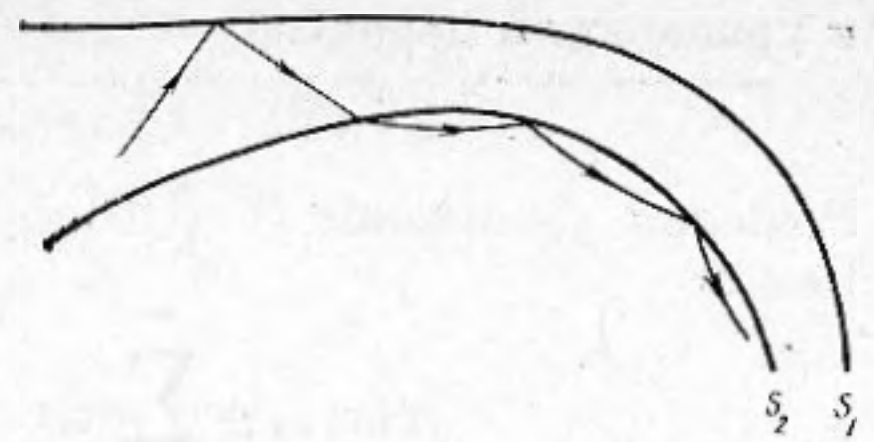


Рис. 2

длины волны. Поэтому удобно ввести растянутые безразмерные координаты $z = p \frac{\omega}{c} v$, $x = p \frac{\omega}{c} s$, где

$$p = \max \left\{ \frac{c}{\omega} \frac{h'}{h}, \frac{c}{\omega} \frac{\rho'}{\rho}, \frac{c}{\omega} \frac{|\nabla c_1|}{c_1}, \frac{c}{\omega} \frac{|\nabla c_2|}{c_2} \right\}$$

— малый параметр, а также приведенную толщину $H(x) = \frac{\omega}{c} h(s)$, приве-

денный радиус кривизны $R(x) = p \frac{\omega}{c} \rho(s)$ и считать H и R^{-1} конечными,

а координату z малой при $p \rightarrow 0$. Здесь c — некоторая характерная для данного волновода скорость.

Приведенные показатели преломления $n_1(x, z) = c/c_1(x, z)$, $n_2(x, z) = c/c_2(x, z)$ разложим в ряд Тейлора по степеням z : $n_1^2(x, z) = n_{10}^2 + n_{11}(x)z + \dots$, $n_2^2(x, z) = n_{20}^2(x) + n_{12}(x)z + \dots$. Пусть $u(x, z)$ — акустическое давление. Рассмотрим задачу о нахождении поля отдельной нормальной волны (зависимость от времени принята $e^{-i\omega t}$):

$$[\Delta + n^2(x, z)]u(x, z) = 0, \quad n^2(x, z) = \begin{cases} n_1^2, & z < 0 \\ n_2^2, & z > 0 \end{cases}, \quad (2)$$

$$u|_{S_1} = 0, \quad \lim_{x^2+z^2 \rightarrow \infty} u = 0 \quad (\text{Im } \omega > 0), \quad (3)$$

$$u|_{z=+0} = u|_{z=-0}, \quad \frac{1}{d_2} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=+0} = \frac{1}{d_1} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-0}. \quad (4)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, в координатах (x, z) имеющий вид

$$\Delta u = p^2 \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1} \frac{\partial u}{\partial x} \right].$$

Граничные условия (3), (4) обеспечивают непрерывность давления и нормальных скоростей частиц на границе раздела S_2 и свободной границы S_1 .

Цель дальнейшего состоит в отыскании решений задачи (2) — (4), описывающих волны, бегущие в направлении возрастания координаты x (нормальные волны). Из всевозможных решений такого вида будем интересоваться лишь теми волнами, которым соответствуют лучи, попеременно отражающиеся от границ S_1 и S_2 .

Решение уравнения (2) при $z < 0$ будем искать в классическом лучевом виде [6]

$$u(x, z, p) = e^{\frac{i}{p} \tau(x, z)} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, z) (ip)^j. \quad (5)$$

Подставляя разложение (5) в уравнение (2) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях p , приходим к уравнению эйконала

$$(\nabla \tau)^2 = n_1^2(x, z) \quad (6)$$

и уравнениям переноса

$$2\nabla\tau\nabla a_j + a_j\Delta\tau = \Delta a_{j-1}, \quad a_{-1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Решения уравнений (6), (7) будем отыскивать в виде рядов по степеням z

$$\tau(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \tau_l(x) z^l, \quad a_j(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{jl}(x) z^l. \quad (8)$$

Чтобы далекие члены разложений (8) имели сколь угодно высокий порядок малости по p , достаточно положить $z = O(p^\varepsilon)$, $v = O(p^{-1+\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. Именно в этой окрестности кривой S_2 и применимы рассматриваемые разложения.

Вначале рассмотрим уравнение эйконала (6). Заменяя $\tau(x, z)$ на разложение по степеням z , получим

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} (\tau_0 + \tau_1 z + \dots) \right]^2 + \left(1 + \frac{z}{R} \right)^{-2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\tau_0 + \tau_1 z + \dots) \right]^2 = \\ = n_{10}^2(x) + n_{11}(x)z + \dots \quad (9)$$

Приравнивая в обеих частях равенства (9) коэффициенты при z в нулевой и первой степенях, приходим к уравнениям

$$\tau_1^2(x) + \left(\frac{d\tau_0}{dx} \right)^2 = n_{10}^2(x), \\ 4\tau_1(x)\tau_2(x) + 2\frac{d\tau_0}{dx}\frac{d\tau_1}{dx} - \frac{2}{R}\left(\frac{d\tau_0}{dx} \right)^2 = n_{11}(x). \quad (10)$$

Обозначим $d\tau_0/dx = \lambda(x)$, тогда уравнения (10) позволяют выразить $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ через $\lambda(x)$

$$\tau_1(x) = \pm \sqrt{n_{10}^2(x) - \lambda^2(x)}, \\ \tau_2(x) = \left[n_{11}(x) + \frac{2\lambda^2(x)}{R(x)} \right] \frac{1}{4\tau_1(x)} - \frac{2\lambda(x)}{\tau_1(x)} \frac{d\tau_1}{dx}.$$

Последующие члены разложения $\tau(x, z)$ находятся аналогично. В результате удастся построить два решения уравнения эйконала (6), отвечающие двум возможностям выбора знака для $\tau_1(x)$. Эти решения обозначим $\tau^+(x, z)$ и $\tau^-(x, z)$. Функция $\lambda(x)$ на этом этапе вычислений не определена.

Перейдем к построению $a_j(x, z)$. Уравнение для $a_j(x, z)$ можно записать в виде

$$2\left[\frac{\partial a_j}{\partial z} \frac{\partial \tau}{\partial z} + \left(1 + \frac{z}{R} \right)^{-2} \frac{\partial a_j}{\partial x} \frac{\partial \tau}{\partial x} \right] + a_j \Delta \tau = \Delta a_{j-1}.$$

Рассмотрим только случай $j=0$. Уравнение, полученное при объединении членов, не содержащих z , имеет вид

$$2\tau_1(x) = a_{01}(x) + \frac{da_{00}}{dx} \lambda(x) + a_{01} \left[\frac{d\lambda}{dx} + 2\tau_2(x) \right] = 0$$

и позволяет выразить $a_{01}(x)$ через $a_{00}(x)$. Коэффициенты $a_{02}(x)$, $a_{03}(x)$, ..., как следует из анализа последующих уравнений, тоже выражаются через $a_{00}(x)$.

Точно также строится формальное асимптотическое решение уравнения (2) при $z > 0$, имеющее вид

$$u(x, z) = e^{\frac{i}{p}\theta(x, z)} \sum_{j, l=0}^{\infty} b_{jl}(x) z^l (ip)^j, \quad (11)$$

где θ удовлетворяет уравнению эйконала $(\nabla\theta)^2 = n_2^2(x, z)$ и является рядом по степеням z с комплексными коэффициентами

$$\theta(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \theta_l(x) z^l, \quad \text{Im } \theta > 0,$$

$$\theta_1(x) = i \sqrt{\left(\frac{d\theta_0}{dx}\right)^2 - 1} = i\gamma(x),$$

$$\theta_2(x) = \left[n_{21}(x) + \frac{2\lambda^2(x)}{R(x)} \right] \frac{1}{4\theta_1(x)} - \frac{2\lambda(x)}{\theta_1(x)} \frac{d\theta_1}{dx}.$$

Решение задачи (2)–(4) будем отыскивать в виде

$$u(x, z) = e^{\frac{i}{p} \tau^+(x, z)} \sum_{j, l=0}^{\infty} a_{jl}^+(x) z^l (ip)^j + e^{\frac{i}{p} \tau^-(x, z)} \sum_{j, l=0}^{\infty} a_{jl}^-(x) z^l (ip)^j, \quad z < 0, \quad (12)$$

$$u(x, z) = e^{\frac{i}{p} \theta(x, z)} \sum_{j, l=0}^{\infty} b_{jl}(x) z^l (ip)^j, \quad z > 0.$$

Для нахождения оставшихся неопределенными коэффициентов $\tau_0(x)$, $\theta_0(x)$, $a_{00}^{\pm}(x)$, $b_{00}(x)$, ... обратимся к граничным условиям. При подстановке (12) в (3), (4) последовательно получаем

$$\tau_0(x) = \theta_0(x) - \int \lambda_m(x) dx,$$

$$b_{00}(x) = \left[\lambda_m H \left(1 + \frac{\tau_1^2 + \gamma^2}{\gamma^2 + \tau_1^2 \kappa^2} \frac{\kappa}{\gamma H} \right) \right]^{-1/2},$$

где $\kappa = d_2/d_1$, а $\lambda_m(x)$ удовлетворяет дисперсионному уравнению

$$\begin{aligned} & \tau_1 \cos \left[\tau_1 H + \frac{pH^2}{2\tau_1} \left(\frac{\lambda^2}{R} + \frac{n_{11}}{2} \right) \right] + \kappa \left[\gamma + \frac{p}{2\tau_1^2} \left(\frac{\lambda^2}{R} + \frac{n_{11}}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{p}{2\gamma^2} \left(\frac{\lambda^2}{R} + \frac{n_{21}}{2} \right) \right] \sin \left[\tau_1 H + \frac{pH^2}{2\tau_1} \left(\frac{\lambda^2}{R} + \frac{n_{11}}{2} \right) \right] + O(p^2) = 0. \quad (13) \end{aligned}$$

Уравнение (13) имеет дискретный набор решений $\lambda_m(x)$, $m=1, 2, \dots, M$, которые могут быть разложены в ряд по степеням малого параметра p , $\lambda_m(x) = \lambda_{m0}(x) + p\lambda_{m1}(x) + \dots$, где $\lambda_{m0}(x)$ — корень дисперсионного уравнения для задачи с прямолинейными границами

$$\tau_1(\lambda) \cos \tau_1(\lambda) H + \kappa \gamma(\lambda) \sin \tau_1(\lambda) H = 0, \quad (14)$$

а

$$\lambda_{m1} = \frac{\gamma H^2 (\gamma^2 + \tau_1^2 \kappa^2) \left(\frac{n_{11}}{4\lambda} + \frac{\lambda}{2R} \right) + \kappa \left(\kappa \gamma - \frac{\tau_1^2}{\gamma} \right) \left(\frac{n_{21}}{4\lambda} + \frac{\lambda}{2R} \right)}{\gamma H (\gamma^2 + \tau_1^2 \kappa^2) + \kappa (\gamma^2 + \tau_1^2)}.$$

Выпишем полученную формулу для нормальной волны

$$\begin{aligned} & u_m(x, z) = b_{00}(x) [1 + O(p)] e^{\frac{i}{p} \left[\int \lambda_m(x) dx - 2\lambda_m \frac{\tau_1'}{\tau_1} z^2 + O(z^3) \right]} \times \\ & \times \sin \left\{ \frac{1}{p} \left[\tau_1 z + \left(n_{11} + \frac{2\lambda_m^2}{R} \right) \frac{z^2}{4\tau_1} + O(z^3) \right] \right\} \text{cosec}(\tau_1 H), \quad z < 0, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u_m(x, z) = b_{00}(x) [1 + O(p) + O(z)] \exp \left\{ \frac{1}{p} \left[i \int \lambda_m(x) dx - \gamma(x) \bar{z} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(n_{21} + \frac{2}{R} \lambda_m^2 \right) \frac{z^2}{4\gamma} - 2i\lambda_m \frac{\gamma'}{\gamma} z^2 + O(z^3) \right] \right\}, \quad z > 0. \end{aligned}$$

Заметим, что уравнение (9) для эйконалов $\tau^+(x, z)$ и $\tau^-(x, z)$ может быть записано в виде

$$\frac{\partial \tau^+}{\partial z} = \sqrt{n_1^2(x, z) - \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-2} \left(\frac{\partial \tau^+}{\partial x}\right)^2},$$

$$\frac{\partial \tau^-}{\partial z} = -\sqrt{n_1^2(x, z) - \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-2} \left(\frac{\partial \tau^-}{\partial x}\right)^2},$$

а это уравнение — в форме Ковалевской. Уравнения переноса (7) также могут быть записаны в форме Ковалевской. Следовательно, по теореме Коши — Ковалевской [7] ряды (8) в отличие от аналогичных разложений, полученных в [8], являются не только асимптотическими при малых z , но и абсолютно сходящимися. К преимуществам разложений (8) также следует отнести и то, что коэффициенты этих рядов явным образом находятся при помощи только алгебраических операций (операция интегрирования не применяется), что весьма важно с вычислительной точки зрения.

Отметим некоторые отличия свойств нормальных волн (15) от свойств нормальных волн регулярных волноводов. Фазовый фронт нормальной волны (15) не плоский, а искривленный и практически ортогонален границам слоя. В выражении (15) искривление фронта описывается слагаемым, содержащим z^2 . В рассматриваемом приближении радиус кривизны волнового фронта K равен $-\tau_1/(p\tau_1')$ при $z < 0$ и $K = -\gamma/(p\gamma')$ при $z > 0$. При нахождении K можно использовать приближенное уравнение (14). Фазовая скорость в нерегулярном волноводе зависит от кривизны и наклона границ волновода, а также от расстояния до границы. Распределение поля по сечению описывается не функцией $\sin[\tau_1/(z + Hp/p)]$, а несколько более сложной функцией, т. е. имеется искажение аргумента собственной функции регулярного волновода. В зависимости от знака эффективной кривизны в основной среде $1/R_{эф} = 1/R + n_{21}/(2\lambda_m^2)$ нормальная волна в нерегулярном волноводе при удалении от границы S_2 в глубь основной среды убывает быстрее или медленнее, чем в регулярном волноводе.

В широком волноводе ($H \gg 1$) для волн малых номеров ($m \ll M = O(H)$) формула для радиуса кривизны волнового фронта нормальной волны может быть упрощена. Дифференцируя уравнение (14) по координате x , получаем

$$\frac{d\tau_1 H}{dx} = \frac{d(n_{10}^2 - n_{20}^2) H}{dx} O\left(\frac{\tau_1^2}{\gamma^2}\right).$$

Пренебрегая правой частью полученного соотношения, т. е. величиной порядка $\tau_1^2/\gamma^2 = O\left(\frac{m^2}{M^2}\right)$, приходим к приближенному равенству $\tau_1'/\tau_1 \approx$

$\approx -H'/H$, из которого следует $K \approx H/(pH')$. Таким образом, радиус кривизны фронта нормальной волны с малым номером не зависит от номера и приближенно совпадает с расстоянием AO до вершины клина, стороны которого касаются границ в точке x (см. рис. 1). Этот факт был обнаружен вначале экспериментально [9, 10], а затем подтвержден численными расчетами [11].

С геометрической точки зрения нормальные волны малых номеров отвечают лучам, достаточно отличающимся от угла полного внутреннего отражения.

Перейдем теперь к исследованию влияния эффективной кривизны границы на асимптотику нормальной волны вблизи критических сечений (сечений отсечки), в окрестности которых происходит «высвечивание» нормальной волны в основную среду [12, 13].

Пусть при $x=0$ толщина слоя принимает критическое для волны с

индексом M значение $H(0) = \pi \left(M - \frac{1}{2} \right) (n_{10}^2 - n_{20}^2)^{-1/2}$ и слой является су-

жающимся: $H_1 = \frac{dH}{dx} \Big|_{x=0} < 0$. Для прямолинейной границы S_2 локальная

асимптотика нормальной волны при малых x найдена в [12] и в растя-

нутых координатах

$$t = p^{-1/3} L^{2/3} \frac{nx}{2}, \quad y = p^{2/3} L^{-1/3} nz,$$

где $n = n_{20}(0)$, $L = \frac{\kappa}{H_1} (n_{10}^2(0)/n^2 - 1)^{-1}$ — характерный горизонтальный

масштаб, имеет вид

$$u_M = ae^{\frac{inx}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^{3/2}}{3} - i\lambda t + iV\sqrt{\lambda}y} d\lambda, \quad z > 0, \quad (16)$$

$$u_M = ae^{\frac{inx}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^{3/2}}{3} - i\lambda t} \cos \tau_1 z d\lambda, \quad z < 0,$$

$$a = e^{i\frac{\pi}{4}} \left[-\pi H_1 \left(\frac{n_{10}^2(0)}{n^2} - 1 \right) p^{1/3} \right]^{-1/2}.$$

Можно показать, что формула (16) остается справедливой и в случае криволинейных границ, но только при малых $y \ll 1$.

Процедура перехода от локальных разложений к разложениям, справедливым при больших удалениях от слоя по нормали, для криволинейных границ хорошо известна [6] и в главном приближении сводится к замене $e^{iV\sqrt{\lambda}y}$ под знаком интеграла в формуле (16) на решение уравнения

$$\frac{d^2 F}{dy^2} + \left(\lambda - y \frac{2L}{R_{\text{эф}} n} \right) F = 0,$$

обращающееся при $y=0$ в единицу. Результат продолжения разложения (16) на конечные $y > 0$ имеет вид

$$u_M = ae^{i\frac{nx}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^{3/2}}{3} - i\lambda t} \frac{v(\alpha y - \lambda/\alpha^2)}{v(-\lambda/\alpha^2)} (1 + O(p^{1/3})) d\lambda, \quad (17)$$

где $\alpha = (2L/R_{\text{эф}} n)^{1/2} \Big|_{x=0}$.

При выводе формулы (17) предполагалось, что $R_{\text{эф}} > 0$. Для другого знака эффективной кривизны функцию Эйри $v(X)$ следует заменить на аналогичную функцию $w_1(X)$.

При положительных значениях t интеграл (17) может быть представлен в виде суммы вычетов в полюсах μ_k подынтегрального выражения, являющихся корнями уравнения $v(-\mu_k) = 0$,

$$u_M = \sum_{k=1}^{\infty} C_k U_k, \quad (18)$$

где функция $U_k(t, y) = e^{-i\alpha^2 \mu_k t + i\frac{nx}{p} v(\alpha y - \mu_k)}$ описывает нормальную волну щепчущей галереи, отвечающую лучам, отражающимся все время от границы S_2 (рис. 2), а коэффициенты возбуждения C_k даются формулой

$$C_k = 2\pi i \alpha^2 \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{3} \mu_k^{3/2}}}{v'(-\mu_k)}. \quad (19)$$

Для нахождения акустического поля в закритической области $x > 0$ необходимо построить асимптотику волны шепчущей галереи вдали от критического сечения. Эта асимптотика в основной среде получена в [6] и имеет вид

$$U_k = \sqrt{\frac{\beta(x)}{\beta(0)} \frac{n}{n_{20}(x)}} \exp \left\{ \frac{i}{p} \int_0^x n_{20}(x) dx - \frac{i\mu_k}{p^{1/2}} \int_0^x \frac{\beta^2(x)}{n_{20}(x)} dx - \right. \\ \left. - iz^2 n_{20}(x) \frac{\beta'(x)}{2\beta(x)} \right\} \left\{ v \left[-\mu_k + \frac{z\beta(x)}{p^{1/2}} \right] [1 + O(p^{1/2})] + \right. \\ \left. + \frac{O(z)}{p^{1/2}} v' \left[-\mu_k + \frac{z\beta(x)}{p^{1/2}} \right] \right\}, \quad (20)$$

где $\beta(x) = (2n_{20}^2(x))^{1/2} (R_{\text{эф}}(x))^{-1/2}$, $R_{\text{эф}}(x) = 1/R(x) + n_{21}(x)/2n_{20}^2(x)$.

В итоге получаем, что в закритической области $x > 0$ акустическое поле описывается формулой (18), где каждое слагаемое представляет собой нормальную волну шепчущей галереи (20), а коэффициенты возбуждения даются формулой (19).

Из полученных формул следует, что при прохождении критического сечения нормальная волна преобразуется не в узкий цилиндрически расходящийся в основной среде пучок, как для прямолинейной границы слоя, а в сумму волн шепчущей галереи. Число волн шепчущей галереи, появившихся за критическим сечением, определяется параметром α , т. е. отношением характерного продольного масштаба L к эффективному радиусу кривизны $R_{\text{эф}}$. Если эти величины имеют одинаковый порядок $\alpha = O(1)$, то возбуждаются в основном волны шепчущей галереи с малыми номерами. Так как вдоль слоя амплитуда этих волн почти не изменяется, то при малом числе возбужденных волн шепчущей галереи акустическое поле вдоль трассы практически не убывает [13, 14]. Заметим, что в предельном случае $R_{\text{эф}}^{-1} = 0$ амплитуда поля убывает по закону $x^{-3/2}$ [13]. Также следует отметить, что кривизна волнового фронта волны шепчущей галереи не зависит от номера и определяется эффективной кривизной границы $R_{\text{эф}}$.

Таким образом, в работе построены асимптотические формулы для нормальной волны, учитывающие наличие кривизны границы раздела двух сред и градиента скорости звука, применимые как вдали от критического сечения (14), так вблизи (17) и за критическим сечением (18) — (20).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровиков В. А., Попов А. В. Распространение волн в плавнорегулярных многомодовых волноводах // Прямые и обратные задачи теории дифракции. М.: Изд-во ИРЭ АН СССР, 1979. С. 167–266.
2. Авдеев А. Д. Метод поперечных сечений в произвольных криволинейных координатах и высшие моды плавнорегулярных волноводов // Распространение радиоволн над земной поверхностью. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. С. 18–43.
3. Bretherton F. P. Propagation in slowly varying waveguides // Proc. Roy. Soc. 1968. A302. P. 555–576.
4. Боровиков В. А., Владимиров Ю. В. Сравнение двух методов оценки трансформации мод на неоднородном участке волновода // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 1. С. 56–69.
5. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах. М.: Наука, 1969. 192 с.
6. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 453 с.
7. Ковалевская С. В. Научные работы. М.: Изд-во АН СССР, 1948. 368 с.
8. Попов А. В. Коротковолновая асимптотика нормальных волн в локально-слоистой среде // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230. № 6. С. 1322–1325.
9. Tindle C. T., Hobaek H., Muir T. G. Downslope propagation of normal waves in shallow water wedge // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. V. 81. № 1. P. 275–286.
10. Tindle C. T., Hobaek H., Muir T. G. Normal mode filtering for downslope propagation in a shallow water wedge // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. V. 81. № 1. P. 287–294.
11. Jensen F. B., Tindle C. T. Numerical modeling results for mode propagation in a wedge // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. V. 82. № 1. P. 211–216.

12. *Pierce A. D.* Guided mode disappearance during upslope propagation in variable depth shallow water overlying a fluid bottom // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1984. V. 76. № 3. P. 850–860.
13. *Старков А. С.* Излучение нормальной волны при прохождении критического сечения волновода переменной толщины // *Зап. науч. сем. ЛОМИ.* 1987. Т. 165. С. 166–176.
14. *Miller J. F., Nagl A., Oberall H.* Sound propagation in a range – dependent shallow ocean with a bottom containing vertical sound speed gradients. *Progr. Underwater Acoust: Proc. 12 Int. Congr. Acoust. Assoc. Symp. Underwater Acoust.* N. Y.; L., 1987. P. 533–540.

Ленинградский технологический институт
холодильной промышленности

Поступила в редакцию
06.06.88
после исправления
03.04.89

A.S. Starkov

A NORMAL WAVE ASYMPTOTE IN A SLIGHTLY IRREGULAR WAVEGUIDE

A problem of a single normal wave propagation in a slightly irregular curved waveguide, which consists of a low speed layer bordering with a main medium, is considered. The influence of a layer boundary curvature and a normal component of a sound speed gradient in a main medium upon a normal wave propagation process and an effect of a normal wave «shining out» in a critical cross-section is investigated.