АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 1

УДК 534.26

И. А. Урусовский

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАПРАВЛЕННОСТИ АКУСТИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ПОЛЯ В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ

Дан расчет характеристики направленности излучения акустической антенны по измерениям ее поля в объеме, ограниченном сферической поверхностью с известными коэффициентами отражения сферических гармоник, учитывающий многократные отражения и рассеяния волн от граничной сферы и антенны. Коэффициенты рассеяния антенной сферических гармоник выражены через измерения поля источников с заданной объемной скоростью.

В [1] дан способ расчета характеристики направленности излучения акустической антенны по измерениям ее поля в ограниченном объеме. Этот способ, строго говоря, применим лишь для звукопрозрачных антенн, не вызывающих рассеяния набегающих на них волн. Аналогичное положение имеет место и в задаче нахождения характеристик направленности электромагнитных антенн по измерениям поля в ограниченном объеме: эксперимент показывает [2], что пренебрежение рассеянием электромагнитных волн в такой задаче допустимо лишь для тел малых волновых размеров.

Здесь проведем учет многократных рассеяний волн антенной в указанной акустической задаче в случае сферического объема с однородной границей — сферой радиуса a, полагая пока матрицу коэффициентов рассеяния антенны известной и ограничиваясь сначала осевой симметрией.

Первичное поле антенны есть поле ее излучения в свободном пространстве. В сферических координатах r, θ в точке наблюдения, отстоящей от начала координат дальше любой точки антенны (это условие полагаем далее выполненным), оно имеет вид

$$p^{(0)}=\sum_{n\geqslant 0} A_n^{(0)}\psi_n^{(+)}, \tag{1}$$

где $\psi_n{}^+ = h_n{}^{(1)}(kr)\,P_n(\cos\theta)$, $h_n{}^{(1)}(kr)$ и $P_n(\cos\theta)$ — сферические функции Ганкеля и полиномы Лежандра соответственно, k — волновое число, $A_n{}^{(0)}$ — комплексные амплитуды расходящихся сферических гармоник, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ подразумевается. Отражение поля (1) от граничной сферы $r=a$ порождает поле сходящихся к антенне волн

$$p^{(0)}=\sum_{n\geqslant 0} A_n^{(0)} R_n\psi_n{}^-, \tag{2}$$

где $\psi_n{}^- = h_n{}^{(2)}(kr)\,P_n(\cos\theta)$, R_n — приведенные к центру коэффициенты отражения расходящихся сферических гармоник от граничной сферы,

$$R_n = K_n h_n{}^{(1)}(ka)/h_n{}^{(2)}(ka) = K_n \exp\{i2\arccos|j_n(ka)/|h_n{}^{(1)}(ka)|\},$$

$j_n(ka)$ — сферическая функция Бесселя, K_n — обычные коэффициенты отражения(в принципе эти коэффициенты могут быть найдены из сравнительно простых измерений в отсутствие антенны).

Первично рассеянное поле, порождаемое волнами (2), имеет вид

$$p^{(1)}=\sum_{n\geqslant 0} A_n^{(1)}\psi_n{}^+,$$

где

$$A_n^{(1)} = \sum_{m\geqslant 0} A_m^{(0)}\alpha_{mn}^{(0)}, \quad \alpha_{mn}^{(0)} = R_m c_{mn}, \tag{3}$$

c_{mn} — коэффициент рассеяния m-й сходящейся к центру сферической гармоники в n-ю расходящуюся; для абсолютно поглощающей антенны $c_{mn} = 0$, для абсолютно прозрачной — $c_{mn} = \sigma_{m-n}$, где $\delta_0 = 1$, $\delta_m = 0$ при $m \neq 0$.

Полное поле p является суммой первичного поля и всех последовательных отражений и рассеяний:

$$p = \sum_{n\geqslant 0} A_n (\psi_n{}^+ + R_n \psi_n{}^-), \tag{4}$$

где

$$A_n = A_n^{(0)} + A_n^{(1)} + A_n^{(2)} + \ldots. \tag{5}$$

$$A_n^{(s+1)} = \sum_{m\geqslant 0} A_m^{(s)}\alpha_{mn}^{(0)}. \tag{6}$$

Из (3) и (6) следует

$$A_n^{(2)} = \sum_{m\geqslant 0} A_m^{(0)}\alpha_{mn}^{(1)}, \quad \text{где} \quad \alpha_{mn}^{(1)} = \sum_{\nu\geqslant 0} \alpha_{m\nu}^{(0)}\alpha_{\nu n}^{(0)}.$$

Отсюда по индукции получим

$$A_n^{(s+1)} = \sum_{m\geqslant 0} A_m^{(0)}\alpha_{mn}^{(s)}, \quad \text{где} \quad \alpha_{mn}^{(s)} = \sum_{\nu\geqslant 0} \alpha_{m\nu}^{(s-1)}\alpha_{\nu n}^{(0)}.$$

Подстановка этих выражений в (5) дает:

$$A_n = A_n^{(0)} + \sum_{m\geqslant 0} A_m^{(0)}\beta_{mn}, \tag{7}$$

где

$$\beta_{mn} = \alpha_{mn}^{(0)} + \alpha_{mn}^{(1)} + \alpha_{mn}^{(2)} + \ldots.$$

По известным R_n и c_{mn} и полученным формулам можно найти β_{mn}, а по измеренным значениям полного поля p на сфере $r = \text{const}$ — коэффициенты A_n. При этом, учитывая свойство полиномов Лежандра

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{n-m},$$

получим

$$A_n = \frac{2n+1}{2\,[h_n^{(1)}(kr) + R_n h_n^{(2)}(kr)]} \int_0^{\pi} p(r, \theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta. \tag{8}$$

Наконец, разрешая систему уравнений (7) относительно амплитуд $A_m{}^{(0)}$, найдем искомые коэффициенты первичного поля (1). Практически решение системы приходится получать методом редукции, который по мере увеличения ранга матрицы — коэффициентов β_{mn}, принимаемых в расчет — позволяет получить с желаемой степенью точности искомые амплитуды $A_n{}^{(0)}$. Асимптотика первичного поля при больших kr дает искомую характеристику направленности:

$$p^{(0)} \sim \frac{\exp(ikr)}{ikr} \sum_{n\geqslant 0} i^{-n} A_n^{(0)} P_n(\cos\theta).$$

В простейшем случае, когда все c_{mn} при $m \neq n$ равны нулю, имеем $\alpha_{mn}^{(s)} = (R_n c_{nn})^{s+1}\delta_{m-n}$, β_{nn} оказывается суммой геометрической прогрессии, $A_n{}^{(0)} = (1 - R_n c_{nn}) A_n$.

Обратимся теперь к обратной задаче — нахождению коэффициентов рассеяния c_{mn}. Их можно найти при отключенной антенне по измерениям поля достаточно большого числа источников заранее известной объемной скорости в достаточно большом числе точек рассматриваемого объема. В отсутствие антенны поле источника объемной скорости V, расположенного при $r = r_0$, $\theta = 0$, равно

$$\mathcal{P}(r,\theta) = \frac{\rho c}{4\pi} k^2 V \sum_{n\geqslant 0} (2n+1) P_n(\cos\theta)\, j_n(kr)\, b_n(kr_0), \tag{9}$$

где

$$b_n(x) = i n_n(x) + j_n(x)\frac{1+R_n}{1-R_n} = \frac{h_n^{(1)}(x) + R_n h_n^{(2)}(x)}{1-R_n},$$

$n_n(x)$ — сферическая функция Неймана. В случае $r > r_0$ в правой части формулы (9) r и r_0 следует поменять местами. Из (9) видно, что амплитуда n-й сходящейся к центру сферической гармоники для такого источника равна

$$\bar{A}_n = \frac{\rho c}{8\pi} k^2 V (2n+1)\, b_n(kr_0).$$

При непрерывном осесимметричном распределении монополей по сфере $r = r_0 < a$ с поверхностной плотностью объемной скорости $V(\theta) = \sum_{n\geqslant 0} V_n P_n(\cos\theta)$ имеем при $r < r_0$

$$\mathcal{P}(r,\theta) = \frac{\rho c}{4\pi} k^2 \sum_{n\geqslant 0} V_n P_n(\cos\theta)\, j_n(kr)\, b_n(kr_0), \tag{10}$$

а при $r > r_0$ в правой части формулы (10) r и r_0 следует поменять местами. Из (10) видно, что для такого распределения

$$\bar{A}_n = \frac{\rho c}{8\pi} k^2 V_n b_n(kr_0). \tag{11}$$

Очевидно, поле от желаемого распределения источников звука можно получить методом синтезированной апертуры, располагая всего одним источником, перемещаемым по сфере $r = r_0$ с суммированием или интегрированием его поля с соответственным положению источника весом. Если же объемные скорости излучателей неизвестны, но измерено поле $p(r, \theta)$, которое они создают при $r < r_0$ в отсутствие антенны, то амплитуды $\bar{A}_n$ также можно найти: они равны правой части формулы (8), вычисленной в отсутствие антенны.

Дифрагированное поле (разность полного поля p и падающего $\mathcal{P}$) напишется в виде разложения по сферическим гармоникам $p - \mathcal{P} = \sum_{n\geqslant 0} B_n(\psi_n^+ + R_n\psi_n^-)$, амплитуды которого очевидным образом выражаются через поле p, измеренное на поверхности контрольной сферы:

$$B_n = A_n - \frac{2n+1}{2\left[h_n^{(1)}(kr_1) + R_n h_n^{(2)}(kr_1)\right]} \int_0^\pi \mathcal{P}(r_1,\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta, \tag{12}$$

где A_n выражены формулой (8). Подстановка в (12) $\mathcal{P}(r_1, \theta)$ из формулы (10) дает

$$B_n = A_n - \frac{\rho c}{4\pi}\frac{k^2}{1-R_n} V_n \frac{h_n^{(1)}(kr_0) + R_n h_n^{(2)}(kr_0)}{h_n^{(1)}(kr_1) + R_n h_n^{(1)}(kr_1)} j_n(kr_1) \quad \text{при} \quad r_1 < r_0,$$

$$B_n = A_n - \frac{\rho c}{4\pi}\frac{k^2}{1-R_n} V_n j_n(kr_0) \quad \text{при} \quad r_1 > r_0.$$

В частности, когда поле $\mathcal{P}$ представлено формулой (9), $V_n = (2n+1)V$. Полное поле $p(r, \theta)$ при $r < r_0$ равно

$$p(r,\theta) = \sum_{n\geqslant 0} \left[(\bar{A}_n + B_n)\psi_n^+ + (\bar{A}_n + R_n B_n)\psi_n^-\right]. \tag{13}$$

Амплитуды сходящихся к антенне и расходящихся от нее сферических гармоник связаны системой уравнений

$$\bar{A}_n + B_n = \sum_{m\geqslant 0} (\bar{A}_m + R_m B_m) c_{mn}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

из которой методом редукции находятся коэффициенты рассеяния c_{mn}. В частности, для диагональной матрицы коэффициентов отсюда получим $c_{nn} = (\bar{A}_n + B_n)/(\bar{A}_n + R_n B_n)$.

Если на сфере $r = r_1$ измерены как звуковое давление, так и радиальная скорость, то коэффициенты c_{mn} можно найти и при неизвестных R_n и V_n. В этом случае, следуя работе [3], воспользуемся выражением для радиальной скорости v в виде

$$i\rho c v(r, \theta) = \sum_{n\geqslant 0} [(\bar{A}_n + B_n) h_n^{(1)\prime}(kr) + (\bar{A}_n + R_n B_n) h_n^{(2)\prime}(kr)] P_n(\cos\theta). \quad (14)$$

Из уравнений (13) и (14), учитывая соотношение $h_n^{(2)}(x) h'^{1}_n(x) - h_n^{(1)}(x) h_n^{(2)\prime}(x) = i2/x^2$ и используя ортогональность полиномов Лежандра, получим

$$\bar{A}_n + B_n = \frac{2n+1}{4} (kr_1)^2 [i p_n(r_1) h_n^{(2)\prime}(kr_1) + \rho c v_n(r_1) h_n^{(2)}(kr_1)],$$

$$\bar{A}_n + R_n B_n = -\frac{2n+1}{4} (kr_1)^2 [i p_n(r_1) h_n^{(1)\prime}(kr_1) + \rho c v_n(r_1) h_n^{(1)}(kr_1)],$$

где

$$p_n(r) = \int_0^\pi p(r, \theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta, \quad v_n(r) = \int_0^\pi v(r, \theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta.$$

Альтернативно, амплитуды сферических гармоник можно найти из измерений звукового давления на двух концентрических сферах [4].

Если антенна не обладает осевой симметрией излучения и рассеяния, то схема расчета сохраняется при соответственной нумерации сферических гармоник $\psi_q^{\pm}(r, \theta, \varphi)$, зависящих теперь также и от азимутального угла φ: $\psi_q^{+}(r, \theta, \varphi) = h_n^{(1)}(kr) P_n^{\,l}(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} l\varphi$, $\psi_q^{-}(r, \theta, \varphi) = h_n^{(2)}(kr) P_n^{\,l}(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} l\varphi$, где $P_n^{\,l}(x)$ — присоединенные полиномы Лежандра, $l = l(q)$, $n = n(q)$, каждому q соответствует единственная пара индексов l и n, l пробегает значения от 0 до n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, нумерация сферических гармоник ведется в порядке возрастания l при каждом фиксированном n и в порядке возрастания n; четным q соответствует косинус, нечетным — синус. При этом в (1), (2) и последующих формулах A_n, $\psi_n^{\pm}$, R_n, $P_n(\cos\theta)$ заменятся соответственно на A_q, $\psi_q^{\pm}(r, \theta, \varphi)$, R_q, $P_n^{\,l}(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} l\varphi$, где q соответствует паре индексов n, l; c_{mn} заменятся на $c_{q'q}$, где q' также соответствует паре индексов n', l'; формулы (8) и (12) заменятся соответственно на

$$A_q = \frac{(n-l)!}{(n+l)!} \frac{2n+1}{h_n^{(1)}(kr_1) + R_q h_n^{(2)}(kr_1)} \frac{1}{2\pi(1+\delta_l)} \times$$
$$\times \int_0^{2\pi} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} l\varphi \, d\varphi \int_0^\pi p(r, \theta, \varphi) P_n^{\,l}(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

и

$$B_q = A_q - \frac{(n-l)!}{(n+l)!} \frac{2n+1}{h_n^{(1)}(kr_1) + R_q h_n^{(2)}(kr_1)} \frac{1}{2\pi(1+\delta_l)} \times$$
$$\times \int_0^{2\pi} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} l\varphi \, d\varphi \int_0^\pi \mathscr{P}(r, \theta, \varphi) P_n^{\,l}(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta.$$

Представляет интерес вопрос об устойчивости решения по отношению к небольшим неточностям в измерениях полей. По существу этого вопроса можно заметить следующее. В окончательные формулы для нахождения коэффициентов A_n и B_n полного и дифрагированного поля входят только операции интегрирования в конечных пределах от измеряемых полей с ограниченными весовыми функциями. Такие операции могут только сгладить ошибки измерения, в отличие от операций дифференцирования или деления на малые знаменатели, здесь отсутствующих. Таким образом, устойчивость коэффициентов к малым ошибкам измерений очевидна. То же относится к искомым коэффициентам $A_n^{(0)}$, если определитель системы (7) отличен от нуля. Если бы этот определитель мог быть равным нулю, то были бы возможны собственные колебания в области между антенной и граничной сферой. При наличии хотя бы малого поглощения на границе области ($|R_n| < 1$) это невозможно. При $|R_n| \ll 1$ коэффициенты β_{mn} системы (7) заведомо малы по абсолютной величине и определитель системы близок к единице.

Благодарю А. И. Бойко и М. А. Миронова за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нефедов Н. Н.* Калибровка излучателей звука в ограниченном объеме // Вестник МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. 1981. Т. 22. № 2. С. 74—76.
2. *Газанян Э. Д., Иванян М. И.* К теории измерений характеристик антенн методом сферических гармоник // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 10. С. 1221—1225.
3. *Урусовский И. А.* Об активном гашении звука монополями, распределенными по одной поверхности // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 4. С. 585—594.
4. *Коняев С. И., Лебедев В. И., Федорюк М. В.* Факторизация звукового поля с помощью концентрических приемных поверхностей // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 5. С. 732—736.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
15.11.88

I. A. Urusovskii

ON DETERMINATION OF THE FAR-FIELD RADIATION PATTERN OF AN ACOUSTIC ANTENNA FROM THE FIELD MEASUREMENTS IN A BOUNDED VOLUME

Determination of the acoustic antenna radiation pattern from field measurements in a volume bounded by a spherical surface with know reflection coefficients of the spherical harmonics, which account the subsequent reflection and scattering of waves by the bounding sphere and antenna, is discussed. The scattering coefficients of the spherical harmonic for the antenna are calculated from field measurements for radiation with known volume velocity.