АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 1

УДК 534.2

Чишко К. А.

О СПЕКТРЕ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ – ЛЭМБА В ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ

Построены аналитические выражения для спектра распространяющихся мод Рэлея – Лэмба упругой изотропной пластины в асимптотическом пределе $k_nh\gg1$ (k_n – волновой вектор n-й моды, $2h$ – толщина пластины). Предложенное аналитическое представление фактически дает удовлетворительные аналитические аппроксимации спектра рэлей-лэмбовских возбуждений во всей области существования волновых решений для плоскопараллельной пластины.

Спектр бегущих волн Рэлея – Лэмба в изотропной плоскопараллельной пластине задан вещественными корнями уравнений [1, 2]

$$\Delta_s(k,\omega)=0,\ \Delta_a(k,\omega)=0 \tag{1}$$

для симметричных (продольных) и антисимметричных (изгибных) возбуждений соответственно. Здесь ω – частота, k – волновой вектор,

$$\Delta_s(k,\omega)=(k^2+q_t^2)^2\,\mathrm{ch}\,q_lh\,\mathrm{sh}\,q_th- -4k^2q_lq_t\,\mathrm{sh}\,q_lh\,\mathrm{ch}\,q_th, \tag{2}$$

$$\Delta_a(k,\omega)=(k^2+q_t^2)^2\,\mathrm{sh}\,q_lh\,\mathrm{ch}\,q_th- -4k^2q_lq_t\,\mathrm{ch}\,q_lh\,\mathrm{sh}\,q_th, \tag{3}$$

$q_l=\sqrt{k^2-\omega^2/c_l^2}$, $q_t=\sqrt{k^2-\omega^2/c_t^2}$, c_l и c_t – соответственно скорости продольных и поперечных звуковых волн. Уравнения (1) определяют полюса фурье-трансформант функции Грина динамической задачи теории упругости в изотропной пластине [3–5]. Для анализа вещественных корней удобно переписать (1) в виде [1]

$$\tilde\Delta_s(k,\omega)=0,\ \tilde\Delta_a(k,\omega)=0, \tag{4}$$

где

$$\tilde\Delta_s(k,\omega)=(k^2+q_t^2)^2\cos\tilde q_lh\sin\tilde q_th+ +4k^2\tilde q_l\tilde q_t\sin\tilde q_lh\cos\tilde q_th, \tag{5}$$

$$\tilde\Delta_a(k,\omega)=(k^2+q_t^2)^2\sin\tilde q_lh\cos\tilde q_th+ +4k^2\tilde q_l\tilde q_t\cos\tilde q_lh\sin\tilde q_th \tag{6}$$

и соответственно $\tilde q_l=\sqrt{\dfrac{\omega^2}{c_l^2}-k^2}$, $\tilde q_t=\sqrt{\dfrac{\omega^2}{c_t^2}-k^2}$. Представления (1)–(3) и (4)–(6) эквивалентны, однако последнее более удобно при рассмотрении лэмбовских мод, в то время как первое лучше использовать при анализе рэлеевских (основных) состояний.

В настоящей работе нас будут интересовать только вещественные корни уравнений (1) или (4) в связи с задачей построения поля звукового излучения системы дислокаций в пластине [5]. Предлагаемый здесь метод может быть применен к анализу комплексных и мнимых корней, однако обсуждение этих вопросов выходит за рамки данной статьи, и ниже под корнями уравнений (1) или (4) мы будем подразумевать только их вещественные решения.

Аналитические решения сложных трансцендентных уравнений (1), (4) в настоящее время неизвестны, и для расчетов спектра волн Рэлея –

Лэмба широко используются качественные и численные методы [1, 2]. Получаемые при этом результаты не удается непосредственно применить к задаче о звуковом излучении источников внутренних напряжений, движущихся в пластине. Для решения такой задачи необходимо аналитическое представление спектра в виде $k_n = k_n(\omega)$, по крайней мере для случая $k_n h \gg 1$. К построению такого рода асимптотик мы сейчас и переходим.

Прежде всего условимся о систематике лэмбовских мод, которые удобно классифицировать по их отношению к соответствующим частотам запирания Ω_n. Для симметричных мод $(\bar{\Delta}_s(k, \omega)=0)$ частоты запирания определены условиями [1]

$$\cos\frac{h\Omega_n^{sc}}{c_l} = 0, \quad \Omega_n^{sc} = \frac{\pi c_l}{h}(n+{}^1/_2), \quad n \geqslant 0; \tag{7}$$

$$\sin\frac{h\Omega_n^{ss}}{c_t} = 0, \quad \Omega_n^{ss} = \frac{\pi c_t}{h}n, \quad n \geqslant 1, \tag{8}$$

а для антисимметричных $(\bar{\Delta}_a(k, \omega)=0)$ –

$$\cos\frac{h\Omega_n^{ac}}{c_t} = 0, \quad \Omega_n^{ac} = \frac{\pi c_t}{h}(n+{}^1/_2), \quad n \geqslant 0, \tag{9}$$

$$\sin\frac{h\Omega_n^{as}}{c_l} = 0, \quad \Omega_n^{as} = \frac{\pi c_l}{h}n, \quad n \geqslant 1. \tag{10}$$

Нулевые (рэлеевские) моды при $k \to 0$ имеют предел $\omega \to 0$. Смысл верхних индексов, определяющих принадлежность частот запирания к одному из четырех наборов, ясен из определения (7)–(10). Аналогичным образом будем классифицировать и обозначать и ветви спектра: $k_n^{sc}(\omega)$, $k_n^{ss}(\omega)$, $k_n^{ac}(\omega)$ и $k_n^{as}(\omega)$ представляют собой лэмбовские моды, в пределе $k \to 0$ – стремящиеся к соответствующей частоте запирания. Симметричную и антисимметричную рэлеевские моды будем обозначать соответственно как $k_R^s(\omega)$ и $k_R^a(\omega)$.

Существенным для дальнейшего анализа является поведение ветвей вблизи частот запирания. Полагая $k_n \to 0$, $\omega \to \Omega_n$ в (4), получаем

$$[k_n^{sc}(\omega)]^2 \approx \frac{2\pi}{hc_l}(n+{}^1/_2)\left[\omega - \frac{\pi c_l}{h}(n+{}^1/_2)\right]\left[1 + \right.$$
$$\left. + \frac{8\gamma^3}{\pi(n+{}^1/_2)}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\gamma}(n+{}^1/_2)\right]^{-1}, \tag{11}$$

$$[k_n^{ss}(\omega)]^2 \approx \frac{2\pi n}{hc_t}\left(\omega - \frac{\pi c_t}{h}n\right)\left[1 - \frac{8\gamma}{\pi n}\operatorname{tg}(\pi\gamma n)\right]^{-1} \tag{12}$$

для симметричных лэмбовских мод, и

$$[k_n^{ac}(\omega)]^2 \approx \frac{2\pi n}{hc_l}\left(\omega - \frac{\pi c_l}{h}n\right)\left[1 - \frac{8\gamma}{\pi n}\operatorname{tg}(\pi\gamma n)\right]^{-1}, \tag{13}$$

$$[k_n^{as}(\omega)]^2 \approx \frac{2\pi}{hc_t}(n+{}^1/_2)\left[\omega - \frac{\pi c_t}{h}(n+{}^1/_2)\right]\left[+\frac{8\gamma}{\pi(n+{}^1/_2)}\operatorname{ctg}\pi\gamma(n+{}^1/_2)\right]^{-1} \tag{14}$$

для антисимметричных, причем $\gamma = c_t/c_l$. Рэлеевские моды в пределе $k \to 0$, $\omega \to 0$ имеют вид

$$[k_R^s(\omega)]^2 \approx \frac{1}{4(1-\gamma^2)}\frac{\omega^2}{c_t^2}, \tag{15}$$

$$[k_R^a(\omega)]^2 \approx \sqrt{\frac{3}{1-\gamma^2}}\frac{\omega}{2hc_t}. \tag{16}$$

Таким образом, вблизи частот запирания лэмбовские моды ведут себя как $k_n \sim \sqrt{\omega - \Omega_n}$, за исключением случаев, когда при некоторых n и γ котангенсы в знаменателях (11), (13) обращаются в $+\infty$, либо тангенсы в знаменателях (12), (14) — в $-\infty$. В этом случае в одной из ветвей (11)—(14) необходимо учитывать следующие порядки разложения. Такая ситуация может возникнуть только при строго определенных значениях параметра γ, представляющего собой характеристику среды. В этом смысле она не является закономерной, так что здесь мы не будем специально на ней останавливаться. Более существенно, что при некоторых n и γ правая часть в одном из выражений (11)—(14) может стать отрицательной. Это означает, что соответствующая мода не описывает распространяющуюся волну. Предельное поведение двух рэлеевских мод при $k \to 0$, $\omega \to 0$ различно: симметричная мода стремится к нулю линейно, $k_R^s \sim \omega$, в то время как изгибная рэлеевская мода имеет закон дисперсии $k_R^s \sim \omega^{1/2}$. Последнее обстоятельство имеет очевидный физический смысл: в статическом пределе ($\omega \to 0$) антисимметричная мода с бесконечной длиной волны переходит в трансляцию пластины как целого в направлении, перпендикулярном ее граням.

Построение асимптотик начнем с лэмбовских возбуждений. При $k_n \to \infty$ и $\omega \to \infty$ все лэмбовские ветви ведут себя как $\omega/c_t + o(n/\omega)$ [1]. Применимость такого представления ограничена: при большом, но фиксированном ω соотношение $k_n \sim \omega/c_t$ теряет смысл для достаточно больших n. Ниже будет показано, что возможно получение корректных асимптотик, свободных от этого недостатка. Будем искать закон дисперсии лэмбовской ветви в виде

$$[k_n(\omega)]^2 = \frac{1}{c_t^2}(\omega^2 - \Omega_n^2)[1 + \varphi_n(\omega)], \tag{17}$$

где $\{k_n\}$ — любой из четырех наборов лэмбовских ветвей, отвечающих набору частот запирания $\{\Omega_n\}$. Таким образом, необходимо построить четыре набора функций $\{\varphi_n(\omega)\}$, обладающих свойством $\varphi_n(\infty) = 0$. В этом случае (17) выходит на правильную асимптотику при $\omega \to \infty$ ($k_n \sim \omega/c_t$) и, что не менее важно, сохраняет правильное поведение $k_n \sim (\omega - \Omega_n)^{1/2}$ при $\omega \to \Omega_n$, если $\varphi_n(\omega) \ll 1$. Выполнение последнего условия заранее неочевидно, но мы предположим пока, что оно выполнено, и проверим, можно ли ему удовлетворить, построив определенным образом $\{\varphi_n(\omega)\}$.

Дальнейший расчет мы проведем на примере $\varphi_n^{sc}(\omega)$, для остальных ветвей приведем лишь результат, получаемый аналогичным образом. Подставив (17) в (4), разложим полученное выражение по φ_n^{sc}, ограничиваясь при этом линейным приближением. В результате находим

$$[k_n^{sc}(\omega)]^2 = \frac{1}{c_t^2}\left[\omega^2 - \left(\frac{\pi c_t}{h}\right)^2 (n + {}^1/_2)^2\right][1 + \varphi_n^{sc}(\omega)], \quad n \geqslant 0, \tag{18}$$

где

$$\varphi_n^{sc}(\omega) = P_n^{sc}(\omega)/Q_n^{sc}(\omega), \tag{19}$$

причем

$$P_n^{sc}(\omega) = \pi_1^2(\omega; \Omega_n^{sc}) \cos hq(\omega, \Omega_n^{sc}) \sin \frac{h\Omega_n^{sc}}{c_t} + \\ + 4\Omega_n^{sc} q(\omega; \Omega_n^{sc}) \sin hq(\omega; \Omega_n^{sc}) \cos \frac{h\Omega_n^{sc}}{c_t}; \tag{20}$$

$$Q_n^{sc}(\omega) = \left[\frac{4}{c_t} \varkappa_1(\omega; \Omega_n^{sc}) \cos hq(\omega; \Omega_n^{sc}) - \right. \\ \left. - \frac{h}{2c_t} \varkappa_3(\omega; \Omega_n^{sc}) \sin hq(\omega; \Omega_n^{sc})\right] \sin \frac{h\Omega_n^{sc}}{c_t} - [2\varkappa_2(\omega; \Omega_n^{sc}) \sin hq(\omega; \Omega_n^{sc}) - \\ - \frac{h\omega^4}{2c_t^2 \Omega_n^{sc}} \cos hq(\omega; \Omega_n^{sc})\Big] \cos \frac{h\Omega_n^{sc}}{c_t}. \tag{21}$$

Здесь введены функции частоты, зависящие от параметра Ω_n:

$$q(\omega;\Omega_n)=\sqrt{\frac{\Omega_n^2}{c_t^2}-\frac{\omega^2}{c^2}},\quad \frac{1}{c^2}=\frac{1}{c_t^2}-\frac{1}{c_l^2},\tag{22}$$

$$\varkappa_1(\omega;\Omega_n)=2\Omega_n^2-\omega^2,\ \pi_1(\omega;\Omega_n)=\varkappa_1^2(\omega;\Omega_n)/(\omega^2-\Omega_n^2);\tag{23}$$

$$\varkappa_2(\omega;\Omega_n)=\left(2\Omega_n^2-\frac{\omega^2-\Omega_n^2}{\Omega_n}\right)q(\omega;\Omega_n)-\Omega_n\frac{\omega^2-\Omega_n^2}{q(\omega;\Omega_n)};\tag{24}$$

$$\varkappa_3(\omega;\Omega_n)=4(\omega^2-\Omega_n^2)q(\omega;\Omega_n)+\frac{\varkappa_1^2(\omega;\Omega_n)}{c_t^2q(\omega;\Omega_n)}.\tag{25}$$

При $\omega\to\infty$ функция $\varphi_n^{sc}(\omega)$ ведет себя как

$$\varphi_n^{sc}(\omega)\approx\frac{2\pi c_l c_t}{h^2\omega^2}(n+{}^1/_2)\operatorname{tg}\frac{\pi}{\gamma}(n+{}^1/_2)\sim\frac{n+{}^1/_2}{\omega^2}\tag{26}$$

и, следовательно, с ростом частоты (18) выходит на искомую асимптотику $k_n^{sc}\sim\omega/c_t$. Вместе с тем оказывается, что в пределе $\omega\to\Omega_n^{sc}$ выражение (18) с учетом (19)–(25) в точности переходит в (11). Этот результат означает, что выражения (18)–(25) дают хорошее приближение для лэмбовской части спектра во всей области изменения переменных (k,ω). Таким образом, выражение (18) может рассматриваться как равномерная аппроксимация. В самом деле, совпадая с точным решением (4) при $\omega\to\infty$ и $\omega=\Omega_n^{sc}$, (18) качественно верно воспроизводит немонотонность групповой скорости вдоль ветви при $\Omega_n^{sc}\leqslant\omega\leqslant\Omega_n^{sc}/\sqrt{1-\gamma^2}$ и монотонное стремление этой скорости при $\omega>\Omega_n^{sc}/\sqrt{1-\gamma^2}$ к конечному пределу $c(\infty)=c_t$. Аналитические свойства представления (18) очевидны: при $\omega>\Omega_n^{sc}/\sqrt{1-\gamma^2}$ функция $q(\omega;\Omega_n^{sc})$ становится чисто мнимой и тригонометрические функции переходят в гиперболические так, что с учетом (22)–(25) выражения (20) и (21), а с ними и (19) остаются вещественными.

Для остальных ветвей лэмбовской части спектра рассмотрение производится аналогично: они также представляются в виде (17). В результате имеем

$$[k_n^{ss}(\omega)]^2=\frac{1}{c_t^2}\left[\omega^2-\left(\frac{\pi c_t}{h}n\right)^2\right][1+\varphi_n^{ss}(\omega)],\quad n\geqslant1,\tag{27}$$

где $\varphi_n^{ss}(\omega)=P_n^{ss}(\omega)/Q_n^{ss}(\omega)$, и соответственно

$$P_n^{ss}(\omega)=4\Omega_n^{ss}q(\omega;\Omega_n^{ss})\sin hq(\omega;\Omega_n^{ss});\tag{28}$$

$$Q_n^{ss}(\omega)=\frac{h\omega^4}{2c_t^2\Omega_n^{ss}}\cos hq(\omega;\Omega_n^{ss})-2\varkappa_2(\omega;\Omega_n^{ss})\sin hq(\omega;\Omega_n^{ss}).\tag{29}$$

Далее,

$$[k_n^{ac}(\omega)]^2=\frac{1}{c_t^2}\left[\omega^2-\left(\frac{\pi c_l}{h}\right)^2(n+{}^1/_2)^2\right][1+\varphi_n^{ac}(\omega)],\quad n\geqslant0,\tag{30}$$

где $\varphi_n^{ac}(\omega)=P_n^{ac}(\omega)/Q_n^{ac}(\omega)$,

$$P_n^{ac}(\omega)=4\Omega_n^{ac}q(\omega;\Omega_n^{ac})\cos hq(\omega;\Omega_n^{ac}),\tag{31}$$

$$Q_n^{ac}(\omega)=-\frac{h\omega^4}{2c_t^2\Omega_n^{ac}}\sin hq(\omega;\Omega_n^{ac})-2\varkappa_2(\omega;\Omega_n^{ac})\cos hq(\omega;\Omega_n^{ac}).\tag{32}$$

И, наконец,

$$[k_n^{as}(\omega)]^2=\frac{1}{c_t^2}\left[\omega^2-\left(\frac{\pi c_l}{h}n\right)^2\right][1+\varphi_n^{as}(\omega)],\quad n\geqslant1,\tag{33}$$

где $\varphi_n^{as}(\omega)=P_n^{as}(\omega)/Q_n^{as}(\omega)$,

$$P_n^{as}(\omega)=\frac{1}{c_t}\pi_1(\omega;\Omega_n^{as})\sin hq(\omega;\Omega_n^{as})\cos\frac{h\Omega_n^{as}}{c_t}+$$

$$+4\Omega_n^{as}q(\omega;\Omega_n^{as})\cos hq(\omega;\Omega_n^{as})\sin\frac{h\Omega_n^{as}}{c_t},\tag{34}$$

$$Q_n^{as}(\omega)=\frac{1}{2c_t}[8\varkappa_1(\omega;\Omega_n^{as})\sin hq(\omega;\Omega_n^{as})+$$

$$+h\varkappa_3(\omega;\Omega_n^{as})\cos hq(\omega;\Omega_n^{as})]\cos\frac{h\Omega_n^{as}}{c_t}-\Big[2\varkappa_2(\omega;\Omega_n^{as})\cos hq(\omega;\Omega_n^{as})+$$

$$+\frac{h\omega^4}{2c_t^2\Omega_n^{as}}\sin hq(\omega;\Omega_n^{as})\Big]\sin\frac{h\Omega_n^{as}}{c_t}. \qquad (35)$$

В пределе, когда ω стремится для каждой из ветвей (27), (30) или (33) к соответствующей частоте запирания (8)–(10), указанные выражения, как и (18), точно переходят в (12)–(14). При $\omega\to\infty$

$$\varphi_n^{ss}(\omega)\approx 8\pi^2n^2\sqrt{1-\gamma^2}\left(\frac{c_t}{h\omega}\right)^3\sim\frac{n^2}{\omega^3}. \qquad (36)$$

$$\varphi_n^{ac}(\omega)\approx 8\pi^2(n+{}^1/_2)^2\sqrt{1-\gamma^2}\left(\frac{c_t}{h\omega}\right)^3\sim\frac{(n+{}^1/_2)^2}{\omega^3}, \qquad (37)$$

$$\varphi_n^{as}(\omega)\approx-\frac{2\pi c_t c_l}{h^2\omega^2}n\operatorname{ctg}\frac{\pi n}{\gamma}\sim\frac{n}{\omega^2}. \qquad (38)$$

Формулы (26) и (36)–(38) показывают, что скорости выхода на соответствующую асимптотику при $\omega\to\infty$ различны для разных ветвей.

Для рассмотрения рэлеевских ветвей также воспользуемся изложенной выше схемой. Асимптотическое представление для симметричной рэлеевской ветви выбираем в виде

$$[k_R^s(\omega)]^2=\frac{\omega^2}{c_R^2}[1+\varphi_R^s(\omega)],\quad \varphi_R^s(\omega)\ll 1, \qquad (39)$$

где c_R – скорость рэлеевских волн. Подставив (39) в (1) и разложив полученное выражение, как это делалось выше, с точностью до членов, линейных по $\varphi_R^s(\omega)$, находим

$$\varphi_R^s(\omega)=-\frac{P_R(\omega)}{Q_R(\omega)+Q_R^s(\omega)}. \qquad (40)$$

Здесь

$$P_R(\omega)=(2-\gamma_t^2)^2\operatorname{sh}\left[\frac{h\omega}{c_R}\left(\sqrt{1-\gamma_l^2}-\sqrt{1-\gamma_t^2}\right)\right], \qquad (41)$$

$$Q_R(\omega)=\frac{h\omega}{2c_R}(2-\gamma_t^2)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\gamma_t^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-\gamma_l^2}}\right)\operatorname{ch}\left[\frac{h\omega}{c_R}\left(\sqrt{1-\gamma_l^2}-\sqrt{1-\gamma_t^2}\right)\right], \qquad (42)$$

$$Q_R^s(\omega)=\gamma_0\operatorname{sh}\left(\frac{h\omega}{c_R}\sqrt{1-\gamma_l^2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{h\omega}{c_R}\sqrt{1-\gamma_t^2}\right)-$$

$$-4(2-\gamma_t^2)\operatorname{ch}\left(\frac{h\omega}{c_R}\sqrt{1-\gamma_l^2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{h\omega}{c_R}\sqrt{1-\gamma_t^2}\right), \qquad (43)$$

причем $\gamma_l=c_R/c_l,\ \gamma_t=c_R/c_t,\ \gamma_0=(2-\gamma_t^2)^2+2\left[\sqrt{\frac{1-\gamma_t^2}{1-\gamma_l^2}}-\sqrt{\frac{1-\gamma_l^2}{1-\gamma_t^2}}\right]$. Аналогичным образом представляется антисимметричная рэлеевская ветвь

$$[k_R^a(\omega)]^2=\frac{\omega^2}{c_R^2}[1+\varphi_R^a(\omega)],\quad \varphi_R^a(\omega)\ll 1, \qquad (44)$$

где

$$\varphi_R^a(\omega)=\frac{P_R(\omega)}{Q_R(\omega)+Q_R^a(\omega)} \qquad (45)$$

и соответственно

$$Q_R^a(\omega)=\gamma_0 \operatorname{ch}\left(\frac{h\omega}{c_R}\sqrt{1-\gamma_l^2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{h\omega}{c_R}\sqrt{1-\gamma_t^2}\right)-$$

$$-4(2-\gamma_t^2)\operatorname{sh}\left(\frac{h\omega}{c_R}\sqrt{1-\gamma_l^2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{h\omega}{c_R}\sqrt{1-\gamma_t^2}\right). \tag{46}$$

Легко видеть, что $\varphi_R^s(\omega)\to 0$ и $\varphi_R^a(\omega)\to 0$ при $\omega\to\infty$, как и должно быть. При $h\omega/c_R\gg 1$ справедливы формулы

$$[k_R^s(\omega)]^2\approx\frac{\omega^2}{c_R^2}\left(1-\frac{\tilde{\gamma}c_R}{h\omega}\right). \tag{47}$$

$$[k_R^a(\omega)]^2\approx\frac{\omega^2}{c_R^2}(1+\tilde{\gamma}c_R/h\omega), \tag{48}$$

где $\tilde{\gamma}={}^1/_2(2-\gamma_t^2)^3/(\sqrt{1-\gamma_l^2}-\sqrt{1-\gamma_t^2})$. Таким образом, две рэлеевские ветви в пределе $\omega\to\infty$ стремятся с разных сторон к одной и той же асимптоте $k_R=\omega/c_R$, что согласуется с результатами численного расчета [1]. При $\omega\to 0$ в отличие от лэмбовских ветвей (39) и (44) не переходят точно в (15), (16), хотя, конечно, $k_R^s(0)=k_R^a(0)=0$. Тем не менее численный расчет [1, 2] показывает, что уже для частот ω, удовлетворяющих условию $h\omega/c_R>3$, ход рэлеевских ветвей практически совпадает с асимптотой $k_R=\omega/c_R$.

В порядке обсуждения результатов работы укажем, что полученный спектр волн Рэлея – Лэмба (18), (27), (30), (33) указывает на асимптотическую близость лэмбовской части к спектру нормальных волн сдвига в плоскопараллельной изотропной пластине [1, 6]. Это свидетельствует о том, что между двумя указанными типами возбуждений существует генетическая связь, которая, однако, не может быть проанализирована в рамках настоящей работы. Для установления такой связи необходимо привлечение достаточно тонких методов, позволяющих исследовать формирование собственных возбуждений пластины как отклика на возмущение ее импульсной внешней силой.

Нуждается в дополнительном исследовании также вопрос об аппроксимационных свойствах формул (18), (27), (30), (33): необходимо выяснить условия, при которых указанные зависимости реализуют наилучшее приближение истинного спектра. Естественным шагом в этом направлении можно считать прямое сравнение с помощью ЭВМ результатов настоящей работы с известными численными расчетами [1, 2]. Более последовательным подходом является, конечно, вычисление следующих порядков по $\varphi_n(\omega)$ в разложении (17) с оценкой их вклада в результат.

В заключение укажем одну возможность построения оптимального алгоритма численного анализа уравнений (1), (4). Стандартный подход, основанный на прямом поиске корней, сталкивается с проблемой идентификации найденной точки (k, ω) с определенной ветвью истинного спектра, для чего требуются дополнительные затраты машинного времени. Этой проблемы не возникает, если спектр строится как кусочная аппроксимация системой сплайнов достаточно высокого порядка, опирающихся на узлы упорядоченной решетки Миндлина [1]. При этом можно обеспечить сопряжение сплайнов с любой наперед заданной степенью гладкости. Реализация такого метода может не только послужить базой для создания серии быстрых алгоритмов расчета спектра, но и позволит корректно оценить точность машинных вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
2. *Меркулов Л. Г., Рохлин С. И., Зобнин О. П.* Расчет спектра волновых чисел для волн Лэмба в пластине // Дефектоскопия. 1970. № 4. С. 12–17.
3. *Харитонов А. В.* Возбуждение колебаний упругой изотропной пластины системой объемных и поверхностных сил // Акуст. журн. 1978. Т. 24. № 4. С. 602–610.
4. *Свиридов Ю. Б.* О построении динамического тензора Грина для твердого слоя //

Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 2. С. 246–254.
5. *Чишко К. А.* Динамический тензор Грина и упругие поля системы движущихся дислокационных петель в изотропной пластине // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 3. С. 527–532.
6. *Чишко К. А.* Переходное излучение звука винтовой дислокацией, выходящей на поверхность изотропной пластины // ФТТ. 1989. Т. 31. № 1. С. 223–229.

Физико-технический институт
низких температур АН УССР

Поступила в редакцию
09.11.88

K. A. Tchishko

ON THE SPECTRUM OF RAYLEIGH–LAMB WAVES IN AN ISOTROPIC ELASTIC PLATE

Analytic expressions for the spectrum of propagating Rayleigh — Lamb modes in an isotropic elastic plate in the asymptotic limit $k_n h \gg 1$ (k_n — wave number of the n^{th} mode, $2h$ — plate thickness) are constructed. The suggested analytic representation gives a sattisfactory approximation of the Rayleigh — Lamb wave spectrum for a whole region of their existence in a plane-parallel plate.