Результаты сравнительных измерений для трех частот представлены на рис. 1. Здесь по оси ординат отложена разность выходных напряжений, регистрируемых в присутствии звукового поля (или потока) и без него, а на оси абсцисс — эффективные значения колебательной скорости. Видно, что данные измерений тремя способами в пределах точности акустических измерений хорошо согласуются между собой.

Убедившись в правомочности предлагаемого метода градуировки датчика при размещении его в горле резонатора, считаем возможным использовать этот метод в широком динамическом диапазоне. Таким способом были получены амплитудно-частотные характеристики датчика термоанемометра, имеющего чувствительный элемент из платино-вольфрамовой нити диаметром 5 мкм, длиной 2,2 мм при температуре нагретой нити 240° С и окружающей среды — 20° С. Эти данные представлены на рис. 2. Видно, что с повышением уровня звукового давления (и соответственно колебательной скорости) частотная зависимость становится менее выраженной, а показания термоанемометра приближаются к соответствующим значениям при стационарном потоке.

Полученные градуировочные кривые могут быть использованы для измерения колебательной скорости в поле плоской волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Драган С. П., Лебедева И. В., Трифанов В. П.* Применение термоанемометра для исследования полей высокой интенсивности в аэроакустике // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 2. С. 260—264.
2. *Борисов С. А., Лебедева И. В.* Метод резонансных труб для градуировки датчиков колебательной скорости // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 1. С. 101—104.
3. *Лебедева И. В., Драган С. П.* Определение акустических характеристик в трубах с помощью двух микрофонов // Измер. техника. 1988. № 8. С. 52.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, физический факультет

Поступило в редакцию
13.12.88

УДК 517.95; 550.34; 534.2

Н. Я. Кирпичникова, А. П. Киселев

ДЕПОЛЯРИЗАЦИЯ УПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Рассматриваются волны Лява и Рэлея в изотропном полупространстве $z > 0$ со свободной границей при произвольной зависимости параметров Ламе $\lambda(z)$, $\mu(z)$ и плотности $\rho(z)$ от глубины z. На поверхностях разрыва материальных параметров $z = \zeta_1, \ldots, \zeta_N$ предполагается непрерывность смещений и напряжений. Колебания гармонические, множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен. Волны считаются для простоты цилиндрическими с произвольной угловой зависимостью.

В результате учета поправочных членов в поверхностном [1—3] варианте лучевого метода получены простые явные выражения для аномальных (параллельных фронту в рэлеевском случае и перпендикулярных — в лявовском) составляющих поля [1]. Рассмотрения относятся к модам с небольшими номерами.

Пусть $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{e}_z$ — орты цилиндрических координат, образующие правую тройку. Выделим быстро осциллирующую фазу и разложим амплитуду смещений $\mathbf{u}$ по обратным степеням круговой частоты, рассматриваемой в лучевом методе как большой параметр

$$\mathbf{u} = e^{i\omega r/c}\{(u + U/\omega + \ldots)\mathbf{e}_r + (v + V/\omega + \ldots)\mathbf{e}_\alpha + (w + W/\omega + \ldots)\mathbf{e}_z\}, \quad (1)$$

где c — фазовая скорость волны. Производным от амплитудных функций припишем порядки по большому параметру: $\partial/\partial x = O(1)$, $\partial/\partial y = O(1)$, $\partial/\partial z = O(\omega)$. Удобно ввести обозначение

$$D = \omega^{-1}\partial/\partial z; \quad D = O(1), \quad \omega \to \infty. \quad (2)$$

Рассмотрим цилиндрическую волну Лява, в нулевом приближении поляризованную как соответствующая плоская

$$u \equiv w \equiv 0, \quad v \not\equiv 0. \quad (3)$$

Из уравнений движения и граничных условий в главном порядке получается

$$\left(D\mu D + \rho - \frac{\mu}{c^2}\right)v = 0, \quad z > 0; \quad (4)$$

$$Dv|_{z=0} = 0, \quad [v]|_{z=\zeta_k} = [\mu Dv]|_{z=\zeta_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, N; \quad (5)$$

---

[1] Подобные вопросы затронуты в [3] в малоинтересных для приложений частных случаях.

$|v| \to 0$ при $z \to \infty$, $[\ \ ]$ означает величину скачка. Получившаяся задача на собственные значения, в которой фазовая скорость c играет роль спектрального параметра, совпадает с задачей о плоской волне Лява. Фиксируем c и соответствующую нормированную собственную функцию $\tilde{v}(z)$; тогда $v(r, \alpha, z) = A(r, \alpha)\,\tilde{v}(z)$.

Рассмотрим следующее приближение. Условие разрешимости задачи для V [1, 2] дает

$$v(r, \alpha, z) = \frac{f(\alpha)}{\sqrt{r}}\,\tilde{v}(z), \tag{6}$$

где $f(\alpha)$ — произвольная гладкая функция, имеющая смысл характеристики направленности источника.

Задача для аномальных компонент имеет вид

$$\left(D\mu D + \rho - \frac{\nu}{c^2}\right)U + \frac{i}{c}(\lambda D + D\mu)\,W = -\frac{i}{cr}(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial\alpha}v; \quad z > 0, \tag{7}$$

$$\left(D\nu D + \rho - \frac{\mu}{c^2}\right)W + \frac{i}{c}(\mu D + D\lambda)\,U = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\mu D + D\lambda)\,v; \quad z > 0; \tag{8}$$

$$\nu DW + \frac{i}{c}\lambda U + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}v = 0, \quad z = 0, \tag{9}$$

$$\mu\left(DU + \frac{i}{c}W\right) = 0, \quad z = 0, \tag{10}$$

где $\nu \equiv \lambda + 2\mu$, U, W и левые части (9) и (10) непрерывны при $z = \zeta_1, \ldots, z = \zeta_N$, и $|U| + |W| \to \infty$ при $z \to \infty$. Соответствующая однородная задача есть задача для плоской волны Рэлея. Поэтому для однозначной разрешимости (7)—(10) необходимо и достаточно, чтобы в рассматриваемом полупространстве не существовало рэлеевской волны с фазовой скоростью c. В этом предположении решение находится явно:

$$U = icr^{-3/2} f_{\alpha}'(\alpha)\,\tilde{v}(z), \quad W \equiv 0, \ \text{т. е.}$$

$$\mathbf{u} = \frac{e^{i\omega r/c}}{\sqrt{r}}\left\{f(\alpha)\,\mathbf{e}_{\alpha} + \frac{ic}{\omega r}\frac{\partial f(\alpha)}{\partial(\alpha)}\mathbf{e}_r\right\}\tilde{v}(z)\left(1 + O\left(\frac{c}{\omega r}\right)\right). \tag{11}$$

Частица совершает в цилиндрической волне Лява эллиптические горизонтальные колебания, продольная компонента которых более низкочастотна и растет с приближением к источнику.

Рассмотрение волн Рэлея

$$v \equiv 0, \quad |u| + |w| \not\equiv 0 \tag{12}$$

вполне аналогично. В нулевом порядке возникает задача для плоской рэлеевской волны; пусть $\tilde{u}(z)$ и $\tilde{w}(z)$ — ее нормированные компоненты, а c — фазовая скорость. Условие разрешимости задачи для U, W дает [1, 2]

$$u = \frac{f(\alpha)}{\sqrt{r}}\,\tilde{u}(z), \quad w = \frac{f(\alpha)}{\sqrt{r}}\,\tilde{w}(z). \tag{13}$$

Задача для аномальной составляющей V имеет вид

$$\left(D\mu D + \rho - \frac{\mu}{c^2}\right)V = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{(\lambda + \mu)\frac{i}{c}u + (\lambda D + D\mu)\,w\right\}; \quad z > 0, \tag{14}$$

$$DV + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}w = 0, \quad z = 0, \tag{15}$$

$$[V] = \left[\mu\left(DV + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}w\right)\right] = 0, \quad z = \zeta_1, \ldots, \zeta_N, \tag{16}$$

где $|V| \to 0$ при $z \to \infty$. Решение ее, в предположении, что c не совпадает ни с одной из фазовых скоростей лявовских волн, также находится явно для произвольных $\lambda(z)$, $\mu(z)$ и $\rho(z)$. В результате

$$\mathbf{u} = \frac{e^{i\omega r/c}}{\sqrt{r}}\left\{(\tilde{u}\mathbf{e}_r + \tilde{w}\mathbf{e}_z)\,f(\alpha) - \frac{ic}{\omega r}\,\tilde{u}\,\frac{\partial f}{\partial\alpha}\,\mathbf{e}_{\alpha}\right\}\left(1 + O\left(\frac{c}{\omega r}\right)\right). \tag{17}$$

Возможность возникновения вследствие дифракции низкочастотных аномальных составляющих поверхностных колебаний, продемонстрированная здесь для цилиндрических волн в слоистой среде, имеет более общий характер и должна приниматься во внимание при акустических измерениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Woodhouse J. H.* Surface waves in laterally varying layered structures // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1974. V. 37. P. 461—490.
2. *Бабич В. М., Чихаев Б. А., Яновская Т. Б.* Поверхностные волны в вертикально-неоднородном упругом полупространстве // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1976. № 4. С. 24—31.

3. *Кирпичникова Н. Я.*, *Киселев А. П.* Поляризационно-спектральные аномалии поверхностных волн в почти слоистом упругом полупространстве // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1987. Т. 165. С. 102—114.

Ленинградское отделение
Математического института
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
12.12.88

УДК 519.595

Манукян К. М.

О РАСЧЕТЕ ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ В ПЛОСКО-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Точное решение краевой задачи об определении звуковых полей в двумерных областях сложной формы связано со значительными математическими трудностями. Это приводит к необходимости использования приближенных методик [1, 2], достаточно хорошо работающих при наличии слабых градиентов вдоль направления распространения звуковых волн. В настоящей работе дана конечно-элементная формулировка уравнения звукового поля в неоднородной среде, позволяющая численно решать задачи в областях с большими градиентами как характеристик физических свойств, так и геометрических параметров рассматриваемой области.

Рассмотрим плоскую задачу в бесконечной вдоль направления распространения звуковых волн слоистой области. Область является плоскослоистой всюду, за исключением некоторой конечной области II. Для определенности положим, что источник звуковых волн находится в полубесконечной плоскослоистой области I, правая граница которой описывается отрезком прямой $x=0$. Левая граница полубесконечной области III, следующей за областью II, описывается отрезком прямой $x=L$. Поскольку области I и III имеют плоскослоистую структуру, решения в них могут быть получены методом нормальных волн [3]. Решение в существенно неоднородной области II должно удовлетворять уравнению звукового поля в неоднородной среде [4]

$$\nabla(\rho_j^{-1}(x,y)\nabla U(x,y))+\rho_j^{-1}(x,y)K_j^2(x,y)U(x,y)=0, \quad j=0,1,\dots N \tag{1}$$

с граничными условиями, стыкующими конечно-элементное решение в области II с решениями в областях I и III

$$\partial U(x,y)/\partial x=F(U) \text{ при } x=0 \tag{2}$$

и

$$\partial U(x,y)/\partial x=T(U) \text{ при } x=L, \tag{3}$$

условиями непрерывности на границах слоев:

$$U(x,H_i+0)=U(x,H_i-0), \tag{4}$$

$$\rho_{i-1}^{-1}(x,H_i+0)\,\partial U(x,H_i+0)/\partial n=\rho_i^{-1}(x,H_i-0)\,\partial U(x,H_i-0)/\partial n \tag{5}$$

и с граничными условиями вдоль линий $y=0$ и $y=H_N$

$$U(x,0)=0, \tag{6}$$

$$U(x,H_N)=0. \tag{7}$$

Здесь N – количество слоев, $\rho_i(x,y)$ – плотность в i-м слое, $K_i(x,y)=2\pi f/C_i(x,y)$, f – частота в Гц, $C_i(x,y)$ – скорость звука в точке (x,y), $y=H_i(x)$ – уравнение кривой, отделяющей слои $i-1$ и i.

Функции $F(U)$ и $T(U)$ в (2) и (3) могут быть получены по аналогии с [5] с учетом многослойности области рассмотрения

$$F(U)=-i\sum_{j=1}^{M_1}\lambda_j\psi_j(y)\int_{-H_N(0)}^{0}\rho^{-1}\psi_j(y)U\,dy\Big/\int_{-H_N(0)}^{0}\rho^{-1}\psi_j^2(y)\,dy+2i\sum_{j=1}^{M}\lambda_jA_j\psi_j, \tag{8}$$

$$T(U)=i\sum_{l=1}^{M_2}k_l\varphi_l(y)\int_{-H_N(L)}^{0}\rho^{-1}\varphi_l(y)U\,dy\Big/\int_{-H_N(L)}^{0}\rho^{-1}\varphi_l^2(y)\,dy. \tag{9}$$