

УДК 519.595

© 1990 г.

Манукян К. М.

О РАСЧЕТЕ ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ В ПЛОСКО-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Точное решение краевой задачи об определении звуковых полей в двумерных областях сложной формы связано со значительными математическими трудностями. Это приводит к необходимости использования приближенных методик [1, 2], достаточно хорошо работающих при наличии слабых градиентов вдоль направления распространения звуковых волн. В настоящей работе дана конечно-элементная формулировка уравнения звукового поля в неоднородной среде, позволяющая численно решать задачи в областях с большими градиентами как характеристик физических свойств, так и геометрических параметров рассматриваемой области.

Рассмотрим плоскую задачу в бесконечной вдоль направления распространения звуковых волн слоистой области. Область является плоскостройной всюду, за исключением некоторой конечной области II. Для определенности положим, что источник звуковых волн находится в полубесконечной плоскостройной области I, правая граница которой описывается отрезком прямой $x=0$. Левая граница полубесконечной области III, следующей за областью II, описывается отрезком прямой $x=L$. Поскольку области I и III имеют плоскостройную структуру, решения в них могут быть получены методом нормальных волн [3]. Решение в существенно неоднородной области II должно удовлетворять уравнению звукового поля в неоднородной среде [4]

$$\nabla(\rho_j^{-1}(x, y)\nabla U(x, y)) + \rho_j^{-1}(x, y)K_j^2(x, y)U(x, y) = 0, \quad (1)$$

$$j=0, 1, \dots, N$$

с граничными условиями, стыкующими конечно-элементное решение в области II с решениями в областях I и III

$$\partial U(x, y)/\partial x = F(U) \text{ при } x=0 \quad (2)$$

и

$$\partial U(x, y)/\partial x = T(U) \text{ при } x=L, \quad (3)$$

условиями непрерывности на границах слоев:

$$U(x, H_i+0) = U(x, H_i-0), \quad (4)$$

$$\rho_{i-1}^{-1}(x, H_i+0)\partial U(x, H_i+0)/\partial n = \rho_i^{-1}(x, H_i-0)\partial U(x, H_i-0)/\partial n \quad (5)$$

и с граничными условиями вдоль линий $y=0$ и $y=H_N$

$$U(x, 0) = 0, \quad (6)$$

$$U(x, H_N) = 0. \quad (7)$$

Здесь N — количество слоев, $\rho_i(x, y)$ — плотность в i -м слое, $K_i(x, y) = 2\pi f/C_i(x, y)$, f — частота в Гц, $C_i(x, y)$ — скорость звука в точке (x, y) , $y=H_i(x)$ — уравнение кривой, отделяющей слой $i-1$ и i .

Функции $F(U)$ и $T(U)$ в (2) и (3) могут быть получены по аналогии с [5] с учетом многослойности области рассмотрения

$$F(U) = -i \sum_{j=1}^{M_1} \lambda_j \psi_j(y) \int_{-H_N(0)}^0 \rho^{-1} \psi_j(y) U dy / \int_{-H_N(0)}^0 \rho^{-1} \psi_j^2(y) dy + 2i \sum_{j=1}^M \lambda_j A_j \psi_j, \quad (8)$$

$$T(U) = i \sum_{l=1}^{M_2} k_l \varphi_l(y) \int_{-H_N(L)}^0 \rho^{-1} \varphi_l(y) U dy / \int_{-H_N(L)}^0 \rho^{-1} \varphi_l^2(y) dy. \quad (9)$$

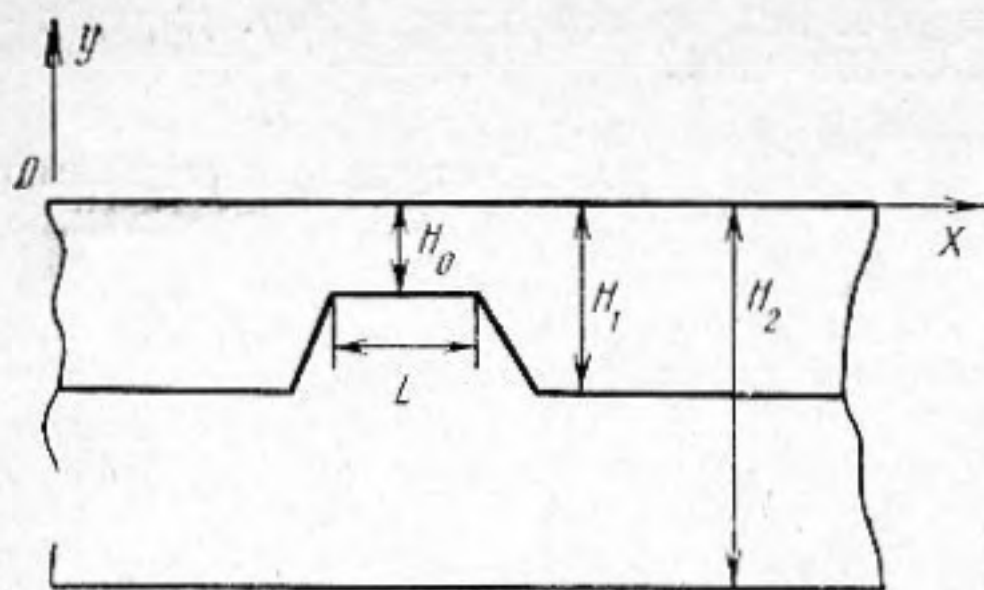


Рис. 1

Рис. 1. Расчетная модель двухслойной жидкости с границей сложной формы между слоями

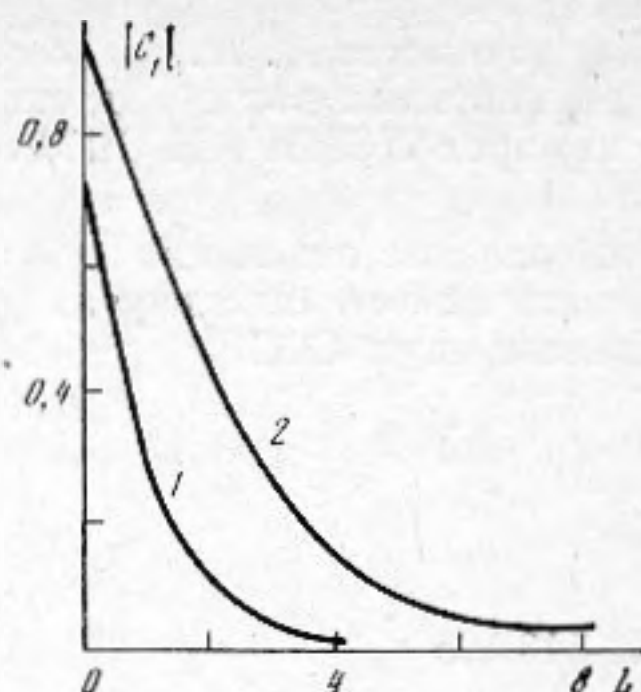


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость амплитуды проходящей от величины L : 1 - $H_0=0,6$, 2 - $H_0=1,2$

Здесь M - количество нормальных волн, приходящих из области I, M_1 и M_2 - количество отраженных ($M \leq M_1$) и проходящих нормальных волн. λ_j , $\psi_j(y)$, $j=1, \dots, M_1$ и k_l , $\varphi_l(y)$, $l=1, \dots, M_2$ - собственные значения и собственные функции, характеризующие нормальные волны в областях I и III соответственно.

Используя метод взвешенных невязок [6] и разделив область II на конечные элементы, из соотношений (1)-(9) можно получить систему конечно-элементных линейных алгебраических уравнений

$$[G]\{U\}=\{P\}, \quad (10)$$

где

$$[G]=\sum_{j=0}^N \left[\int_{S_j} \rho_j^{-1}(x, y) \nabla[N] \nabla[N]^T ds - \int_{S_j} \rho_j^{-1}(x, y) K_j^2(x, y) [N][N]^T ds + \right. \\ \left. + i \sum_{l=1}^{M_1} \lambda_l \int_{H_j(0)}^{H_{j+1}(0)} \rho_j^{-1}(x, y) \psi_l(y) [N] dy \int_{H_j(0)}^{H_{j+1}(0)} \rho_j^{-1}(x, y) \psi_l(y) [N]^T dy / \int_{H_j(0)}^{H_{j+1}(0)} \rho_j^{-1}(x, y) \cdot \right. \\ \left. \cdot \psi_l^2(y) dy - i \sum_{l=1}^{M_2} k_l \int_{H_j(L)}^{H_{j+1}(L)} \rho_j^{-1}(x, y) \varphi_l(y) [N] dy \cdot \right. \\ \left. \int_{H_{j+1}(L)}^{H_j(L)} \rho^{-1}(x, y) \varphi_l(y) [N]^T dy / \int_{H_{j+1}(L)}^{H_j(L)} \rho_j^{-1}(x, y) \varphi_l^2(y) dy \right], \quad (11)$$

$$\{P\}=2i \sum_{j=0}^N \int_{H_j(0)}^{H_{j+1}(L)} \rho_j^{-1}(x, y) [N] \sum_{l=1}^{M_1} A_l \lambda_l \psi_l(y) dy. \quad (12)$$

Здесь $[N]^T=[N_1, N_2, \dots, N_m]$, N_i - функция формы i -го узла конечного элемента [6], m - число узлов в конечном элементе.

На основе полученных формул создана программа на Фортране, реализованная на ЭВМ тип ЕС и СМ-4. Библиотека элементов программы включает треугольный, четырехугольный линейный и четырехугольный восьмиузловой изопараметрический конечные элементы. Численное решение ряда тестовых задач с использованием элементов различных типов показало, что восьмиузловые четырехугольные элементы при одной и той же точности полученного решения позволяют существенно (в несколько раз) сократить время решения задачи на ЭВМ.

Для иллюстрации некоторых возможностей разработанного программного обеспечения рассмотрим задачу о распространении первой нормальной волны единичной амплитуды вдоль оси OX в двухслойной жидкости с границей сложной формы между слоями (рис. 1). При расчетах использованы следующие числовые значения: $C_1=1000$ м/с, $C_2=4000$ м/с, $\rho_1=1$ г/см³, $\rho_2=2$ г/см³, $H_2=\pi/2$, $H_2=\pi$.

На рис. 2 представлены зависимости амплитуды проходящей волны ($|C_1|$) от величины L для двух значений минимальной толщины первого жидкого слоя (H_0).

1. Распространение волн и подводная акустика/Под ред. Келлера Д. Б. Пападаки-са Д. С. М.: Мир, 1980.
2. Завадский В. Ю. Метод сеток для волноводов. М.: Наука, 1986. 368 с.
3. Завадский В. Ю. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М.: Наука, 1972. 558 с.
4. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 338 с.
5. Rix G. J., Marin S. P. Variational methods for underwater acoustic problems // J. Comp. Phys. 1978. V. 28. № 2. P. 253-270.
6. Зенкевич О. К. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.

Поступило в редакцию
07.09.88

УДК 534

© 1990 г.!

В. И. Попков

ОЦЕНКА СИЛ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ МЕТОДОМ ВЗАИМНОСТИ ШУМОИЗЛУЧЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ ЧЕРЕЗ ПРОМЕЖУТОЧНУЮ КОНСТРУКЦИЮ

При локализации источников шума и вибраций и прогнозировании вибраций сооружений или транспортных средств необходимо знание сил, которые может развивать машина в условиях установки на фундамент с бесконечным сопротивлением.

Матрица таких сил $[Q_{i\infty}^n]$, приведенных к узлам крепления машины к присоединенным конструкциям, характеризует машину как многополюсный генератор колебаний [1]. Силы $Q_{i\infty}^n$ удается определять с контролируемой погрешностью при работе машины на амортизаторах с известным механическим сопротивлением.

По определению $Q_{i\infty}^n = \dot{q}_{i\infty}^n Z_{ia \text{ пер}}^n$, где $\dot{q}_{i\infty}^n$ — вибрация машины в n -й точке в i -м направлении, установленной на амортизации на фундамент с бесконечно большим сопротивлением, $Z_{ia \text{ пер}}^n$ — передаточное сопротивление амортизатора.

Оценка сил $Q_{i\infty}^n$ может быть выполнена при работе механизма в реальных условиях в составе установки по данным измерения вибрации механизма \dot{q}_i^n по формуле

$$Q_{i\infty}^n = \dot{q}_i^n Z_{ia \text{ пер}}^n \quad (1)$$

Ошибка такой оценки величин $Q_{i\infty}^n$ обусловлена возможным отличием $\dot{q}_{i\infty}^n$ от \dot{q}_i^n при перестановке механизма с фундамента с $Z_{\phi} = \infty$ на фундамент с конечным сопротивлением. Относительная погрешность определения $Q_{i\infty}^n$ при этом равна

$$\varepsilon_Q = \frac{Z_{ia \text{ пер}}^n}{Z_{ia \text{ пер}}^n - \Pi_i^n (Z_{i0}^n + Z_{ia}^n)},$$

где Z_{i0}^n — приведенное механическое сопротивление конструкций механизма по отношению к силам, действующим в местах крепления амортизаторов; $\Pi_i^n = \dot{q}_i^n / \dot{q}_{i\phi}^n$ — перепад вибрации на n -м амортизаторе.

Очевидно, что при $Z_0 \gg Z_a$ и перепаде $\Pi \gg 1$ вибрация механизма не зависит от характеристик фундамента и оценка $Q_{i\infty}^n$ будет точной. Максимальная ошибка оценки $Q_{i\infty}^n$ имеет место при $Z_a \gg Z_0$. Она примерно равна: $\varepsilon_Q = 1/(1 - \alpha \Pi_i^n)$, где $\alpha = Z_{ia}^n / Z_{ia \text{ пер}}^n$ — отношение входного и переходного сопротивлений амортизатора.

Однако и при соотношении $Z_a \gg Z_0$ ошибка мала. Так, на частотах до первого собственного резонанса амортизатора $Z_{ia} = Z_{ia \text{ пер}}$ и $\varepsilon_Q = 1/1 - \Pi$, т. е. $\varepsilon_Q \leq 10\%$ при $\Pi \geq 11$. После первого собственного резонанса амортизатора α сначала растет пропорционально квадрату частоты, затем имеет ряд максимумов и минимумов, но всегда остается гораздо больше единицы. Поэтому ε_Q пренебрежимо уменьшается даже при значении Π , близком к единице.

С учетом (1) звуковое давление p^k от работы k -й машины в общем звуковом поле, создаваемом через промежуточную конструкцию всеми работающими машинами установки, можно определить по формуле

$$p^k = \frac{\sum_n \sum_i \dot{q}_i^n Z_{ia \text{ пер}}^n \dot{q}_{i\phi}^n}{V_u},$$