АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 1

УДК 534.29

С. Д. Данилов, М. А. Миронов

СИЛА РАДИАЦИОННОГО ДАВЛЕНИЯ ЗВУКА НА МАЛЫЙ РАССЕИВАТЕЛЬ, ДВИЖУЩИЙСЯ В ОДНОРОДНОМ И ИЗОТРОПНОМ ПОЛЕ

Рассматривается задача о силе радиационного давления звука на малый монопольный рассеиватель, движущийся поступательно в однородном и изотропном звуковом поле.

В работе показано, что малый по сравнению с длиной звуковой волны рассеиватель тормозится при поступательном движении в однородном и изотропном акустическом поле вследствие нелинейного взаимодействия с полем. Этот эффект представляет акустический аналог известного из электродинамики эффекта торможения заряда, движущегося в электромагнитном поле ([1], с. 284]).

Известно, что на неподвижный в среднем рассеиватель, помещенный в звуковое поле, действует средняя сила, называемая силой радиационного давления (см., например, [2, 3]). В плоской бегущей волне сила радиационного давления ориентирована по направлению распространения волны, в стоячей волне, или более обще — в пространственно неоднородном поле — сила направлена по вектору, выражающемуся через линейную комбинацию градиентов плотностей потенциальной и кинетической энергией в звуковом поле. В однородном и изотропном поле, которое можно представить себе как поле некоррелированных плоских волн, равнораспределенных по всем направлениям, сила радиационного давления на рассеиватель обращается в нуль вследствие изотропии как потока, так и плотности энергии поля.

Поступательное движение рассеивателя нарушает изотропию и рассеянное поле оказывается анизотропным. Из-за этого средняя сила, действующая на монопольный рассеиватель, отлична от нуля даже для однородного и изотропного падающего поля.

Пусть скорость поступательного движения рассеивателя V мала по сравнению со скоростью звука c и при вычислениях сохраним только линейные по скорости V величины. Для упрощения расчетов в качестве рассеивателя взята малая по сравнению с длиной звуковой волны частица, отличающаяся от среды только сжимаемостью (при $V=0$ такая частица — монопольный рассеиватель).

Условимся звуковое поле в отсутствие рассеивателя называть первичным. Вычисление средней силы проведем сначала для первичного звукового поля в виде гармонической во времени плоской бегущей волны. Сила, действующая на рассеиватель в изотропном поле, получается при усреднении по направлению распространения волны.

Средняя сила, действующая на рассеиватель в идеальной среде, равна интегралу по произвольной охватывающей рассеиватель поверхности S от усредненного тензора плотности потока импульса

$$\bar{F}_i = -\oint\limits_S (\bar{p}\delta_{ik} + \overline{\rho v_i v_k})\, dS_k. \tag{1}$$

Здесь p, ρ, $\mathbf{v}$ — соответственно давление, плотность, скорость. Черта означает осреднение по времени. Система координат неподвижна относительно покоящейся в отсутствие звукового поля среды. Для расчетов воспользуемся квадратичным приближением. Представим поля скорости, возмущений давления и плотности в виде сумм: $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}''$, $p - p_0 = p' + p''$, $\rho - \rho_0 = \rho' + \rho''$. Индексом 0 здесь обозначены невозмущенные значения, т. е. значения в отсутствие звукового поля, одним штрихом обозначены величины первого порядка малости, удовлетворяющие линеаризованным уравнениям гидродинамики, двумя штрихами обозначены величины второго порядка малости, представляющие собой квадратичные по звуковому полю поправки к решениям линеаризованных уравнений.

Следуя [3], приведем выражение (1) к виду

$$\overline{F}_i = -\oint\limits_S [(-\rho_0\overline{v'^2}/2 + \rho_0\,\overline{(\partial\varphi'/\partial t)^2}/2c^2)\,\delta_{ik} + \rho_0\overline{v_i v_k}]\,dS_k, \tag{2}$$

где φ' — потенциал поля скорости первого порядка малости: $\mathbf{v}' = \nabla\varphi'$. Звуковое поле представим в виде первичного (с индексом п) и рассеянного (с индексом р) полей. Тогда сила записывается в виде суммы $\overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{F}}_{\text{рр}} + \overline{\mathbf{F}}_{\text{рп}}$, где первое слагаемое квадратично по рассеянному полю, а второе содержит произведения первичного и рассеянного полей. В случае, когда поступательное движение отсутствует, $\overline{\mathbf{F}}_{\text{рр}}$ для монопольного рассеивателя обращается в нуль. Поэтому при наличии поступательного движения со скоростью $\mathbf{V}$ слагаемое $\overline{\mathbf{F}}_{\text{рр}}$ может быть направлено только по вектору $\mathbf{V}$

$$\overline{\mathbf{F}}_{pp} = -\mathbf{e}_V\oint\limits_S [(-\rho_0\overline{v_p'^2}/2 + \rho_0\,\overline{(\partial\varphi_{\text{р}}'/\partial t)^2}/2c^2)\cos\theta_V + \rho_0\overline{v_{pr}'^2}\cos\theta_V -$$
$$- \rho_0\overline{v_{pr}'v_{p\theta_V}'}\sin\theta_V]\,dS. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{e}_V$ — единичный вектор, по вектору $\mathbf{V}$, θ_V — угол, отсчитываемый от $\mathbf{e}_V$. Следуя [3], можно показать, что

$$\overline{\mathbf{F}}_{\text{рп}} = -\rho_0\overline{\int\limits_w \mathbf{v}_{\text{п}}'\left(\Delta\varphi_p' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{\text{р}}}{\partial t^2}\right)dw}. \tag{4}$$

Интегрирование в (4) проводится по всему объему, заключенному внутри поверхности S; частица при этом заменяется монопольным источником рассеянного поля. Обозначим объемную скорость этого источника через Q.

Потенциал рассеянного поля $\varphi_{\text{р}}'$ удовлетворяет волновому уравнению с правой частью

$$\Delta\varphi_{\text{р}}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_p'}{\partial t^2} = Q = Q_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)\exp\{-i\omega_1 t\}. \tag{5}$$

В этой формуле r — радиус-вектор частицы, $\omega_1 = \omega\,(1 - (V/c)\cos\theta)$ — частота первичного поля в системе отсчета, движущейся поступательно с частицей, ω — частота первичного поля в неподвижной системе отсчета, θ — угол между волновым вектором $\mathbf{k}$ первичного звукового поля и скоростью рассеивателя $\mathbf{V}$, Q_0 — комплексная амплитуда объемной скорости, расчет которой приводится ниже.

С учетом выражения (5) для потенциала рассеянного поля сила $\overline{F}_{\text{рп}}$ (4) записывается следующим образом:

$$\overline{\mathbf{F}}_{\text{рп}} = -\frac{\rho_0}{4}(\mathbf{v}_0'Q_0^* + \mathbf{v}_0'^*Q_0). \tag{6}$$

Звездочка означает операцию комплексного сопряжения, $\mathbf{v}_0'$ — амплитуда скорости первичного поля.

Для вычисления силы $\overline{\mathbf{F}}_{pp}$ необходимо найти рассеянное поле $\varphi_{\text{р}}'$. Решение уравнения (5) имеет вид (см., например, [4], с. 52—53)

$$\varphi_{\text{р}}'(r, t) = -\frac{1}{4\pi}\frac{Q_0\exp\{-i\omega_1\tau\}}{|c^{-1}(V^2\tau - \mathbf{V}\mathbf{r}) + |\mathbf{r} - \mathbf{V}\tau||},$$

$\tau < t$ и находится из уравнения $c^{-1}\,|\,\mathbf{r} - \mathbf{V}\tau\,| + \tau - t = 0$. Считая, что $r \gg Vt$, можем ограничиться только линейными по $\mathbf{V}$ слагаемыми при вычислении τ и знаменателя в выражении для потенциала. Результат имеет вид

$$\varphi_p{}' = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{Q_0 \exp\{-i\omega_1(t - r/c - Vr/c^2 + \mathbf{V}\mathbf{r}t/cr)\}}{r - t\mathbf{V}\mathbf{r}/r}\,.$$

Отсюда находим, что

$$v_{\text{p}r}' = \frac{\partial \varphi_{\text{p}}{}'}{\partial r} = \left[i\omega_1\left(\frac{1}{c} + \frac{V\cos\theta_V}{c^2}\right) - \frac{1}{r - tV\cos\theta_V}\right]\varphi_{\text{p}}{}',$$

$$v_{\text{p}\theta_V}' = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi_{\text{p}}{}'}{\partial\theta_V} = \left[i\omega_1\left(-\frac{Vr}{c^2} + \frac{Vt}{c}\right)\sin\theta_V - \frac{tV\sin\theta_V}{r - tV\cos\theta_V}\right]\frac{\varphi_{\text{p}}{}'}{r}\,.$$

Подставляя в формулу (3) выражения для рассеянных полей с точностью до линейных по $\mathbf{V}$ величин и выполняя интегрирование по углу θ_V, для $\overline{\mathbf{F}}_{\text{pp}}$ найдем

$$\overline{\mathbf{E}}_{\text{pp}} = -\,\mathbf{e}_V\,\frac{Q_0 Q_0{}^*}{6\pi}\,\frac{\omega_1{}^2\rho_0}{c^2}\,\frac{V}{c}\,. \tag{7}$$

Слагаемые, не содержащие $\mathbf{V}$ в качестве сомножителя, исчезают, как и должно быть, при интегрировании по углу Q_V. В последней формуле частоту ω_1 можно заменить на ω, так как учет различия между этими частотами даст поправку, квадратичную по $\mathbf{V}$.

Для дальнейших расчетов следует найти амплитуду объемной скорости монополя Q_0. Поверхность частицы радиуса a находится в поле давления $(p_0{}' - i\omega\rho_0 Q_0\,(4\pi a)^{-1}\exp(ika))\exp(-i\omega_1 t)$, $k = \omega/c$, $p_0{}'$ — амплитуда давления в первичном поле. Это выражение для давления является приближенным и не учитывает непостоянство давления первичного поля в пределах частицы. Соответствующая этому добавка, однако, не меняет фазу давления и поэтому здесь не учитывается. Отклонение фазы давления на поверхности частицы от фазы $p_{\text{п}}{}'$ целиком связано с рассеянным полем, которое учтено точно. Разность между изменением объема частицы и среды, продифференцированная по времени, равна объемной скорости. Отсюда получается уравнение для Q_0: $-i\omega_1\,(p_0{}' - i\omega\rho_0\,(4\pi a)^{-1}Q_0\exp(ika))(\beta - \beta_1)\,\pi a^3\,(4/3) = Q_0$, решая которое приближенно находим

$$Q_0 = -\,i\omega_1 p_0{}'\,\frac{4\pi a^3}{3}\,\beta\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta}\right)\left[1 - i\,\frac{\omega_1}{\omega}\,\frac{(ka)^3}{3}\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta}\right)\right]. \tag{8}$$

В этих формулах β и β_1 — соответственно адиабатические сжимаемости среды и материала частицы. Отметим, что обычно при вычислении Q_0 ограничиваются главным по ka слагаемым (см., например, [5]). Однако для расчета средней силы существенна именно малая действительная добавка (второе слагаемое в квадратных скобках в (8)), изменяющая фазу Q_0 (более подробно о роли фазовых соотношений в формировании силы радиационного давления см. [6]). Подставляя (8) в формулу (6), находим

$$\overline{\mathbf{F}}_{\text{рп}} = \mathbf{e}_k E\left(1 - \frac{V}{c}\cos\theta\right)^2 \frac{4\pi}{9}\,a^2 (ka)^4 \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta}\right)^2, \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{k}/k,$$

$E = p_0{}'^2/(2\rho_0 c^2) = v_0\rho_0{}'^2/2$ — плотность энергии в первичном поле. В отличие от слагаемого $\overline{\mathbf{F}}_{\text{pp}}$ (6), $\overline{\mathbf{F}}_{\text{рп}}$ не обращается в нуль при $\mathbf{V} = 0$.

Выполним усреднение силы $\mathbf{F}$ по углам θ, считая, что первичное поле состоит из некоррелированных и приходящих равномерно со всех углов плоских волн. Для этого умножим полученные выражения для $\overline{\mathbf{F}}_{\text{pp}}$ и $\overline{\mathbf{F}}_{\text{рп}}$ на $d\Omega/4\pi$, где $d\Omega$ — элемент телесного угла и проведем интегрирование по телесному углу. Величина $\overline{\mathbf{F}}_{\text{pp}}$ в пределах точности расчетов не зависит от угла θ и поэтому при усреднении не изменится. Усредненное по углам значение $\overline{\mathbf{F}}_{\text{рп}}$ есть

$$\langle \mathbf{F}_{\text{рп}} \rangle = -\,\frac{1}{3}\,\frac{\mathbf{V}}{c}\,\frac{4\pi}{9}\,a^2 (ka)^4 E\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta}\right)^2.$$

Угловые скобки означают усреднение по углам. Слагаемое, не зависящее от $\mathbf{V}$, исчезает, поскольку $\int \mathbf{e}_k d\Omega = 0$. Складывая $\langle\overline{\mathbf{F}}_{\text{pp}}\rangle$ и $\langle\overline{\mathbf{F}}_{\text{рп}}\rangle$, получаем

$$\langle\overline{\mathbf{F}}\rangle = 5\,\langle\overline{\mathbf{F}}_{\text{рп}}\rangle = -\frac{5}{3}\frac{\mathbf{V}}{c}\frac{4\pi a^2}{9}(ka)^4\left(1-\frac{\beta_1}{\beta}\right)^2 E,$$

или с учетом того, что $\sigma = 4\pi a^2\,(ka)^4\,(1-\beta_1/\beta)^2/9$ — сечение рассеяния частицы — монопольного рассеивателя [5]

$$\langle\overline{\mathbf{F}}\rangle = -\frac{5}{3}\frac{\mathbf{V}}{c}\sigma E. \tag{9}$$

В соответствии с (9) сила, действующая на движущийся в изотропном однородном поле рассеиватель, является линейной по скорости силой трения. Коэффициент трения пропорционален сечению рассеяния σ, плотности энергии E поля и обратно пропорционален скорости звука. Трение приводит к передаче энергии полю, причем передаваемая мощность I равна

$$I = -\langle\overline{\mathbf{F}}\rangle\,\mathbf{V} = |\,\mathbf{V}\,|^2\,\frac{5}{3}\frac{\sigma E}{c}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1967.
2. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966.
3. *Горьков Л. П.* О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140. № 1. С. 88—91.
4. *Голдстейн М. Е.* Аэроакустика. М.: Машиностроение, 1981.
5. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
6. *Данилов С. Д., Миронов М. А.* О силе радиационного давления, действующей на малую частицу в звуковом поле // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 6. С. 467—473.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Институт физики атмосферы
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
05.02.89

S. D. Danilov, M. A. Mironov

ACOUSTIC RADIATION PRESSURE FORCE ON A SMALL SCATTERER MOVING IN HOMOGENEOUS ISOTROPIC FIELD

The problem of acoustic radiation pressure force on a small monopole scatterer moving progressively in homogeneous isotropic sound field is considered.