

УДК 534.222:533.951

© 1990 г.

С. В. Корсунский

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ
КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

Основные результаты нелинейной теории звуковых пучков обобщены на случай электропроводящих сред, находящихся в магнитном поле. В квазиоптическом приближении получено нелинейное уравнение, описывающее распространение ограниченных акустических возмущений с учетом эффектов вязкости, дифракции и МГД-взаимодействия. В рамках такой модели рассматриваются некоторые задачи эволюции гармонических волн и анализируется влияние магнитогидродинамических эффектов на их характеристики.

Проблема нелинейного распространения звуковых пучков в проводящих жидкостях, подверженных воздействию магнитного поля, представляет существенный интерес при разработке акустических методов диагностики плазмы, жидких металлов и других агрессивных сред. Теория звуковых пучков применительно к непроводящим средам является в настоящее время сформировавшейся и хорошо изученной областью нелинейной акустики [1—3]. Центральное место в этой теории занимает нелинейное уравнение Хохлова — Заболотской — Кузнецова (ХЗК), для которого получено большое количество приближенных аналитических и численных решений [1—5]. Распространение простых волн конечной амплитуды в электропроводящей слабодиссипативной среде рассматривалось в работе [6], построение линейных волновых моделей магнитной гидродинамики в приближениях слабой и сильной проводимости жидкости анализировалось в [7]. В настоящей работе на основе уравнений магнитной гидродинамики изотропной вязкой сжимаемой жидкости рассматривается распространение акустических пучков в нелинейных электропроводящих средах при воздействии постоянного магнитного поля.

Будем исходить из системы МГД-уравнений, которая записывается в виде [7—9]

$$\rho(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla P + \mu(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (1)$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \mathbf{H} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}), \quad (2)$$

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3)$$

$$P = P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma + k \left(\frac{1}{c_p} - \frac{1}{c_v}\right) \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4)$$

Здесь μ — магнитная проницаемость среды, σ — ее электропроводность, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля; обозначения для гидродинамических величин являются традиционными. Отметим, что уравнения (1), (2) записаны для электрически- и магнитоизотропной жидкости без учета токов смещения Максвелла и эффекта Холла. Уравнение состояния (4) приближенно учитывает диссипацию в среде за счет теплопроводности и справедливо для случая, когда затухание волны мало на расстояниях порядка ее длины. Предполагая в дальнейшем, что движение жидкости является безвихревым ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$) и подставляя (4) в (1), получаем

$$\rho(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -c_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} \nabla \rho + \mu(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} + b \Delta \mathbf{v}, \quad (5)$$

где

$$c_0^2 = \gamma P_0 / \rho_0, \quad b = \xi + \frac{4}{3} \eta - k \left(\frac{1}{c_p} - \frac{1}{c_v} \right).$$

Представим функции v , ρ , \mathbf{H} в виде суммы невозмущенной и возмущенной составляющих: $v = V_0 + v'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$ и положим $\mathbf{H}_0 = \text{const}$, $V_0 = 0$. Тогда из уравнений (5), (2), (3) с точностью до величин второго порядка малости получаем (штрихи опускаются)

$$v_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v + \rho v_t = -\nabla \rho - \beta \nabla \rho^2 + v \Delta v + P_H (\nabla \times \mathbf{h}) \times \mathbf{H}_0, \quad (6)$$

$$h_t = \frac{1}{R_m} \Delta h + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0), \quad (7)$$

$$\rho_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (8)$$

В уравнениях (6)–(8) введены безразмерные переменные по формулам $\rho^* = \rho / \rho_0$, $\mathbf{H}_0^* = \mathbf{H}_0 / H_0$, $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} / L$, $t^* = t c_0 / L$, $\mathbf{h} = \mathbf{h} / H_0$ и обозначено $\beta = (\gamma - 1) / 2$, $v = b / c_0 L$, $P_H = \mu H_0^2 / \rho_0 c_0^2$, $R_m = \mu \sigma c_0 L$, где L — характерный масштаб плановых координат.

Вывод уравнения для звуковых пучков основан на применении метода медленно меняющегося профиля, сущность которого заключается в том, что решения уравнений (6)–(8) представляются в виде

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}(\varepsilon x, \sqrt{\varepsilon} y, \sqrt{\varepsilon} z, \tau = t - x), \quad (9)$$

где $\mathbf{G} = (u, v, w, \rho, \mathbf{h})$ — вектор искомых функций, ε — малый параметр, связанный с амплитудой возмущений. Кроме того, предполагается, что $\rho, u, \mathbf{h} \sim \varepsilon$, $v, w \sim \varepsilon \sqrt{\varepsilon}$, $P_H, v \sim \varepsilon$. Учитывая сделанные предположения и представляя искомые функции в виде разложений по степеням ε : $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \varepsilon \mathbf{G}_1 + \dots$, из (6)–(8) получаем определяющие уравнения для величин нулевого и первого приближений, которые приводятся к связанной разрешающей системе уравнений относительно ρ_0, h_{20}, h_{30} (нулевой индекс для простоты записи опускаем):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\rho_x - (\beta + 1) \rho \rho_\tau - \frac{v}{2} \rho_{\tau\tau} \right) = \frac{1}{2} \Delta_\perp \rho + \frac{P_H}{2} (H_{02} h_{2\tau\tau} + H_{03} h_{3\tau\tau}), \quad (10)$$

$$h_{2\tau\tau} = R_m (h_{2\tau} - H_{02} \rho_\tau), \quad h_{3\tau\tau} = R_m (h_{3\tau} - H_{03} \rho_\tau). \quad (11)$$

Здесь Δ_\perp — лапласиан по поперечным координатам (y, z) , H_{02}, H_{03} — компоненты магнитного поля \mathbf{H}_0 по осям Oy, Oz соответственно. При $P_H = 0$ из (10) следует хорошо известное уравнение ХЗК [1–3]. Система уравнений (10), (11) может быть сведена к одному уравнению типа ХЗК в двух предельных случаях, связанных с величиной магнитного числа Рейнольдса R_m . При $R_m \gg 1$ (приближение идеальной проводимости) из (11) имеем $h_i \simeq H_{0i} \left(\rho + \frac{1}{R_m} \rho_\tau \right)$, $i = 2, 3$ и, таким образом, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\rho_x - c_H \rho_\tau - (\beta + 1) \rho \rho_\tau - \frac{(v + v_H)}{2} \rho_{\tau\tau} \right) = \frac{1}{2} \Delta_\perp \rho, \quad (12)$$

где $c_H = P_H (H_{02}^2 + H_{03}^2) / 2$, $v_H = 2c_H / R_m$. Отсюда видно, что в сильно проводящей среде наличие магнитного поля приводит к увеличению скорости распространения возмущений и дополнительной диссипации волн за счет эффектов МГД-взаимодействия.

Пренебрегая дифракцией в пучке, из (12) получаем уравнение Бюргера, описывающее одномерное распространение волн конечной амплитуды в слабодиссипативной среде. Влияние МГД-эффектов на структуру простых волн в этом приближении исследовалось в [6]. При $R_m \ll 1$ (слабопроводящая жидкость) система (11) приводится с точностью до величин порядка $O(R_m^2)$, к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\rho_x - (\beta + 1) \rho \rho_\tau - \frac{v}{2} \rho_{\tau\tau} + S \rho \right) = \frac{1}{2} \Delta_\perp \rho, \quad (13)$$

где $S = P_H R_m (H_{02}^2 + H_{03}^2)/2$ — приведенное число Стюарта (параметр МГД-взаимодействия). В дальнейшем конкретные задачи будут рассматриваться в рамках модели (13).

Уравнение для простых волн в слабопроводящей среде следует из (13), если пренебречь дифракцией в пучке и диссипацией за счет вязкости и теплопроводности. При таких предположениях имеем

$$\varphi_x - \varphi\varphi_\tau + S\varphi = 0, \quad (14)$$

где $\varphi = \rho(1 + \beta)$. Общее решение уравнения (14) записывается в виде

$$\varphi = e^{-Sx} f(\tau + S^{-1}(e^{Sx} - 1)\varphi), \quad (15)$$

где f — произвольная функция. Далее, пусть на границе среды задано гармоническое возмущение единичной амплитуды $\varphi|_{x=0} = \sin \tau$. Тогда, представляя решение (15) в виде Фурье, получаем

$$\varphi = 2e^{-Sx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(n\theta(S, x))}{n\theta(S, x)} \sin n\tau, \quad (16)$$

$$\theta(S, x) = (1 - e^{-Sx})/S.$$

Соотношение (16) есть ряд Бесселя—Фубини [1], описывающий спектр гармонического возмущения в нелинейной электропроводящей среде.

Анализ решения (16) показывает, что вследствие нелинейного искажения волны исходный синусоидальный профиль трансформируется на расстоянии $\theta \simeq 1$ в разрывную волну почти пилообразной формы [1—3]. В непроводящей среде положение разрыва соответствует точке $x = 1$. При $S \neq 0$ из (16) находим, что положение разрыва определяется точкой $x = -\ln(1 - S)/S$ и, таким образом, в проводящей жидкости при $S \geq 1$ разрыв не образуется. Этот факт объясняется тем, что диссипация в волне за счет электромагнитных эффектов полностью компенсирует ее нелинейные искажения. Из (16) также следует, что влияние электропроводности проявляется в уменьшении амплитуды волны по экспоненциальному закону.

Задача об эволюции гармонического возмущения в среде с вязкими диссипативными потерями сводится к решению возмущенного уравнения Бюргерса

$$\varphi_x - \varphi\varphi_\tau - \frac{\nu}{2} \varphi_{\tau\tau} + S\varphi = 0 \quad (17)$$

с граничным условием $\varphi|_{x=0} = \varepsilon \sin \omega\tau$. Построение точного решения уравнения (17) не представляется возможным, так как при $S \neq 0$ оно не допускает редукции к линейному уравнению. Поэтому ограничимся здесь анализом его асимптотического решения.

Представим искомую функцию φ в виде разложения

$$\varphi = \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \dots, \quad (18)$$

где $\varepsilon \ll 1$. Подставляя (18) в (17), получаем в первом и втором приближениях

$$\varphi_{1x} - \frac{\nu}{2} \varphi_{1\tau\tau} + S\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1|_{x=0} = \sin \omega\tau, \quad (19)$$

$$\varphi_{2x} - \frac{\nu}{2} \varphi_{2\tau\tau} + S\varphi_2 = \varphi_1\varphi_{1\tau}, \quad \varphi_2|_{x=0} = 0. \quad (20)$$

Решения задач Коши (19), (20) не представляет сложности. Находим

$$\varphi_1 = A_1 \sin \omega\tau, \quad \varphi_2 = A_2 \sin 2\omega\tau, \quad (21)$$

$$A_1 = e^{-(S+\omega^2\nu/2)x},$$

$$A_2 = \frac{\omega}{2(\omega^2\nu - S)} e^{-(2S+\omega^2\nu)x} (1 - e^{-(\omega^2\nu - S)x}). \quad (22)$$

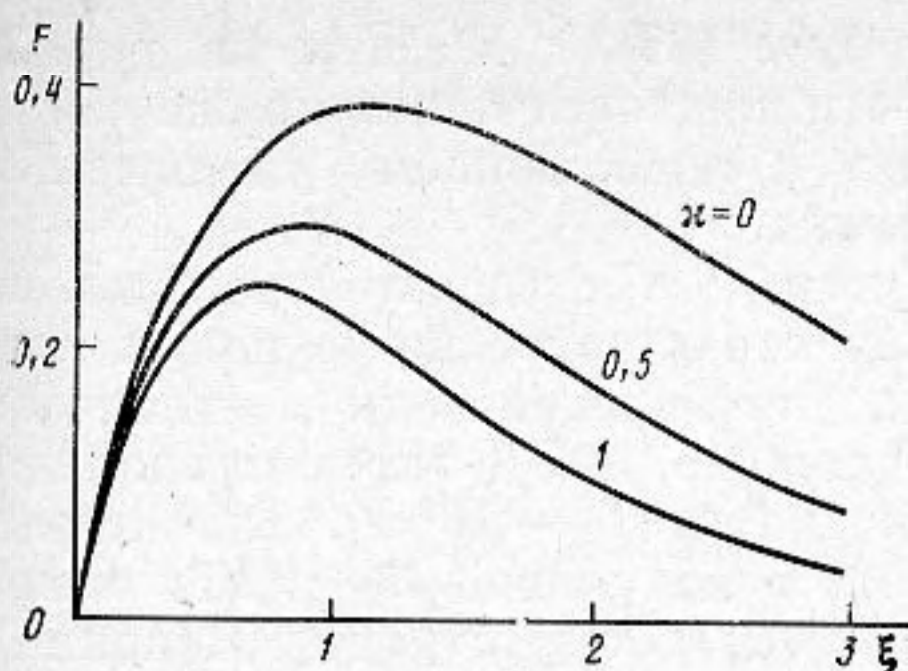


Рис. 1. Динамика генерации второй гармоники при различных κ

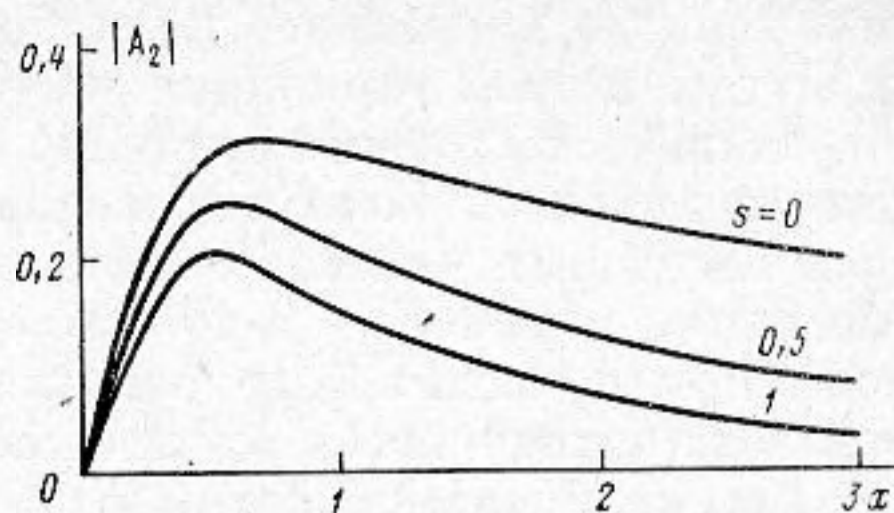


Рис. 2. Изменение амплитуды второй гармоники на оси пучка

Отношение амплитуды второй гармоники к амплитуде первой выражается формулой

$$F = e^{-\frac{(2\kappa+1)\xi}{2}} \frac{1 - e^{-\xi(1-\kappa)}}{1 - \kappa^2} \quad (23)$$

где $F = 2\omega v A_2/A_1$, $\kappa = S/\omega^2 v$, $\xi = \omega^2 v x$.

Анализ функции (23) показывает, что ее максимум достигается в точке $\xi_{\max} = (\kappa - 1)^{-1} \ln((1 + 2\kappa)/3)$ и при увеличении κ сдвигается влево. График функции (23) для различных κ изображен на рис. 1. Видно, что наличие электропроводности приводит к уменьшению амплитуды второй гармоники и смещению ее максимума.

Проанализируем теперь распространение осесимметричного гауссовского пучка в электропроводящей среде. Постановка задачи сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\varphi_x - \varphi \varphi_\tau + S\varphi) = \frac{1}{2} \Delta_\perp \varphi, \quad (24)$$

где $\Delta_\perp = r^{-1} \partial/\partial r (r \partial/\partial r)$, с граничным условием $\varphi|_{x=0} = \varepsilon e^{-r^2} \sin \tau$. Решение уравнения (24) будем искать, как и в предыдущей задаче, в виде разложения $\varphi = \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots$. Получаем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\varphi_{1x} + S\varphi_1) = \frac{1}{2} \left(\varphi_{1rr} + \frac{1}{r} \varphi_{1r} \right), \quad \varphi_1|_{x=0} = e^{-r^2} \sin \tau, \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\varphi_{2x} + S\varphi_2) - \frac{1}{2} \left(\varphi_{2rr} + \frac{1}{r} \varphi_{2r} \right) = \frac{1}{2} (\varphi_1^2)_{\tau\tau}, \quad \varphi_2|_{x=0} = 0. \quad (26)$$

Решения задач (25), (26) находятся с помощью интегрального преобразования Ханкеля и записываются в виде

$$\varphi_1 = e^{-Sx+i\tau} \frac{e^{-r^2/(1-2ix)}}{1-2ix}, \quad (27)$$

$$\varphi_2 = e^{-Sx+Si/2} \frac{e^{-2r^2/(1-2ix)}}{2(1-2ix)} \cdot e^{2i\tau} \cdot \left(E_i \left(-\frac{Si}{2} \right) - E_i \left(-\frac{Si}{2} \cdot (1-2ix) \right) \right), \quad (28)$$

где E_i — интегральная показательная функция. При $S = 0$ из (27), (28) следуют известные выражения для функций первого и второго приближений [1, 3]. На оси пучка ($r = 0$) амплитуда второй гармоники определяется выражением

$$A_2 = \frac{e^{-Sx+Si/2}}{2(1-2ix)} \left(E_i \left(-\frac{Si}{2} \right) - E_i \left(-\frac{Si}{2} \cdot (1-2ix) \right) \right) \quad (29)$$

Решения (27), (28) получены без учета эффектов вязкой диссипации. Известно, что в этом случае и в отсутствие электропроводности нелинейные искажения профиля волны приводят к формированию разрыва [1]. В проводящей среде разрыв наступает при условии $S < 1$, а при $S > 1$ нелинейные эффекты полностью компенсируются эффектами МГД-взаимо-

действия. Результаты расчетов по формуле (29) приведены на рис. 2. Видно, что увеличение электропроводности жидкости или напряженности приложенного магнитного поля приводит к существенному уменьшению амплитуды второй гармоники на оси пучка.

В заключение оценим величину параметра S и, следовательно, степень влияния эффектов электропроводности на характеристики звуковых пучков в некоторых реальных средах. Так, для морской воды в магнитном поле Земли имеем $S \sim 3 \cdot 10^{-4}$ и, следовательно, МГД-эффекты проявляются в крупномасштабных движениях жидкости ($L \sim 10^3$ м). Для жидких металлов, находящихся в магнитном поле с индукцией $B \sim 1$ Тл и при $L \sim 1$ м, величина параметра S колеблется от 0,05 (ртуть) до 5,6 (калий), в ионизированном газе число Стюарта может достигать значений порядка 10 [8]. В этих случаях пондеромоторные силы оказывают определяющее воздействие на характеристики пучка наряду с эффектами дифракции, вязкости и нелинейности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
2. Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И. Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981. 212 с.
3. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982. 176 с.
4. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А., Хохлов Р. В. Распространение звуковых пучков конечной амплитуды в диссипативной среде // Акуст. журн. 1978. Т. 24. № 4. С. 473—479.
5. Руденко О. В. Некоторые точные решения уравнений Заболотской — Хохлова // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 2. С. 311—312.
6. Солуян С. И., Хохлов Р. В. К теории простых магнитогидродинамических волн конечной амплитуды в диссипативной среде // ЖЭТФ, 1961. Т. 41. № 2 (8). С. 534—543.
7. Селезов И. Т., Селезова Л. В. Волны в магнитогидроупругих средах. Киев: Наук. думка, 1975. 163 с.
8. Чжен Ф. Введение в физику плазмы. М.: Мир, 1987. 398 с.
9. Селезов И. Т., Корсунский С. В. Точное решение задачи о распространении неустановившихся цилиндрических волн в электропроводящей среде // Докл. АН УССР. Сер. А. 1988. № 3. С. 46—48.

Институт гидромеханики
Академии наук УССР

Поступила в редакцию
15.07.88

S. V. Korsunskii

PROPAGATION OF LARGE AMPLITUDE ACOUSTIC BEAMS THROUGH ELECTRICALLY CONDUCTING MEDIUM

Main results of nonlinear theory of acoustic beams are generalized on the case of electrically conducting medium placed in a magnetic field. In quasi — optic approximation nonlinear equation, which describes the propagation of bounded acoustic disturbances taking into account viscosity, diffraction and MHD — interaction effects, is derived. Some harmonic waves evolution problems are examined and the influence of MHD — effects on parameters of acoustic waves is investigated.