Том 36 1990 Вып. 1

УДК 534.2 : 519.6

Н. К. Вдовичева, И. А. Окомелькова, И. А. Шерешевский

О ЗВУКОВОМ ПОЛЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ С ТЕЧЕНИЕМ

На основе формального применения принципа предельной амплитуды выводится интегральное представление для поля точечного гармонического источника в слоистой среде с течением. Затем в полученном интегральном представлении выделяется вклад нормальных волн и исследуется его асимптотика при больших горизонтальных расстояниях.

Распространение звука в среде с течением в последнее время привлекает все большее внимание [1, 2]. Наличие течений в океане оказывает существенное влияние на распространение звуковых волн и приводит не только к количественным, но и к качественным изменениям в структуре звукового поля по сравнению с неподвижной средой. Учет движения среды необходим и во многих практических задачах [3]. В настоящей работе изучается поле точечного гармонического источника в слоистой среде, возмущенной плоскопараллельным течением. В работе [4] с помощью принципа предельной амплитуды получено интегральное представление поля такого источника в неподвижной слоистой среде. Ниже будет формально использован принцип предельной амплитуды для движущейся среды, а затем в полученном интегральном представлении будет выделен вклад нормальных волн и исследована его асимптотика при больших горизонтальных расстояниях. Заметим, что для вывода этих формул необходимо было исследовать структуру спектра нормальных волн в этой ситуации. Этот спектр существенно отличается от спектра нормальных волн в слоистой среде без течения. В частности, важной особенностью является зависимость числа нормальных волн от направления. Полученные формулы могут быть положены в основу алгоритма численного расчета полей в слоистой среде с плоскопараллельным течением. При скорости течения, равной нулю, эти представления переходят в известные формулы для нормальных волн в слоистой среде без течения [5].

Распространение звука в неоднородной среде с течением приближенно описывается волновым уравнением [3]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v},\nabla)\right)^2\varphi=c^2(\mathbf{x})\,\Delta\varphi+f(t,\mathbf{x}),\tag{1}$$

$$\varphi(0,\mathbf{x})=\varphi_0(\mathbf{x}),\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,\mathbf{x})=\varphi_1(\mathbf{x}).$$

где $\varphi(t,\mathbf{x})$ — волновой потенциал, $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ — скорость течения, $c(\mathbf{x})$ — скорость звука, $f(t,\mathbf{x})$ — функция, описывающая источник, ∇ — градиент, $\mathbf{x}=(x,\ y,\ z)$, $\Delta=(\partial^2/\partial x^2)+(\partial^2/\partial y^2)+(\partial^2/\partial z^2)$.

Уравнение (1) будем рассматривать в полупространстве $z>0$, при этом краевые условия для φ имеют вид $\varphi(t,\ x,\ y,\ 0)=0$. Рассмотрим случай, когда среда слоистая ($c(\mathbf{x})=c(z)$), а течение плоскопараллельное, т. е. $\mathbf{v}(\mathbf{x})=v(z)=(v_x(z),\ v_y(z),\ 0)$. Будем считать, что при $z\geqslant H$ скорость звука в среде постоянна и равна c_L, а $\mathbf{v}(z)=0$. Для простоты изложения положим плотность среды постоянной и равной единице. В этом случае решение $\varphi(t,\mathbf{x})$ уравнения (1) непрерывно вместе с первыми производными по $\mathbf{x}$ вне источников, если $\mathbf{v}(z)$ — непрерывная функция. Введем гильбертово пространство $\mathscr{H}$, состоящее из вектор-функций $\mathbf{u}=(u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3)$, $u_j\in\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^3)$, $(u,u')=\sum_j(u_j,u_j')$, и рассмотрим в $\mathscr{H}$ оператор:

$$\hat{A}=\begin{Vmatrix} -2i(\mathbf{v},\nabla) & -i\left(c(z)\frac{\partial}{\partial x}-\right. & -i\left(c(z)\frac{\partial}{\partial y}-\right. & -ic(z)\frac{\partial}{\partial z} \\ & \left.-v_x(z)(\mathbf{v},\nabla)/c(z)\right) & \left.-v_y(z)(\mathbf{v},\nabla)/c(z)\right) & \\ -i\frac{\partial}{\partial x}c(z) & 0 & 0 & 0 \\ -i\frac{\partial}{\partial y}c(z) & 0 & 0 & 0 \\ -i\frac{\partial}{\partial z}c(z) & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (2)$$

Уравнение (1) с помощью оператора $\hat{A}$ можно записать в виде:

$$-i\frac{\partial\mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial t}=\hat{A}\mathbf{u}(t,\mathbf{x})+\mathbf{F}(t,\mathbf{x}), \qquad (3)$$

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x})=\mathbf{u}(0,\mathbf{x})=\left(\varphi_1(\mathbf{x}),\ \frac{\partial\varphi_0(\mathbf{x})}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi_0(\mathbf{x})}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi_0(\mathbf{x})}{\partial z}\right),$$

$$u_0(t,x,y,0)=u_1(t,x,y,0)=u_2(t,x,y,0)=0,$$

где

$$u_0=\partial\varphi/\partial t,\ u_1=\partial\varphi/\partial x,\ u_2=\partial\varphi/\partial y,\ u_3=\partial\varphi/\partial z,\ \text{а}\ \mathbf{F}(t,\mathbf{x})=(f(t,\mathbf{x}),\ 0,\ 0,\ 0).$$

Пусть

$$f(t,\mathbf{x})=e^{i(\omega+i\varepsilon)t}f_0(\mathbf{x}),\quad \varepsilon,\ \omega>0, \qquad (4)$$

а $\mathbf{u}_\varepsilon(t,\mathbf{x})$ — решение задачи (3) с правой частью (4). Формально $\mathbf{u}_\varepsilon(t,\mathbf{x})$ может быть записано в следующем виде:

$$\mathbf{u}_\varepsilon(t,\mathbf{x})=e^{\hat{A}t}\mathbf{u}^0(\mathbf{x})+(i(\omega+i\varepsilon)E-\hat{A})^{-1}(e^{i(\omega+i\varepsilon)t}\mathbf{F}_0-e^{\hat{A}t}\mathbf{F}_0),$$
$$\mathbf{F}_0(\mathbf{x})=(f_0(\mathbf{x}),\ 0,\ 0,\ 0). \qquad (5)$$

Предположим, что существует слабый предел

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})=\lim_{t\to\infty}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}e^{-i\omega t}\mathbf{u}_\varepsilon(t,\mathbf{x})\in\mathscr{H}, \qquad (6)$$

тогда $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ называется стационарным решением уравнения (3) частоты ω. Этот способ определения стационарного решения уравнения (1) называется принципом предельной амплитуды [6]. В случае $\mathbf{v}=0$ $\hat{A}$ — самосопряженный оператор, имеющий абсолютно непрерывный спектр и поэтому решение $\mathbf{u}$, которое определяется по правилу (6), существует и является решением уравнения Гельмгольца [4]. Если $\mathbf{v}\neq 0$, то $\hat{A}$ — несамосопряженный оператор, и чтобы показать, что и в этом случае решение $\mathbf{u}$, определяемое с помощью (5), (6), является стационарным решением уравнения (1), нужно изучить спектр оператора $\hat{A}$. В данной работе используем формальную процедуру построения стационарного решения уравнения (1), не рассматривая условий применимости принципа предельной амплитуды.

Стационарное решение $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ может быть получено как предел при $\varepsilon\to 0$ решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$ уравнения вида

$$(\omega+i\varepsilon-\hat{A})\,\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})=-i\mathbf{F}_0. \qquad (7)$$

Если $\mathbf{v}=0$, это уравнение разрешимо в силу самосопряженности оператора $\hat{A}$. Из (7) следует, что нулевая компонента $u_{0\varepsilon}(\mathbf{x})$ вектора $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению

$$c^2\Delta u_{0\varepsilon}-[i(\omega+i\varepsilon)+(v,\nabla)]^2u_{0\varepsilon}=i(\omega+i\varepsilon)f_0(\mathbf{x}). \qquad (8)$$

Для нахождения $u_{0\varepsilon}$ используем тот факт, что скорость звука $c(x)$ и скорость течения $\mathbf{v}$ зависят только от координаты z. Чтобы не усложнять формул, ниже рассматриваем случай $f_0(\mathbf{x})=\delta(z-z_0)\,\delta(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}=(x,y)$. Сделаем преобразование Фурье по x и y; тогда (8) сведется к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2\tilde{u}_{0\varepsilon}}{dz^2} + [(\lambda + \mathbf{k}, \mathbf{v}))^2/c^2(z) - k^2]\,\tilde{u}_{0\varepsilon} = \delta(z - z_0), \tag{9}$$

где $\lambda = \omega + i\varepsilon$, $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$, $k = |\mathbf{k}|$,

$$\tilde{u}(\mathbf{k}, z) = \int u(x, y, z)\, e^{i(k_1x + k_2y)}\, dxdy,$$

а краевые условия для $\tilde{u}_{0\varepsilon}$ имеют вид $\tilde{u}_{0\varepsilon}(\mathbf{k}, +\infty) = 0$, $\tilde{u}_{0\varepsilon}(\mathbf{k}, 0) = 0$. Для решения (9) введем функции $\psi_\pm(\mathbf{k}, z, \lambda)$:

$$\frac{d^2\psi_\pm(\mathbf{k}, z, \lambda)}{dz^2} + ((\lambda + (\mathbf{k}, \mathbf{v})^2/c^2(z))\,\psi_\pm(\mathbf{k}, z, \lambda) = k^2\psi_\pm(\mathbf{k}, z, \lambda),$$

$$\psi_+(\mathbf{k}, 0, \lambda) = 0, \quad \psi_-(\mathbf{k}, +\infty, \lambda) = 0. \tag{10}$$

Положим

$$W = \det\begin{Vmatrix} \psi_+ & \psi_- \\ \dfrac{d\psi_+}{dz} & \dfrac{d\psi_-}{dz} \end{Vmatrix}.$$

Для двух точек z, z_0 обозначим $z_< = \min(z, z_0)$, $z_> = \max(z, z_0)$. Если $W(\mathbf{k}, \lambda) \neq 0$ при вещественных k и $\operatorname{Im}\lambda > 0$, то решение уравнения (9) можно записать в виде

$$\tilde{u}_{0\varepsilon}(\mathbf{k}, z) = \psi_+(\mathbf{k}, z_<, \lambda)\,\psi_-(\mathbf{k}, z_>, \lambda)/W(\mathbf{k}, \lambda). \tag{11}$$

Сделав обратное преобразование Фурье, получим

$$u_{0\varepsilon}(\mathbf{r}, z) = (1/4\pi^2)\iint_0^\infty d\mathbf{k}_\perp e^{-i(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{r})}\psi_+(\mathbf{k}, z_>, \lambda)\,\psi_-(\mathbf{k}, z_>, \lambda)/W(\mathbf{k}, \lambda),$$

$$\mathbf{k}_\perp = (k_1, k_2).$$

Перейдем к полярным координатам, вводя углы следующим образом: за фиксированное направление возьмем направление максимального по модулю вектора скорости течения $\mathbf{v}_{\max}$, $\theta = \angle\mathbf{k}, \mathbf{v}_{\max}$, $\alpha = \angle\mathbf{r}, \mathbf{v}_{\max}$, $\angle\mathbf{k}, \mathbf{r} = \theta - \alpha$. Тогда

$$u_{0\varepsilon}(\mathbf{r}, z) = (1/4\pi^2)\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dk k e^{-ikr\cos(\theta-\alpha)}\psi_+(k, \theta, z_<)\,\psi_-(k, \theta, z_>)/W(k, \theta, \lambda). \tag{12}$$

Чтобы закончить процедуру построения стационарного решения, необходимо перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ в выражении (12). Для этого нужно выяснить, как устроены особенности подынтегрального выражения.

Рассмотрим поперечный оператор $\hat{L}(\mathbf{k}) = d^2/dz^2 + ((\omega + (\mathbf{k}, \mathbf{v}))^2/c^2(z) - k^2)$. Обозначим через $v_\mathbf{k}(z)$ проекцию вектора $\mathbf{v}(z)$ на направление вектора $\mathbf{k}$. В силу (10) нули вронскиана $W(k, \theta, \omega)$ есть те значения k, при которых краевая задача

$$\hat{L}(\mathbf{k})\,\psi = 0, \quad \psi(0) = \psi(+\infty) = 0 \tag{13}$$

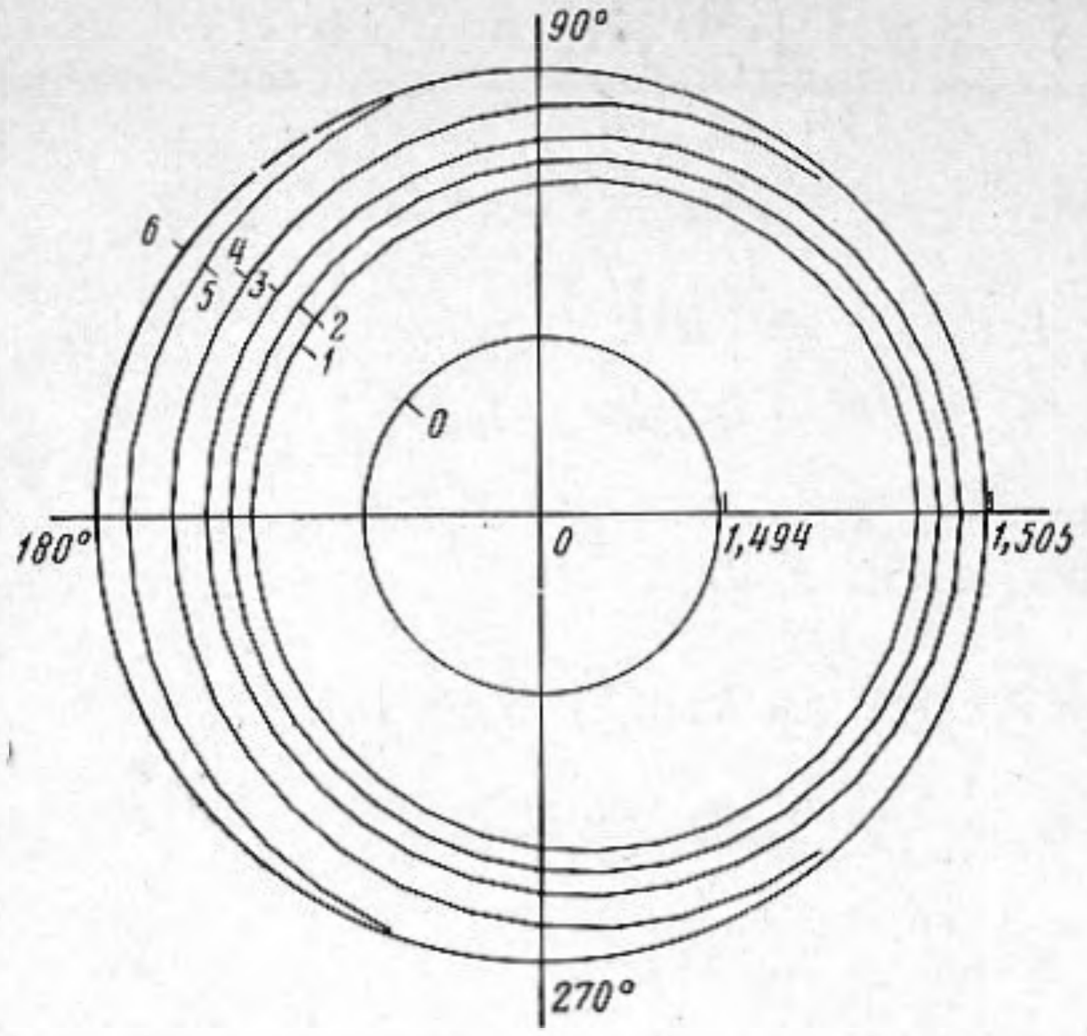
имеет нетривиальное решение. Эти значения k будем называть дискретным спектром задачи (13). При $z \geqslant H$ решение уравнения (13) имеет вид

$$\psi(k, z) = b\exp\{-(k^2 - k_L^2)^{1/2}(z - H)\},$$

где $k_L = \omega/c_L$, $\operatorname{Re}(k^2 - k_L^2)^{1/2} > 0$, b — константа. Теперь (13) сводится к краевой задаче на конечном интервале (0, H);

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + ((\omega + (\mathbf{k}, \mathbf{v}))/c(z))^2\psi - k^2\psi = 0, \tag{14}$$

$$\psi(k, 0) = 0, \quad \psi(k, H)(k^2 - k_L^2)^{1/2} + \frac{d\psi}{dz}(k, H) = 0.$$



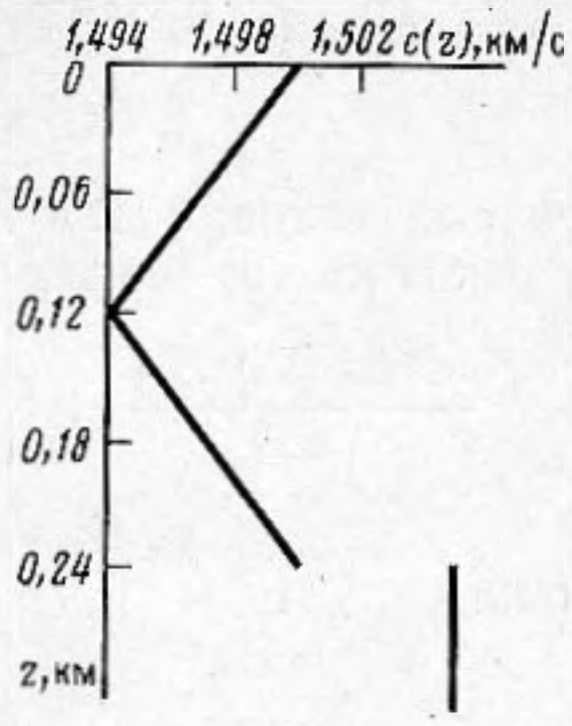


Рис. 1. Зависимость фазовых скоростей $v_\Phi{}^i$ от угла θ. 0 — минимальное значение $c_{\min} - v_{\max}(\theta)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ — $v_\Phi{}^i = (\theta)$, 6 — продольная скорость звука $c_L(\theta) = c_L$

Рис. 2. Зависимость скорости звука от глубины $c(z)$

Покажем, что вещественный дискретный спектр задачи (14) расположен в области

$$k_L{}^2 \leqslant k^2 \leqslant (\omega/(c_{\min} - v_k{}^{\max}))^2,$$

где $c_{\min}$ — минимальное значение скорости звука, $v_k{}^{\max} = \max\limits_z |\mathbf{v}_k(z)|$. Решение $\psi(\mathbf{k}, z)$ должно быть квадратично интегрируемым, следовательно, $k^2 > k_L{}^2$. Для оценки k^2 сверху умножим (14) на $\psi(\mathbf{k}, z)$ и проинтегрируем по z от 0 до ∞. Получим

$$-\left(\frac{d\psi}{dz}, \frac{d\psi}{dz}\right) + ((\omega + (\mathbf{k}, \mathbf{v}))^2/c^2(z)\,\psi(z), \psi(z)) = k^2(\psi(z), \psi(z)).$$

Учитывая, что $(d\psi/dz, d\psi/dz) > 0$, получим

$$k^2(\psi, \psi) \leqslant ((\omega + kv_k^{\max})/c_{\min})^2 (\psi, \psi).$$

Отсюда $k^2 \leqslant (\omega/(c_{\min} - v_k^{\max}))^2$. Заметим, что если $k_L{}^2 \geqslant (\omega/(c_{\min} - v_k^{\max}))^2$, то соответствующая задача (14) не имеет дискретного спектра. Для вычисления собственных значений в области $k_L{}^2 \leqslant k^2 \leqslant (\omega/(c_{\min} - v_k^{\max}))^2$ используется метод, основанный на осцилляционных теоремах [7]. Если $\mathbf{v} = 0$, то $\hat{L}$ — оператор Штурма — Лиувилля: для него данные теоремы доказаны, например, в [7]. При $\mathbf{v} \neq 0$, но $(v/c) < 1$ можно показать, что эти теоремы также справедливы. Это позволяет использовать предложенный в [8] алгоритм поиска собственных значений в слоистой среде с течением. В уравнение (13) входит скалярное произведение векторов $(\mathbf{k}, \mathbf{v}) = kv\cos(\theta - \alpha)$, где $v = |\mathbf{v}|$, поэтому собственные числа k_j, $j = \overline{1, M(\theta)}$ есть функции угла θ, а $M(\theta)$ определяет зависимость числа мод от угла θ. Множество $A_j = \{\theta\colon M(\theta) \leqslant j\}$ есть область существования i-й моды. В дальнейшем полагаем $M = \max\limits_{\theta \in [0, 2\pi]} M(\theta)$. На рис. 1 показана зависимость $v_\Phi{}^j(\theta) = \omega/k_j(\theta)$, $j = 1, \ldots, 4$, для гидрологии, изображенной на рис. 2, при $F = 150$ Гц, $c_L = 1{,}505$ км/с, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$, $v_y = 0$, $v_x = -0{,}002$ км/с. Из данного примера видно, что A_j может быть или всем интервалом $[0, 2\pi]$ или его частью. В общем случае A_j может состоять из нескольких дуг окружности. Таким образом, при $\varepsilon \to 0$ особенности будут у $W(k, \theta, \lambda)$ в точках дискретного спектра $k_1(\theta), \ldots, k_{M(\theta)}(\theta)$, зависящих от угла θ, а областями существования функций оператора (13) являются множества A_j.

Применяя формулы Сохоцкого [9] к (12), получим

$$u_0(\mathbf{r}, z) = (1/4\pi^2)\Big\{-i\pi \sum_{j=1}^{M} \int_{A_j} d\theta k_j(\theta)\, e^{-ik_j(\theta) r\cos(\theta-\alpha)} \psi_+(k_j(\theta), \theta, z_<) \times$$

$$\times \psi_-(k_j(\theta), \theta, z_>) \Big/ \frac{\partial W}{\partial k}(k_j(\theta)) + \int_0^{2\pi} d\theta \fint_0^{\infty} dk k \times$$

$$\times \exp(-ik(\theta)\, r\cos(\theta-\alpha))\, \psi_+(k(\theta), \theta, z_<)\, \psi_-(k(\theta), \theta, z_>)/W(k, \theta). \quad (15)$$

где $\fint$ — интеграл в смысле главного значения. В случае $\mathbf{v} = 0$ интеграл по θ в этом выражении вычисляется и приходим к формуле, полученной в [4] для вычисления звукового поля в неподвижной слоистой среде. Ниже преобразуем выражение (15) с целью выделить и изучить вклад дискретных нормальных волн в полное поле.

Поскольку нули функции $W(k, \theta)$ в точках $k = k_j(\theta)$, $j = 1, \ldots, M(\theta)$ простые, а сама функция W — бесконечно дифференцируемая, то по теореме Вейерштрасса она может быть представлена в виде

$$W(k, \theta) = \prod_{j=1}^{M(\theta)} (k^2 - k_j^2(\theta))\, W_1(k, \theta),$$

где гладкая функция W_1 (k, θ) не обращается в нуль при $k \geqslant 0$. Тогда

$$1/W(k, \theta) = (1/W_1(k, \theta)) \sum_{j=1}^{M(\theta)} b_j(\theta)/(k^2 - k_j^2(\theta)), \quad (16)$$

где

$$b_j(\theta) = \prod_{l=1,\, l\neq j}^{M(\theta)} (k_j^2(\theta) - k_l^2(\theta))^{-1}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$b_j(\theta)/W_1(k_j(\theta), \theta) = 2k_j(\theta) \Big/ \frac{\partial W}{\partial k}(k_j(\theta)).$$

Введем функцию

$$G(k, \theta, z) = \psi_+(k, \theta, z_<)\, \psi_-(k, \theta, z_>)/W(k, \theta) - \sum_{j=1}^{M(\theta)} \psi_+(k_j(\theta), \theta, z_<)\, \psi_- \times$$

$$\times (k_j(\theta), \theta, z_>) \Big/ \frac{\partial W}{\partial k}(k_j(\theta))\, 2k_j(\theta)/(k^2 - k_j^2(\theta)).$$

В силу (16) функция G (k, θ, z) не имеет особенностей при $k \geqslant 0$. Заметим, что при $k = k_j$ (θ) функции ψ_+ и ψ_- линейно зависимые. Обозначим через ψ_j (θ, z) решения уравнения (13) при $k = k_j$ (θ), нормированные условием $((1 - ((\mathbf{k}, \mathbf{v})/(c(z)\, k))^2\psi, \psi) - (\omega(\mathbf{k}, \mathbf{v})/(c^2(z)\, k^2)\, \psi, \psi) = 1$. Тогда (15) можно записать в виде u_0 $(\mathbf{r}, z) = u_d$ $(\mathbf{r}, z) + u_c$ $(\mathbf{r}, z)$, где вклад дискретных нормальных волн u_d имеет вид

$$u_d(\mathbf{r}, z) = (1/4\pi^2) \sum_{j=1}^{M} \int_{A_j} d\theta \psi_j(\theta, z)\, \psi_j(\theta, z_0) \Big\{-i\pi e^{-ik_j(\theta) r\cos(\theta-\alpha)} +$$

$$+ \fint_0^{\infty} dk 2k e^{-ikr\cos(\theta-\alpha)}/(k^2 - k_j^2(\theta))\Big\}, \quad (17)$$

а вклад непрерывного спектра u_c определяется соотношением

$$u_c(\mathbf{r}, z) = (1/4\pi^2) \iint dk d\theta k e^{-ikr\cos(\theta-\alpha)} G(k, \theta, z).$$

Ниже рассматриваем только $u_d(\mathbf{r}, z)$. Заметим, что при $\mathbf{v} = 0$ интегралы по θ в (17) можно вычислить и мы получим известную формулу для поля нормальных волн [5]. Интеграл в смысле главного значения, входящий в (17), может быть выражен через специальные функции Si и Ci (интегральные синус и косинус) [10]:

$$\int_0^\infty dk k e^{-ikq}/(k^2 - q^2) = -\cos(q|y|)\,\mathrm{Ci}(q|y|) -$$
$$- \sin(q|y|)\,\mathrm{Si}(q|y|) - \frac{i\pi}{2}\cos(q|y|)\,\mathrm{sgn}\,y.$$

Так как $\mathrm{Ci}(q|y|) = \mathrm{ci}(q|y|)$, а $\mathrm{Si}(q|y|) = \mathrm{si}(q|y|) + \pi/2$, получим следующее выражение для u_d:

$$u_d(\mathbf{r}, z) = (1/4\pi^2)\sum_{j=1}^{M}\int_{A_j} d\theta \psi_j(\theta, z)\,\psi_j(\theta, z_0)\,\{-i\pi e^{-iqy} - i\pi e^{-iqy}\,\mathrm{sgn}\,y -$$
$$- 2\,[\cos(q|y|)\,\mathrm{ci}(q|y|) + \sin(q|y|)\,\mathrm{si}(q|y|)]\},$$

где $q = k_j(\theta)\,r$, $y = \cos(\theta - \alpha)$. Обозначим $A_j(\alpha) = A_j \cap \{\theta : : |\theta - \alpha| < \pi/2\}$, тогда

$$u_d(\mathbf{r}, z) = (-1/2\pi^2)\sum_{j=1}^{M}\Big\{i\pi\int_{A_j(\alpha)} d\theta\psi_j(0, z)\,\psi_j(0, z_0)\,e^{-iqy} +$$
$$+ \int_{A_j} d\theta\psi_j(\theta, z)\,\psi_j(\theta, z_0)\,[\cos(q|y|)\,\mathrm{ci}(q|y|) + \sin(q|y|)\,\mathrm{si}(q|y|)]\Big\}. \quad (18)$$

Теперь можно получить асимптотическое (при больших r) выражение для поля нормальных волн. Используя интегральное представление для $\mathrm{si}(q|y|)$ и $\mathrm{ci}(q|y|)$ [11], второе слагаемое в (18) можно представить в виде

$$\int_{A_j} d\theta\psi_j(\theta, z)\,\psi_j(\theta, z_0)\int_0^\infty \cos(k_j(\theta)\,ru\cos(\theta - \alpha))/(u+1)\,du$$

и показать, что оно убывает как $1/r$ при $r \to \infty$. Поскольку в представлении (17) не учитывается вклад непрерывного спектра, имеющего такой же порядок убывания, вклад второго слагаемого в (18) в асимптотику поля можно не учитывать.

Для исследования вклада первого слагаемого можно применить метод стационарной фазы [12]. Заметим, что при $\mathbf{v} = 0$ фазовая функция $S_j(\theta) = = k_j(\theta)\,r\cos(\theta - \alpha)$ имеет только одну невырожденную стационарную точку $\theta = \alpha$ в области $\{\theta : |\theta - \alpha| < \pi/2\}$. Поэтому при достаточно малых значениях v/c в области $A_j(\alpha)$ может быть либо одна стационарная точка $\theta_j(\alpha)$, близкая к α, если $A_j(\alpha)$ содержит точку α, либо ни одной стационарной точки в противном случае. Поскольку при отсутствии стационарных точек в силу леммы Римана — Лебега [12] соответствующий интеграл убывает не медленнее чем $1/r$, главный член асимптотического выражения для u_d имеет в этом случае вид

$$u_d^{\text{асим}} = (1/2\pi i)\sum_{j=1,\ \theta\in A_j(\alpha)}^{M} \psi_j(\theta_j(\alpha), z)\,\psi_j(\theta_j(\alpha), z_0)\times$$
$$\times\left(2\pi\Big/\left(r\left|\frac{d^2S_j(\theta_j(\alpha))}{d\theta^2}\right|\right)\right)^{1/2}\exp\{-irk_j(\theta_j(\alpha))\cos(\theta_j(\alpha) - \alpha) - i\pi/4\}\,O(1/r), \quad (19)$$

где $\theta_j(\alpha)$ — решение уравнения

$$\frac{dS_j(\theta)}{d\theta} = \frac{dk_j(\theta)}{d\theta}\cos(\theta - \alpha) - k_j(\theta)\sin(\theta - \alpha) = 0, \quad (20)$$
$$\theta \in A_j(\alpha).$$

Очевидно, что при $\mathbf{v}=0$ формула (19) переходит в известное выражение для асимптотики поля нормальных волн [5]. Заметим, что выражение (19) хорошо работает лишь при условии, что стационарные точки $\theta_j(\alpha)$ не слишком близки к границе $A_j(\alpha)$ для всех j. В заключение обратим внимание еще на одну важную особенность выражения (19), а именно на то, что $\theta_j(\alpha)$, вообще говоря, отлично от α и, следовательно, поле в направлении, определяемом углом α, зависит от волновых чисел в направлении $\theta_j(\alpha)\neq\alpha$. Этот эффект можно интерпретировать как горизонтальную рефракцию, вызванную анизотропией среды, обусловленной наличием течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорьева Н. С., Осташев В. Е.* Распространение звука в неоднородных движущихся средах // Нестационарные задачи теории дифракции. Всесоюз. шк. по дифракции и распространению волн. Казань.: Казанск. авиац. ин-т, 1988.
2. *Годин О. А.* Волновое уравнение для звука в среде с медленными течениями // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 1. С. 63—67.
3. *Осташев В. Е.* Теория распространения звука в неоднородной движущейся среде (обзор) // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1985. Т. 21. № 4. С. 358—373.
4. *Вдовичева Н. К., Шерешевский И. А.* О расчете ближнего поля источника в слоисто-неоднородной среде. Препринт № 175. Горький: ИПФ АН СССР, 1987.
5. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
6. *Вайнберг Б. Р.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: МГУ, 1982.
7. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
8. *Окомелькова И. А., Шерешевский И. А.* Применение осцилляционных теорем для расчета нормальных волн в слоистой среде // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 3. С. 487—489.
9. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
10. Таблица интегральных преобразований. Т. 2. М.: Наука, 1970.
11. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
12. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
21.12.88

N. K. Vdovicheva, I. A. Okomelkova, I. A. Shereshevskii

ON THE SOUND FIELD OF A HARMONIC SOURCE IN A STRATIFIED MEDIUM WITH A STREAM

The integral representation for the field of a harmonic source in a stratified medium with a stream is obtained using the limiting-amplitude principle. The part of this representation associated with a normal modes field is singed out, its asymptotic behavior at large horizontal distances is investigated.