АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 1

УДК 534.26

А. Д. Лапин

РАССЕЯНИЕ ВОЛН ЛЭМБА В ПЛАСТИНЕ ОТ РЕЗОНАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К НЕЙ

Рассмотрена двумерная задача о распространении волн Лэмба в пластине (твердом слое), к которой присоединены резонаторы (пружины с грузами).

Нормальные волны вертикальной поляризации в пластине со свободными границами называют волнами Лэмба [1]. В тонкой (по сравнению с длиной поперечной волны) пластине распространяется только нулевая симметричная и нулевая антисимметричная волны Лэмба, которые представляют собой соответственно продольную и изгибную волны в пластинке. В работах [2—5] было показано, что волны в тонкой пластине можно изолировать при помощи системы резонаторов. Простейшим резонатором является пружина с грузом. Такой резонатор, присоединенный пружиной к пластине, интенсивно рассеивает волны, распространяющиеся к ней. Продольные и изгибные волны в тонкой пластине изолируются резонаторами, поставленными соответственно параллельно и перпендикулярно этой пластине. Представляет интерес исследовать изолирующие свойства резонаторов в толстой пластине. Ниже решена двумерная задача о рассеянии волн Лэмба от резонаторов и определен частотный диапазон эффективной изоляции.

Рассмотрим пластину — однородный твердый слой со свободными границами, заданными в декартовой системе координат (x, z) уравнениями $z = h$ и $z = -h$. К ней в точках P_1 $(0, h)$ и P_2 $(0, -h)$ присоединены одинаковые резонаторы с массами M и коэффициентами упругости $\varkappa(1 - i\varepsilon)$, где ε — коэффициент диссипации. Звуковое поле в пластине будем характеризовать скалярным и векторным потенциалами φ и $\boldsymbol{\psi}$ [1]. Пусть из полупластины $x < 0$ на резонаторы падает нормальная волна (мода) с потенциалами $(\varphi^{(0)}, \psi^{(0)})$. Под действием ее резонаторы возбуждаются и излучают поле $(\varphi^{(1)}, \psi^{(1)})$. Полное поле (φ, ψ) равно

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)}, \quad \psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)}.$$

Пусть резонаторы поставлены параллельно оси x. Обозначим через $u_1'(t)$ и $u_2'(t)$ — смещения грузов резонаторов, присоединенных соответственно в точках P_1 и P_2. Уравнения движения этих грузов имеют вид

$$M\,\frac{d^2u_{1,2}'}{dt^2} = -f_{1,2}(t), \tag{1}$$

где силы f_1 и f_2 определяются по формулам

$$f_1(t) = \varkappa'\,[u_1'(t) - u(0, h, t)], \quad f_2(t) = \varkappa'\,[u_2'(t) - u(0, -h, t)], \tag{2}$$

где $\varkappa' = \varkappa(1 - i\varepsilon)$, $u(x, z, t)$ — компонента смещения частиц по оси x.

Поле в пластине, соединенной с резонаторами, удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c_l^2}\,\frac{d^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \Delta\psi = \frac{1}{c_t^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

и граничным условиям

$$\{\sigma_{zz}\}_{z=h} = 0, \quad \{\sigma_{xz}\}_{z=h} = f_1(t)\,\delta(x),$$

$$\{\sigma_{zz}\}_{z=-h} = 0, \quad \{\sigma_{xz}\}_{z=-h} = -f_2(t)\,\delta(x),$$

где σ_{zz} и σ_{xz} — компоненты тензора напряжений, $\delta(x)$ — дельта-функция, c_l и c_t — скорости соответственно продольных и поперечных волн.

Пусть на резонаторы падает симметричная (s) или антисимметричная (a) мода

$$\varphi^{(0)}(x, z, t) = \begin{Bmatrix} \mathrm{ch}(q_m z) \\ \mathrm{sh}(q_m z) \end{Bmatrix} \exp[i(\xi_m x - \omega t)],$$
$$\psi^{(0)}(x, z, t) = b_m \begin{Bmatrix} \mathrm{sh}(r_m z) \\ \mathrm{ch}(r_m z) \end{Bmatrix} \exp[i(\xi_m x - \omega t)], \tag{3}$$

где

$$b_m = \frac{2i\xi_m q_m}{(\xi_m^2 + r_m^2)} \begin{Bmatrix} \mathrm{sh}(q_m h)\,\mathrm{sh}^{-1}(r_m h) \\ \mathrm{ch}(q_m h)\,\mathrm{ch}^{-1}(r_m h) \end{Bmatrix},$$
$$q_m = \sqrt{\xi_m^2 - k_l^2}, \qquad r_m = \sqrt{\xi_m^2 - k_t^2},$$

ξ_m — m-й корень уравнения $\Delta(\xi) = 0$,

$$\Delta(\xi) = \begin{Bmatrix} (\xi^2 + r^2)^2\,\mathrm{ch}(qh)\,\mathrm{sh}(rh) - 4\xi^2 qr\,\mathrm{sh}(qh)\,\mathrm{ch}(rh) \\ (\xi^2 + r^2)^2\,\mathrm{sh}(qh)\,\mathrm{ch}(rh) - 4\xi^2 qr\,\mathrm{ch}(qh)\,\mathrm{sh}(rh) \end{Bmatrix},$$

$k_l = \omega/c_l$, $k_t = \omega/c_t$, ω — частота звука. В фигурных скобках верхняя и нижняя строки выбираются соответственно для симметричных и антисимметричных мод.

Под действием падающей симметричной (антисимметричной) моды резонаторы колеблются синфазно (противофазно) и создают симметричное (антисимметричное) рассеянное поле. Его получим следующим способом. Рассчитаем поле в пластине и смещения грузов резонаторов, создаваемые синфазными (противофазными) точечными силами

$$f_1(t) = f_0 \exp(-i\omega t) \quad \text{и} \quad f_2(t) = \gamma f_0 \exp(-i\omega t),$$

где f_0 — комплексная амплитуда, величина γ равна $+1$ и -1 соответственно для симметричной и антисимметричной падающих мод. Пользуясь методом Фурье [6, 7], получим следующее выражение для скалярного потенциала:

$$\varphi^{(1)}(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\pm} \begin{Bmatrix} \mathrm{ch}(q_n z) \\ \mathrm{sh}(q_n z) \end{Bmatrix} \exp[i(\pm\xi_n x - \omega t)], \tag{4}$$

где амплитуды мод определяются по формуле

$$A_n^{\pm} = \pm \frac{2ik_t}{\rho c_t} f_0 \frac{\xi_n r_n}{\Delta'(\xi_n)} \begin{Bmatrix} \mathrm{ch}(r_n h) \\ \mathrm{sh}(r_n h) \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

$\Delta'(\xi_n) = \left(\frac{d\Delta}{d\xi}\right)_{\xi_n}$, ρ — плотность среды. В формуле (4) верхний и нижний знаки выбираются соответственно при $x > 0$ и при $x < 0$, суммирование производится по всем симметричным (антисимметричным) модам пластины. Амплитуды мод векторного потенциала равны ($\pm b_n A_n^{\pm}$).

Компоненты смещений $u^{(1)}(0, h, t)$ и $u^{(1)}(0, -h, t)$ определяются по формуле

$$u^{(1)}(0, h, t) = \gamma u^{(1)}(0, -h, t) =$$
$$= -\frac{k_t^3 f_0}{\rho c_t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n}{\Delta'(\xi_n)} \begin{Bmatrix} \mathrm{ch}(r_n h)\,\mathrm{ch}(q_n h) \\ \mathrm{sh}(r_n h)\,\mathrm{sh}(q_n h) \end{Bmatrix} \exp(-i\omega t). \tag{6}$$

Согласно уравнениям (1), смещения грузов будут

$$u_1'(t) = \gamma u_2'(t) = \frac{f_0}{M\omega^2} \exp(-i\omega t). \tag{7}$$

Амплитуду f_0 подберем таким образом, чтобы удовлетворялись соотношения (2). Подставляя формулы (3), (6) и (7) в эти соотношения, получим искомую амплитуду силы

$$f_0=\frac{i\omega\alpha_m}{\left[Y_1+i\left(Y_2+\dfrac{1}{\omega M}-\dfrac{\omega}{\varkappa'}\right)\right]}, \tag{8}$$

где Y_1 и Y_2 — соответственно вещественная и мнимая части величины

$$Y=\frac{-i\omega u^{(1)}(0,h,t)}{f_0\exp(-i\omega t)}=ik_t^4/\rho\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_n}{\Delta'(\xi_n)}\begin{Bmatrix}\operatorname{ch}(r_nh)\operatorname{ch}(q_nh)\\ \operatorname{sh}(r_nh)\operatorname{sh}(q_nh)\end{Bmatrix}, \tag{9}$$

$$\alpha_m=\frac{ik_t^2}{2\xi_m}\begin{Bmatrix}\operatorname{ch}(q_mh)\\ \operatorname{sh}(q_mh)\end{Bmatrix}.$$

Рассеянное поле $\varphi^{(1)}$ получим по формулам (4) и (5) при подстановке f_0 в них. Собственная частота ω_0 резонаторов, присоединенных к пластине, определяется из уравнения

$$Y_2+\frac{1}{\omega M}-\frac{\omega}{\varkappa(1+\varepsilon^2)}=0.$$

При $\omega=\omega_0$ формула (8) принимает вид

$$f_0=\frac{i\omega_0\alpha_m}{\left[Y_1+\dfrac{\varepsilon\omega_0}{\varkappa(1+\varepsilon^2)}\right]} \tag{10}$$

и амплитуда n-й рассеянной моды будет равна

$$A_n^{\pm}=\mp\frac{2k_t^2\alpha_m\xi_nr_n}{\rho\left[Y_1+\dfrac{\varepsilon\omega_0}{\varkappa(1+\varepsilon^2)}\right]\Delta'(\xi_n)}\begin{Bmatrix}\operatorname{ch}(r_nh)\\ \operatorname{sh}(r_nh)\end{Bmatrix}. \tag{11}$$

Исследуем закономерности рассеяния симметричных (антисимметричных) мод. В частотном диапазоне $0<\omega<\omega_1$, где ω_1 — критическая частота первой симметричной (антисимметричной) моды, пластина одномодовая. Для нее из формулы (11) при $m=n=0$ получим соотношение

$$A_0^{+}=-(1+\eta/Y_1)^{-1},\ \text{где}\ \eta=\frac{\varepsilon\omega_0}{\varkappa(1+\varepsilon^2)},$$

$$Y_1=\frac{ik_t^4r_0}{\rho\Delta'(\xi_0)}\begin{Bmatrix}\operatorname{ch}(r_0h)\operatorname{ch}(q_0h)\\ \operatorname{sh}(r_0h)\operatorname{sh}(q_0h)\end{Bmatrix}. \tag{12}$$

Амплитуда нулевой прошедшей моды будет $1+A_0^{+}=\eta/Y_1/(1+\eta/Y_1)$. Согласно этой формуле, при выполнении соотношения $\eta/Y_1\ll 1$ (отношение вещественных частей податливостей резонатора и пластины мало по сравнению с единицей) резонаторы являются эффективными изоляторами симметричных (антисимметричных) волн в одномодовой пластине. Отметим, что для антисимметричных волн величина Y_1, определяемая по формуле (12), стремится к нулю при $k_th\to 0$, поэтому резонаторы, поставленные параллельно оси x, слабо изолируют изгибные волны в тонкой пластине. При $\omega>\omega_1$ в рассеянном поле помимо нулевой моды возникают другие однородные моды и резонаторы перестают быть эффективными изоляторами (отражателями) волн.

Аналогичным способом можно исследовать рассеяние мод в пластине от резонаторов, поставленных перпендикулярно к ней. Пусть на резонатор падает нулевая симметричная (антисимметричная) мода с частотой ω, меньшей ω_1. Расчет дает, что амплитуда прошедшей нулевой симметричной (антисимметричной) моды равна

$$\eta/Y_1^{(\perp)}/(1+\eta/Y_1^{(\perp)}),\quad\text{где}$$

$$Y_1^{(\perp)}=\frac{ik_t^4q_0}{\rho\Delta'(\xi_0)}\begin{Bmatrix}\operatorname{sh}(r_0h)\operatorname{sh}(q_0h)\\ \operatorname{ch}(r_0h)\operatorname{ch}(q_0h)\end{Bmatrix}.$$

При выполнении соотношения $\eta/Y_1^{(\perp)} \ll 1$ резонаторы являются эффективными изоляторами симметричных (антисимметричных) волн в одномодовой пластине. Поскольку для симметричных волн величина $Y_1^{(\perp)}$ стремится к нулю при $k_t h \to 0$, то резонаторы, поставленные перпендикулярно пластине, слабо изолируют продольные волны в тонкой пластине.

В многомодовой пластине значительная часть энергии падающей моды рассеивается в другие однородные моды и резонаторы перестают быть эффективными изоляторами волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Викторов И. А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966. 168 с.
2. *Клюкин И. И.* Об ослаблении волн изгиба в стержнях и пластинах при помощи резонансных колебательных систем // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 2. С. 213—219.
3. *Клюкин И. И., Сергеев Ю. Д.* О рассеянии изгибных волн антивибраторами, установленными на пластине // Акуст. журн. 1964. Т. 10. № 1. С. 60—65.
4. *Исакович М. А., Кашина В. И., Тютекин В. В.* Волноводная изоляция изгибных волн // Докл. VIII. Всесоюз. акуст. конф. Т. 2. Секция С. М.: Акуст. ин-т, 1973. С. 113.
5. *Исакович М. А., Кашина В. И., Тютекин В. В.* Экспериментальное исследование виброизоляции изгибных волн, создаваемой импеданцными системами // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 3. С. 384—389.
6. *Меркулов Л. Г., Фирсов И. П.* Рассеяние симметричных волн Лэмба в пластине // Дефектоскопия. 1968. № 5. С. 22—29.
7. *Цыбакова Л. С.* Рассеяние нормальных волн в твердом волноводе с шероховатыми стенками // Тр. АКИНа 1969. Вып. 5. С. 272—289.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
06.10.88

A. D. Lapin

SCATTERING OF LAMB WAVES IN A PLATE BY RESONATORS MOUNTED ON IT

Two-dimensional problem of propagation of Lamb waves in a plate (a solid layer) with resonators (weights on springs) is solved.