

УДК 551.463.21

© 1990 г.

Д. Ю. Михин

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА МОДЕЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ НЕРОВНОСТИ БОЛЬШОЙ КРУТИЗНЫ

Рассматривается рассеяние плоской монохроматической волны на двумерной неперриодической гребенке со случайной высотой ребра. Аналитически найдены амплитуды рассеяния, средние коэффициенты отражения и сечения рассеяния в случае граничных условий Неймана и Дирихле. Рассмотрены критерии применимости полученных результатов.

Рассеяние волн на поверхности с большой крутизной неровностей представляет принципиальный интерес, поскольку для поверхности общего вида не существует аналитических методов нахождения рассеянного поля. Во всех приближенных аналитических и численно-аналитических методах приходится либо требовать малого наклона неровностей [1, 2], либо налагать на поверхность условие строгой периодичности [3, 4]. В связи с этим

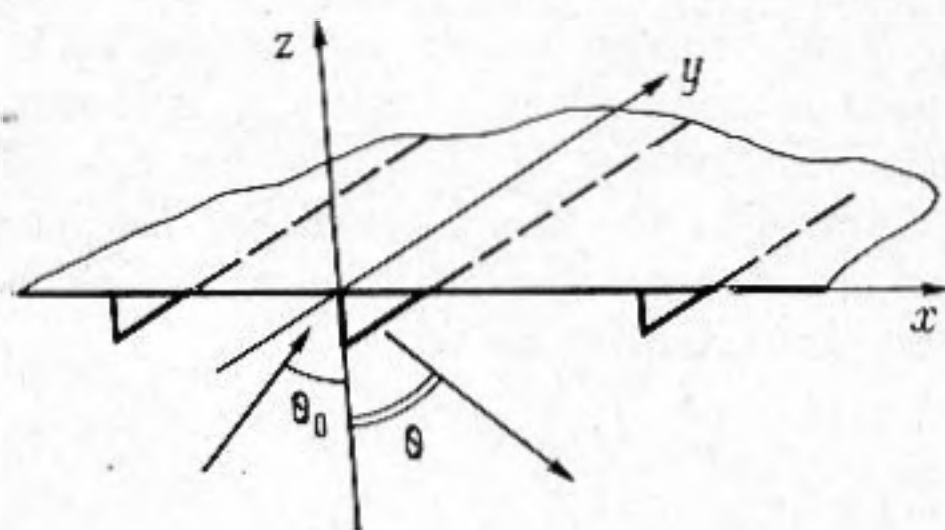


Рис. 1. Рассеяние плоской волны на двумерной неперриодической гребенке со случайной высотой ребра: θ_0 — угол падения, θ — угол рассеяния

представляет интерес решение задачи о рассеянии звуковой волны на модельной неперриодической поверхности, содержащей неровности большой крутизны. В данной работе в качестве такой поверхности выбрана двумерная неперриодическая гребенка со случайной высотой ребер a (рис. 1). При этом предполагается, что по сравнению с длиной волны λ среднее расстояние L между отдельными рассеивателями — ребрами гребенки — велико, а высота ребер a — мала. Удобной характеристикой процесса рассеяния, которая и будет использована, является амплитуда рассеяния [5].

Рассмотрим задачу о рассеянии плоской монохроматической звуковой волны на рассеивающей поверхности указанного вида. Ребра гребенки бесконечно тонкие, несущая плоскость совпадает с плоскостью xy декартовой системы координат и ось y направлена параллельно ребрам (см. рис. 1). Закон распределения рассеивателей по координате x предполагается известным. Из полупространства $z < 0$, скорость звука в котором постоянна, на эту поверхность падает волна вида $p^{(0)} = \exp(ik_0x + iv_0z)$, где $k_0 = k_1 \sin \theta_0$, $v_0 = k_1 \cos \theta_0$, а $k_1 = 2\pi/\lambda$. При этом рассмотрим два случая граничных условий:

свободная поверхность: $p|_{(s)} = 0$, где (s) — граничная поверхность;
жесткая поверхность: $(\partial p / \partial \mathbf{n})|_{(s)} = 0$, где \mathbf{n} — нормаль к (s) .

Математически задача сводится к решению двумерного уравнения Гельмгольца с соответствующим граничным условием на поверхности ребер и плоскости $z = 0$ и условием излучения при $z \rightarrow -\infty$. Если в дополнение к этому наложить физическое условие конечности энергии звукового поля, запасенной в любой конечной области пространства (из выполнения этого условия для любой области в окрестности ребра следует условие на ребре в форме Мейкснера [4]), то задача становится полностью определенной и существует единственное ее решение. Заметим, что хотя

размер неровностей мал, обычный метод малых возмущений [1] неприменим: вычисленное в приближении этого метода рассеянное поле тождественно равно нулю (существует лишь отраженная волна), что неверно, как будет показано ниже.

В области $z < -\max a$ поле может быть представлено в виде суперпозиции плоских волн

$$p = \exp(ik_0x + iv_0z) + \int S(k, k_0) \exp(ikx - ivx) dk.$$

Здесь $S(k, k_0)$ — амплитуда рассеяния, $v = (k_1^2 - k^2)^{1/2}$, $\text{Im } v \geq 0$. Если рассеиватели вообще отсутствуют, то $S = S_0 = \pm \delta(k - k_0)$, где верхний знак соответствует случаю жесткой поверхности, нижний — случаю свободной поверхности. Наличие малых рассеивателей с большим расстоянием между ними (точный критерий будет указан ниже) можно учесть по теории возмущений: $S = S_0 + S_1 + S_2 + \dots$, где S_n , $n = 1, 2, \dots$ обусловлены наличием рассеивателей, причем S_1 учитывает только процессы однократного рассеяния (в пренебрежении перерассеянием волны), S_2 учитывает парное взаимодействие ребер и т. д.

В первом приближении задача сводится к вычислению амплитуды рассеяния для одного отдельно взятого ребра (ее мы обозначим через s) и суммированию по всем ребрам. Для ее решения воспользуемся методом изображений: задача о рассеянии волны $p^{(0)}$ на одиночном ребре высотой a на плоскости эквивалентна задаче о рассеянии на полосе $|z| \leq a$ с тем же граничным условием волны вида $p^{(1)} = \exp(ik_0x + iv_0z) \pm \exp(ik_0x - iv_0z)$. Второе слагаемое в этом выражении — изображение падающей волны в плоскости $z = 0$, знак отвечает граничному условию при $z = 0$: минус в случае свободной поверхности, плюс — в случае жесткой.

Рассмотрим подробнее случай свободной поверхности. Как известно [6], $p(\mathbf{r})$ — решение краевой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}) &= p^{(1)}(\mathbf{r}) - \int_0^\pi u(\xi') \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_1 R) d\xi' = \\ &= p^{(1)}(\mathbf{r}) - \frac{i}{4\pi} \int \frac{e^{ikx}}{v} dk \int_0^\pi u(\xi') \exp(iv|z - a \cos \xi'|) d\xi'. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $iH_0^{(1)}(k_1 R)/4$ — функция Грина двумерного уравнения Гельмгольца; использовано ее представление в виде суперпозиции плоских волн, $R = [x^2 + (z - a \cos \xi')^2]^{1/2}$. Функция $u(\xi')$ определяется из уравнения: при $|z| \leq a$

$$\Phi = \int_0^\pi u(\xi') \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\varepsilon |\cos \xi - \cos \xi'|) d\xi' = p^{(1)}|_{x=0} = 2i \sin(\varepsilon \cos \theta_0 \cos \xi), \quad (2)$$

где $\varepsilon = k_1 a \ll 1$, $u(\xi')$ зависит от ε как от параметра и вместо z введена новая переменная $\xi : z = a \cos \xi$. Разложим все функции, входящие в (2), в ряды по степеням ε и приравняем члены с одинаковыми степенями в левой и правой частях. При этом воспользуемся представлением функции Ганкеля при $\varepsilon \ll 1$ ([6], с. 257):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} H_0^{(1)}(\varepsilon |\cos \xi - \cos \xi'|) &= K_0(\xi, \xi') + \frac{\varepsilon^2}{4\pi} (\cos \xi - \cos \xi')^2 [1 - \pi K_0(\xi, \xi')] + \\ &+ \frac{\varepsilon^4}{64\pi} (\cos \xi - \cos \xi')^4 \left[\pi K_0(\xi, \xi') - \frac{3}{2} \right] + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} K_{2n}(\xi, \xi'), \\ K_0(\xi, \xi') &= \frac{M}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\xi \cos n\xi'}{n}, \quad M = \ln \frac{\varepsilon}{4} + C - i \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

C — постоянная Эйлера. В итоге получим для любого m :

$$\sum_{n=0}^{[m/2]} \int_0^\pi K_{2n}(\xi, \xi') u_{m-2n}(\xi') d\xi' = -4i \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m!} (\cos \theta_0 \cos \xi)^m (1 - (-1)^m), \quad (3)$$

где $u_j(\xi')$ — коэффициенты при ε^j ряда по степеням ε для функции $u(\xi')$ и $[m/2]$ обозначает целую часть $m/2$. Последовательно разрешая уравнение (3) при $m = 0, 1, 2, \dots$, найдем с точностью до ε^1 включительно функцию $u(\xi')$. Подставляя ее в (1) и учитывая, что при интегрировании по k в (1) существенны $k \sim k_1$, для которых $|va| \ll 1$, найдем

$$s(k, k_0) = \frac{i}{2} a^2 v_0 \left[1 + \frac{a^2}{8} (k^2 + k_0^2) - \frac{\varepsilon^2}{4} \left(-M + \frac{3}{4} \right) \right]. \quad (4)$$

Для случая жесткой поверхности решение задачи о рассеянии на полосе также может быть получено с помощью исходных интегральных уравне-

ний [6]: $p(\mathbf{r}) = p^{(1)}(\mathbf{r}) + (4i)^{-1} \partial \left(\int_0^\pi v(\xi') H_0^{(1)}(k_1 [(z - a \cos \xi')^2 + x^2]^{1/2}) d\xi' \right) / \partial x$

а $v(\xi')$ определяется из уравнения: при $|z| \leq a$ $\Phi_{zz}'' + k_1^2 \Phi = -(\partial p^{(1)} / \partial x)|_{x=0}$ переменные z и ξ по-прежнему связаны соотношением $z = a \cos \xi$. Кроме того, $v(\xi')$ должна удовлетворять условиям на ребре: $v(\xi') / \sin \xi' \rightarrow 0$ при $\xi' \rightarrow 0$ и $\xi' \rightarrow \pi$. Приведем сразу выражение для амплитуды рассеяния

$$s(k, k_0) = \frac{i}{2} a^2 \frac{kk_0}{v} \left[1 + \frac{a^2}{8} (k^2 + k_0^2) - \frac{\varepsilon^2}{4} \left(M + \frac{1}{4} \right) \right]. \quad (5)$$

К таким же результатам (4), (5) приводит и другой способ: отыскание строгого решения в терминах функций Матье [7] и переход в нем к пределу $\varepsilon \ll 1$.

Найдем теперь поле волны, рассеянной всей неровной поверхностью. Для рассеивателя, расположенного не в начале координат, а в точке $(x_m, 0)$, амплитуда рассеяния будет отличаться от (4), (5) дополнительным фазовым множителем $\exp(ix_m(k_0 - k))$. Полное рассеянное поле имеет вид

$$p_{\text{расс}} = \int \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} s_m(k, k_0) \exp(ix_m(k_0 - k)) \right] \exp(ikx - ivz) dk.$$

Индекс m у амплитуды рассеяния s_m возникает за счет разной высоты ребер. Предположим, что поверхность квазипериодическая, т. е. $x_m = L(m + b)$, где L — среднее расстояние между рассеивателями, в b — случайная величина с характеристической функцией $\chi(q)$ и средним значением, равным нулю, так что $(d\chi(q)/dq)|_{q=0} = 0$. При этом случайные величины a и b считаются независимыми. Тогда получим

$$S_1(k, k_0) = \frac{2\pi}{L} \langle s(k, k_0) \rangle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(2\pi n) \delta\left(k - k_0 - \frac{2\pi n}{L}\right), \quad (6)$$

где $\langle s(k, k_0) \rangle$ — средняя амплитуда рассеяния изолированного ребра: в случае свободной поверхности —

$$\langle s(k, k_0) \rangle = \frac{i}{2} \frac{v_0}{k_1^2} \left(\langle \varepsilon^2 \rangle - \frac{\langle \varepsilon^4 \rangle}{4} \left[\frac{v^2 + v_0^2}{2k_1^2} + D + i \frac{\pi}{2} \right] + \frac{\langle \varepsilon^4 \ln \varepsilon \rangle}{4} \right), \quad (7)$$

в случае жесткой поверхности —

$$\langle s(k, k_0) \rangle = \frac{i}{2} \frac{kk_0}{k_1^2 v} \left(\langle \varepsilon^2 \rangle + \frac{\langle \varepsilon^4 \rangle}{4} \left[\frac{k^2 + k_0^2}{2k_1^2} + D + i \frac{\pi}{2} \right] - \frac{\langle \varepsilon^4 \ln \varepsilon \rangle}{4} \right). \quad (8)$$

Здесь $D = 2 \ln 2 - C - 1/4 \approx 0,559$ и угловые скобки означают усреднение по случайной высоте ребер. Диаграмма направленности определяется

функцией $\chi(q)$, и в общем случае максимум рассеянного поля может находиться в направлении, отличном от зеркального. В качестве примера рассмотрим случай $\chi(q) = \exp(-q^2 d^2/2)$, что соответствует нормальному распределению с дисперсией d^2 . При не слишком малых d затухание по n очень быстрое и диаграмма направленности имеет ширину $|\theta - \theta_0| \lesssim (dk_1 L)^{-1}$ при θ_0 , не близких к $\pi/2$, и $|\theta - \theta_0| \lesssim (dk_1 L)^{-1/2}$ при $\theta_0 \sim \pi/2$ (θ_0 — угол падения волны, θ — угол рассеяния). В предельном случае пространственно однородного статистического ансамбля рассеивателей (что соответствует $d \rightarrow \infty$ и $\chi(2\pi n) = \delta_{n0}$) получим, как и следовало ожидать, $S_1(k, k_0) = V_1(k_0) \delta(k - k_0)$, где $V_1(k_0) = 2\pi L^{-1} \langle s(k_0, k_0) \rangle$, и $S(k, k_0) \approx S_0 + S_1 = V(k_0) \delta(k - k_0)$. Здесь $V(k_0)$ — средний коэффициент отражения [5].

Из явных выражений для $\langle s(k, k_0) \rangle$ (7), (8) видно, что рассеянное поле, найденное по теории возмущений, ведет себя при $\theta_0 \sim \pi/2$ точно так же, как и в случае рассеяния на поверхности с малыми и пологими неровностями [2]: $|V_1| \rightarrow 0$ при $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ — для свободной поверхности и $|V_1| \rightarrow \infty$ при $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ — для жесткой поверхности. Как и для рассеяния на жесткой поверхности с малыми и пологими возвышениями, расходимость связана с примененным методом расчета, а именно с использованием первого приближения. Такая особенность влечет за собой появление бесконечностей и в последующих приближениях (12). Для правильного вычисления рассеянного поля при $\theta_0 \sim \pi/2$ необходимо более строго учитывать затенения и перерассеяние волны. Приближенный метод, основанный на теории возмущений, с помощью которого были получены приведенные выше выражения для V_1 и S , справедлив только при условии малости вклада ребер в рассеянное поле: $|V_1| \ll 1$. Для свободной поверхности это условие выполняется всегда, а для жесткой поверхности — при $|\theta_0 - \pi/2| \gg (k_1 L)^{-1} \langle \varepsilon^2 \rangle$.

Для пространственно однородной поверхности наряду со средним коэффициентом отражения важной является величина $Q(k, k_0; k', k'_0)$, связанная со вторыми статистическими моментами амплитуды рассеяния [5] (обозначения в [5] несколько отличаются от принятых в настоящей работе):

$$Q(k, k_0; k', k'_0) \delta(k - k_0 - k' + k'_0) = (vv'/v_0 v'_0)^{1/2} \overline{\Delta S(k, k_0) \Delta S^*(k', k'_0)} = \\ = \left(\frac{vv'}{v_0 v'_0} \right)^{1/2} \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} s_n(k, k_0) s_m^*(k', k'_0) \exp[ix_n(k_0 - k) - ix_m(k'_0 - k')] - \\ - V_1(k_0) V_1^*(k'_0) \delta(k - k_0) \delta(k' - k'_0) = \\ = 2\pi L^{-1} \langle s(k, k_0) s^*(k', k'_0) \rangle \delta(k - k_0 - k' + k'_0).$$

Функция Q в случае симметричных аргументов — это сечение рассеяния: $Q(k, k_0; k, k_0) = \sigma(k, k_0)$. Используя явный вид амплитуды рассеяния изолированного ребра (4), (5), приходим к следующим выражениям:

для свободной поверхности —

$$Q(k, k_0; k', k'_0) = \frac{\pi}{2L} \langle \varepsilon^4 \rangle \frac{(vv_0 v' v'_0)^{1/2}}{k_1^4} \text{ и } \sigma(k, k_0) = \frac{\pi}{2L} \langle \varepsilon^4 \rangle \frac{vv_0}{k_1^4}, \quad (9)$$

для жесткой поверхности —

$$Q(k, k_0; k', k'_0) = \frac{\pi}{2L} \langle \varepsilon^4 \rangle \frac{kk_0 k' k'_0}{k_1^4 (vv_0 v' v'_0)^{1/2}} \text{ и } \sigma(k, k_0) = \frac{\pi}{2L} \langle \varepsilon^4 \rangle \frac{k^2 k_0^2}{k_1^4 vv_0}. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь вопрос о вкладе взаимодействия ребер в амплитуду рассеяния, при этом ограничимся S_2 — поправкой парного взаимодействия.

Сначала рассмотрим случай пространственно однородной поверхности: $S_2(k, k_0) = V_2(k_0) \delta(k - k_0)$. Оценим по порядку величины вклад в V_2 рассеивателей, расположенных на большом и на малом расстояниях друг от друга (обозначим это расстояние через Δx). Если Δx велико, то амплитуда рассеяния каждого ребра примерно равна амплитуде рассеяния изолированного ребра и вклад таких рассеивателей в V_2 порядка $\varepsilon^4 (k_1 L)^{-2}$ (два множителя ε^2 возникают при двукратном рассеянии и множитель

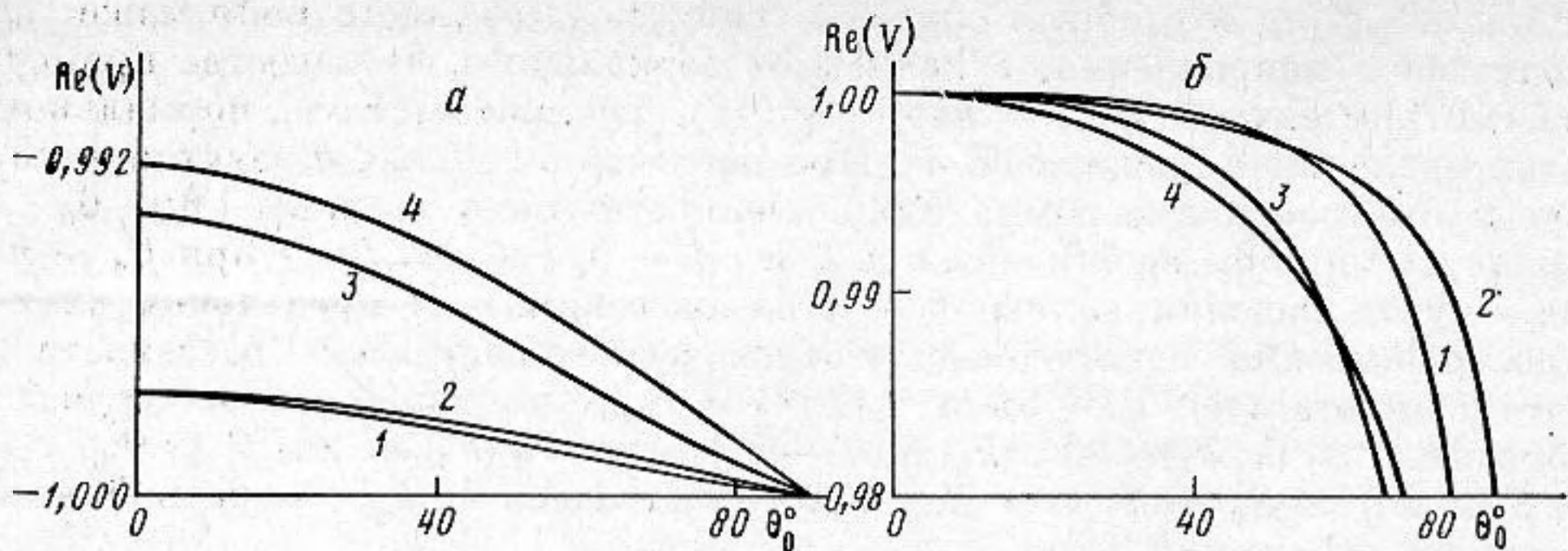


Рис. 2. Зависимости $\text{Re}(V)$ от θ_0 : 1 — $L/a = 16, k_1L = 4$; 2 — $L/a \approx 109,2, k_1L = 64$; 3 — $L/a = 16, k_1L = 6$; 4 — $L/a \approx 109,2, k_1L = 96$

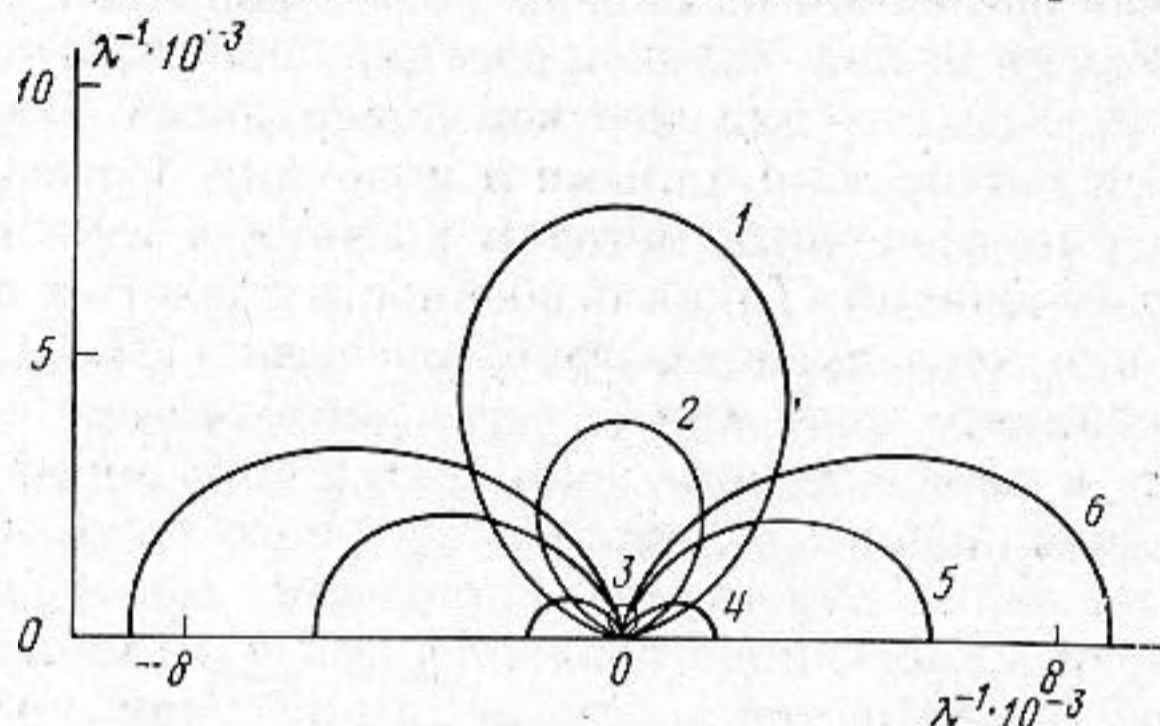


Рис. 3. Диаграмма $\mu(\theta)$ для свободной граничной поверхности, θ_0 , град: 1 — 25; 2 — 50; 3 — 75; для жесткой граничной поверхности, θ_0 , град: 4 — 25; 5 — 50; 6 — 75, $L/a = 16, k_1L = 4$

$(k_1L)^{-2}$ — при усреднении по двум случайным величинам, координатам рассеивателей). Если же $\Delta x \sim a$, то рассеянное такой парой ребер поле по порядку величины совпадает с полем от одного изолированного ребра $\sim \varepsilon^2$. Вероятность такого близкого расположения каких-либо двух ребер $\sim (a/L)^2$. Таким образом, суммарный вклад близко расположенных ребер в V_2 также имеет величину $\sim \varepsilon^4 (k_1L)^{-2}$. Следовательно, для учета взаимодействия рассеивателей недостаточно знать асимптотику поля, рассеянного изолированным ребром, а необходимо решить существенно более сложную задачу о взаимодействии пары рассеивателей с произвольным Δx . Это делает затруднительным прямое вычисление S_2 . Тем не менее действительная часть поправки взаимодействия может быть получена из закона сохранения энергии, который в используемых обозначениях имеет

$$\text{вид [5]} \quad |V(k_0)|^2 + \int_{-k_1}^{k_1} \sigma(k, k_0) dk = 1. \quad \text{Здесь} \quad V(k_0) = \pm 1 + V_1(k_0) +$$

$+ V_2(k_0)$ — средний коэффициент отражения с учетом взаимодействия. Подставляя найденные выше $V_1(k_0)$ и σ , получим:

для свободной поверхности —

$$V(k_0) = -1 + V_1(k_0) + \frac{\pi^2}{2(k_1L)^2} \langle \varepsilon^2 \rangle^2 \cos^2 \theta_0 + i \text{Im} V_2(k_0), \quad (11)$$

причем, как следует из приведенных выше рассуждений, $|\text{Im} V_2| \lesssim \varepsilon^4 (k_1L)^{-2}$,

для жесткой поверхности —

$$V(k_0) = 1 + V_1(k_0) - \frac{\pi^2}{2(k_1L)^2} \langle \varepsilon^2 \rangle^2 \frac{\sin^4 \theta_0}{\cos^2 \theta_0} + i \text{Im} V_2(k_0),$$

$$|\text{Im} V_2| \lesssim \varepsilon^4 (k_1L)^{-2} \quad (12)$$

Взаимовлиянием ребер можно пренебречь, если выполняется физически очевидное условие $L \gg \lambda$. Графики действительной части среднего коэффициента отражения V как функции угла падения θ_0 для различных соотношений между параметрами a , L и λ приведены на рис. 2, а (рассеяние на свободной поверхности) и на рис. 2, б (рассеяние на жесткой поверхности). Ход функции $\text{Im } V(\theta_0)$ качественно совпадает с поведением $1 \pm \text{Re } V(\theta_0)$ (для двух видов граничной поверхности соответственно). Величина $\mu = \nu \nu_0 \sigma(k, k_0)$ представляет собой коэффициент рассеяния и измеряется экспериментально. Зависимость μ от θ_0 и θ показана на рис. 3.

Перейдем теперь к случаю квазипериодической поверхности. Рассмотрим рассеяние на строго периодической гребенке (ребро с номером m расположено в точке $x_m = mL$ и все ребра имеют одинаковую высоту a). Для такой рассеивающей поверхности резонансные эффекты, связанные с перерассеянием и не описываемые (6), будут выражены наиболее сильно. Для нахождения S_2 нужно найти $s_{m, m+n}$ ($p_{m, m+n}$ — поле, рассеянное ребром с номером m и перерассеянное ребром с номером $m+n$, $p_{m, m+n} = \int s_{m, m+n} \exp(ikx - ivz) dk$) и просуммировать по всем парам ребер, т. е. по всем m и всем $n \neq 0$. В случае свободной поверхности поле $p_{m, m+n}$ дается уравнениями (1), (2), в которых надо заменить x на $x - x_{m+n}$ и вместо падающего поля $p^{(1)}$ подставить p_m — поле, рассеянное ребром m . Для вычисления p_m на поверхности ребра $m+n$, т. е. в точке с координатами $(L(m+n), z)$, $|z| \leq a$, используем формулу (1), при этом подынтегральное выражение в (1) должно быть домножено на $\exp(ix_m(k_0 - k))$, как указано выше. Если $k_1 L \gg 1$, то расстояние между ребрами m и $m+n$ велико по сравнению с λ и интегрирование по k может быть выполнено методом стационарной фазы. При этом существенная область интегрирования $k \sim k_1$. В результате получим

$$p_m|_{x=x_{m+n}} = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon^3}{(k_1 L |n|)^{3/2}} \frac{\nu_0}{k_1} \cos \xi \exp \left[ik_0 L m + ik_1 L |n| - i \frac{\pi}{4} \right]. \quad (13)$$

Здесь, как и ранее, $z = a \cos \xi$.

Подставив выражение (13) в правую часть уравнения (2), найдем, точно так же, как при вычислении s , амплитуду рассеяния $s_{m, m+n}$. Просуммировав по всем парам рассеивателей, получим

$$S_2(k, k_0) = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \frac{\varepsilon^4}{(k_1 L)^{3/2}} \cos \theta_0 \left(f[(k_1 - k_0)L] + f[(k_1 + k_0)L] \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(k - k_0 - \frac{2\pi n}{L} \right), \quad (14)$$

где $f[q] = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} \exp(iqn - i3\pi/4)$.

Условие $(k_1 \pm k_0)L = 2\pi j$, $j = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ определяет порог рождения дифракционного спектра с номером j , т. е. точку возникновения новой распространяющейся от решетки плоской волны. Функция $f[q]$, следовательно, и амплитуда рассеяния S имеет в этих точках характерную корневую особенность [3]:

$$f[q] \approx \frac{5}{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}} + 2 \sqrt{\pi(q - 2\pi j)}, \quad q \rightarrow 2\pi j + 0 \text{ и}$$

$$f[q] \approx \frac{5}{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}} + 2i \sqrt{\pi(2\pi j - q)}, \quad q \rightarrow 2\pi j - 0.$$

Из оценки $|f[q]| \leq 5$ следует, что при $k_1 L \gg 1$ $S_2 \sim (k_1 L)^{-3/2}$ и вклад перерассеянных волн в амплитуду рассеяния мал. Таким образом, для двух предельных случаев граничной поверхности (пространственно однородной и строго периодической) перерассеянием поля можно пренебречь,

если $L \gg \lambda$. Естественно ожидать, что этот критерий останется справедливым и в общем случае, когда $x_m = L(m + b)$.

Для жесткой поверхности амплитуда рассеяния S_2 , найденная изложенным выше способом, расходится при $(k_1 \pm k_0) L \rightarrow 2\pi j$ как $[(k_1 \pm k_0) L - 2\pi j]^{-1/2}$. Это связано с тем, что возникающая в этих точках новая распространяющаяся волна бежит вдоль граничной поверхности, а в этом случае, как показано при анализе поведения V_1 при $\theta_0 \sim \pi/2$, необходимо более строго учитывать затенения и перерассеяния волны. Известно [3, 4], что при $L \sim \lambda$ эти резонансные эффекты затухают с ростом $k_1 L$, поэтому можно ожидать, что при $L \gg \lambda$ они будут малы и выражение (6) справедливо везде, кроме узкого диапазона скользящих волн $|k_1 \pm k_0| \sim \langle \varepsilon^2 \rangle^2 (k_1 L)^{-1} [\chi((k_1 \pm k_0) L)]^2 L^{-1}$. Последнее ограничение связано с тем, что при пологом распространении волны расходится уже первое приближение амплитуды рассеяния (так же, как для пространственно однородной границы $V_1 \rightarrow \infty$ при $\theta_0 \sim \pi/2$).

В заключение отметим, что полученные в настоящей работе результаты — выражения для амплитуд рассеяния (6), (14), средних коэффициентов отражения (11), (12) и сечений рассеяния (9), (10), могут быть обобщены на случай, когда волновой вектор падающей волны имеет отличную от нуля компоненту в направлении оси y . Решение задачи о рассеянии такой волны получается из найденных выше формул формальной заменой в них k_1 на k_1' — проекцию волнового вектора падающей волны на плоскость xz .

Автор благодарит А. Г. Вороновича за постановку задачи и руководство настоящей работой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 264 с.
2. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 463 с.
3. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. Изд-во Харьковского ун-та, 1973. 278 с.
4. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. Т. I. Дифракционные решетки. Киев: Наук. думка, 1986. 232 с.
5. Воронович А. Г. О двух новых подходах в теории рассеяния волн на неровных поверхностях // Акустические волны в океане / Под ред. Бреховских Л. М. М.: Наука, 1987. С. 121—130.
6. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 427 с.
7. Мак-Лохлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 475 с.

Институт океанологии
им. П. П. Ширшова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
07.05.88
после исправления
29.05.89

D. Yu. Mihin

SCATTERING OF A PLANE WAVE BY A MODEL SURFACE CONTAINING ROUGHNESSES OF BIG STEEPNESS

Scattering of a plane monochromatic sound wave by a model surface containing roughnesses of big steepness is considered. Mean reflection coefficients and scattering cross-sections for Neumann and Dirichlet boundary conditions are determined. Validity criterion of obtained results is discussed.