АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 1

УДК 534.833.5

© 1991 г.

С. Н. Бешенков, М. И. Клименко

К РАСЧЕТУ ЗВУКОИЗОЛЯЦИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ИЗНУТРИ

Рассмотрена звукоизоляция бесконечно длинной многослойной цилиндрической оболочки при осесимметричном возбуждении изнутри. Изменение перемещений по толщине оболочки аппроксимируется кусочно-линейными функциями, узловые значения которых находятся по методу конечных элементов в форме Галеркина. Исследуются частотные и угловые зависимости звукоизоляции оболочек с различным распределением составляющих материалов по толщине пакета.

Широкое использование многослойных оболочек в различных строительных и инженерных сооружениях приводит к необходимости оценки их звукоизоляционных свойств. Применительно к трехслойным оболочкам эта задача рассматривалась, например, в работах [1—3] с использованием как приближенных уравнений, основанных на гипотезах о характере деформирования слоев, так и уравнений динамической теории упругости в сочетании с уравнениями теории тонких оболочек. Очевидно, что с увеличением числа слоев первый подход оказывается недостаточно эффективным из-за ограничений, накладываемых принятыми гипотезами на частоту возбуждения и параметры слоев, а второй — из-за громоздкости расчетных формул. В связи с этим представляет интерес расчет звукоизоляции многослойных цилиндрических оболочек с использованием метода конечных элементов [4, 5], позволяющего на основе единого алгоритма рассматривать конструкции с любым числом слоев.

Пусть на оси оболочки, совпадающей с осью z цилиндрической системы координат (r, z), расположен источник звука, излучающий расходящуюся волну, фронт которой образует конус с углом конусности 2θ

$$p_0=H_0^{(1)}(k_0 r\cos\theta)\exp[i(k_0 z\sin\theta-\omega t)], \tag{1}$$

являющуюся аналогом плоской волны, падающей на пластину под углом θ. В выражении (1) $k_0=\omega/c_0$ — волновое число, ω, c_0 — частота и скорость звука, $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля.

Представляя звуковое поле внутри оболочки состоящим из расходящейся и стоячей волн, а снаружи только из расходящейся, получаем выражения для звуковых давлений в этих полях:

$$\begin{gathered} p_1=H_0^{(1)}(k_0 r\cos\theta)+AI_0(k_0 r\cos\theta); \\ p_2=BH_0^{(1)}(k_0 r\cos\theta). \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь A и B — коэффициенты отражения и прохождения звука, общий для всех величин множитель $\exp[i(k_0 z\sin\theta-\omega t)]$ опущен.

Разобьем оболочку по толщине на конечное число слоев (элементов), в пределах которых упругие константы и плотность материала не меняются. Движение отдельного слоя описывается уравнениями динамической

теории упругости.

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}-\mu\frac{u}{r^2}+\mu\Delta u-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}+\mu\Delta w-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \qquad (3)$$

$$\varepsilon=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}; \qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

где u, w — радиальное и осевое перемещение, λ, μ, ρ — упругие постоянные и плотность.

Решение этих уравнений будем искать в виде

$$u=iU(r)\exp[i(k_0 z\sin\theta-\omega t)];$$
$$w=W(r)\exp[i(k_0 z\sin\theta-\omega t)]. \qquad (4)$$

Подстановка (4) в (3) приводит к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям для отыскания амплитудных множителей $U(r)$, $W(r)$:

$$\lambda\frac{d}{dr}\left(\frac{dU}{dr}+\frac{U}{r}+kW\right)+2\mu\frac{d^2U}{dr^2}+\mu\left(\frac{2}{r}\frac{dU}{dr}-\frac{2U}{r^2}+k\frac{dW}{dr}-k^2U\right)+$$
$$+\rho\omega^2U=0; \qquad (5)$$
$$\mu\frac{d^2W}{dr^2}-k\mu\frac{dU}{dr}-k\lambda\left(\frac{dU}{dr}+\frac{U}{r}+kW\right)-\mu\left(\frac{kU}{r}+2k^2W-\frac{1}{r}\frac{dW}{dr}\right)+$$
$$+\rho\omega^2W=0; \qquad k=k_0\sin\theta.$$

Предполагая, что рассматриваемый слой является достаточно тонким, распределение радиального и осевого перемещений на нем аппроксимируем линейными функциями

$$U=U_1N_1+U_2N_2; \quad W=W_1N_1+W_2N_2;$$
$$N_1=(r_2-r)/(r_2-r_1); \quad N_2=(r-r_1)/(r_2-r_1). \qquad (6)$$

Здесь U_1, W_1, U_2, W_2 — значения функций $U(r)$ и $W(r)$ на внутренней ($r=r_1$) и наружной ($r=r_2$) поверхностях слоя.

Для отыскания этих узловых перемещений воспользуемся методом Галеркина, в соответствии с которым умножим обе части уравнений (5) сначала на N_1rdr, а затем на N_2rdr и проинтегрируем по толщине слоя. Интегрируя в каждом из полученных выражений первые два слагаемых 1 раз по частям и используя далее формулы (6), приходим к системе алгебраических уравнений:

$$([C]^e-\omega^2[m]^e)\{q\}^e=\{f\}^e,$$
$$\{f\}^{eT}=\{i\sigma_1r_1,\ -\tau_1r_1,\ -i\sigma_2r_2,\ \tau_2r_2\}, \qquad (7)$$
$$\{q\}^{eT}=\{U_1,\ W_1,\ U_2,\ W_2\}.$$

В последних формулах σ_1, τ_1, σ_2, τ_2 — нормальные и касательные напряжения на границах слоя; $[C]^l$, $[m]^l$ — его матрицы жесткости и массы. Коэффициенты этих матриц вычисляются по формулам (множители $E/[(1+\nu)(1-2\nu)h^2]$ и $\rho h/12$ опущены)

$$c_{11}=r_2^2(1-\nu)\ln(r_2/r_1)-h^2+(1-2\nu)k^2h^3(3r_1+r_2)/24;$$
$$c_{12}=kn^2(r_2+2r_1-12\nu r_1)/12; \quad c_{14}=-kn^2(r_2+2r_1)/12;$$
$$c_{13}=-(1-\nu)r_1r_2\ln(r_2/r_1)+(1-2\nu)k^2h^3(r_2+r_1)/24;$$
$$c_{22}=k^2(1-\nu)h^3(3r_1+r_2)/12+(1-2\nu)h(r_1+r_2)/4;$$
$$c_{23}=kh^2(r_1+2r_2)/12;$$

$$c_{24}=-(1-2\nu)h(r_1+r_2)/4+(1-\nu)k^2h^3(r_1+r_2)/12;$$
$$c_{33}=h^2+(1-\nu)r_1^2\ln(r_2/r_1)+(1-2\nu)k^2h^3(3r_2+r_1)/24;$$
$$c_{34}=-kh^2(2r_2+r_1)/12+\nu kh^2r_2; \tag{8}$$
$$c_{44}=(1-2\nu)h(r_1+r_2)/4+(1-\nu)k^2h^3(3r_2+r_1)/12;$$
$$m_{11}=3r_1+r_2;\quad m_{13}=r_1+r_2;\quad m_{22}=m_{11};\quad m_{12}=0;$$
$$m_{14}=0;\quad m_{23}=0;\quad m_{24}=m_{13};\quad m_{33}=3r_2+r_1;$$
$$m_{44}=m_{33};\quad m_{ij}=m_{ji};\quad C_{ij}=C_{ji};\quad h=r_2-r_1.$$

Складывая последовательно третье и четвертое уравнения для каждого предыдущего слоя с первым и вторым для следующего, получаем

$$[K]\{Q\}=\{F\};\quad [K]=[C]-\omega^2[M]. \tag{9}$$

Здесь $[C]$ и $[M]$ — глобальные ленточные матрицы жесткости и массы, получающиеся суммированием соответствующих матриц для отдельных элементов, $\{Q\}^T=\{U_1, W_1, U_2, W_2, \ldots, U_{N+1}, W_{N+1}\}$ — вектор узловых перемещений оболочки, разбитой по толщине на N слоев (элементов). Ненулевыми элементами вектора нагрузки $\{F\}$ являются

$$F_1=-ip_1r|_{r=R_в};\ F_{2N+1}=ip_2r|_{r=R_н}, \tag{10}$$

где $R_в$ и $R_н$ — внутренний и наружный радиусы оболочки.

Входящие в выражения (2) для p_1 и p_2 коэффициенты отражения и прохождения звука можно выразить через перемещения U_1 и U_{N+1} с помощью условий совместного движения оболочки и среды:

$$iU_1=\frac{1}{\omega^2\rho_0}\frac{\partial p_1}{\partial r}\bigg|_{r=R_в};\quad iU_{N+1}=\frac{1}{\omega^2\rho_0}\frac{\partial p_2}{dr}\bigg|_{r=R_н}, \tag{11}$$

из которых находим

$$A=-i\omega z_0U_1/I_0(x)-H_1^{(1)}(x)/I_1(x);$$
$$B=-i\omega z_0U_{N+1}/H_1^{(1)}(y); \tag{12}$$
$$x=k_0R_в\cos\theta;\quad y=k_0R_н\cos\theta;\quad z_0=\rho_0c_0/\cos\theta.$$

Подставляя последние выражения в формулы (2) и (10), систему уравнений (9) преобразуем к виду

$$[\overline{K}]\{Q\}=\{\overline{F}\}. \tag{13}$$

Матрица $[\overline{K}]$ отличается от матрицы $[K]$ первым и предпоследним диагональными элементами

$$\overline{K}_{11}=K_{11}+\omega z_0R_вI_0(x)/I_1(x);$$
$$\overline{K}_{2N+1,2N+1}=K_{2N+1,2N+1}-\omega z_0R_нH_0^{(1)}(y)/H_1^{(1)}(y), \tag{14}$$

а вектор $\{\overline{F}\}$ содержит только один ненулевой элемент

$$\overline{F}_1=[I_1(x)N_0(x)-I_0(x)N_1(x)]R_в/I_1(x). \tag{15}$$

Так как в системе (13) комплексным является только предпоследний элемент главной диагонали, то значение неизвестной U_{N+1} легко находится из ее последних двух уравнений после выполнения обычной гауссовой процедуры исключения первых $2N$ неизвестных. Представляя это значение во вторую из формул (12), находим коэффициент прохождения звука через оболочку и величину ее звукоизоляции

$$R=-20\lg|B|. \tag{16}$$

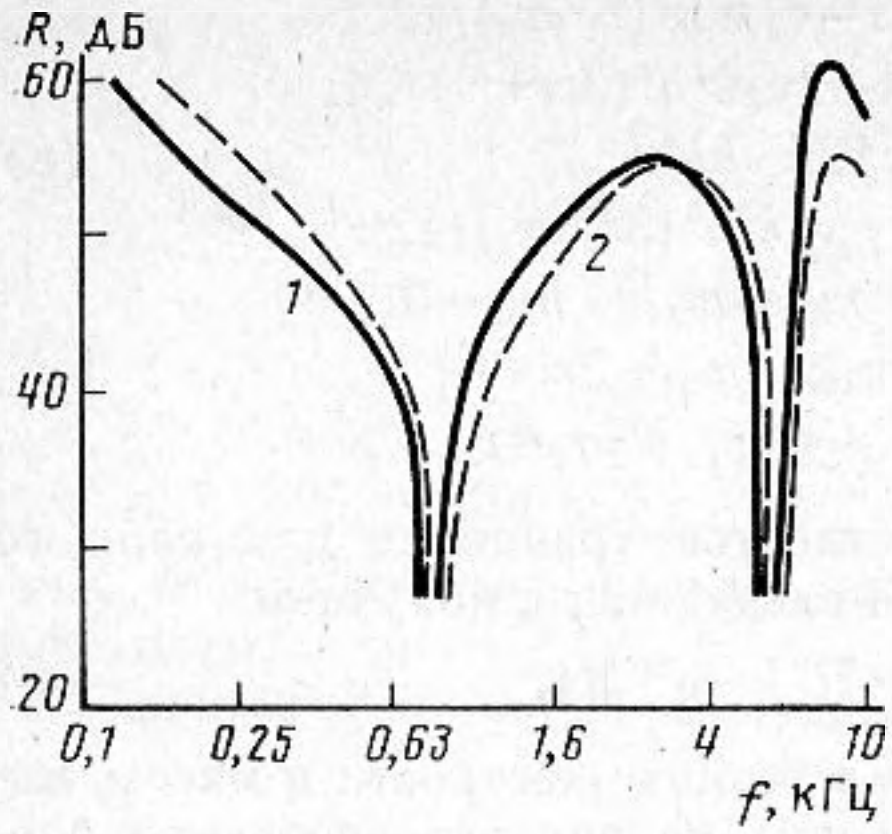

Рис. 1

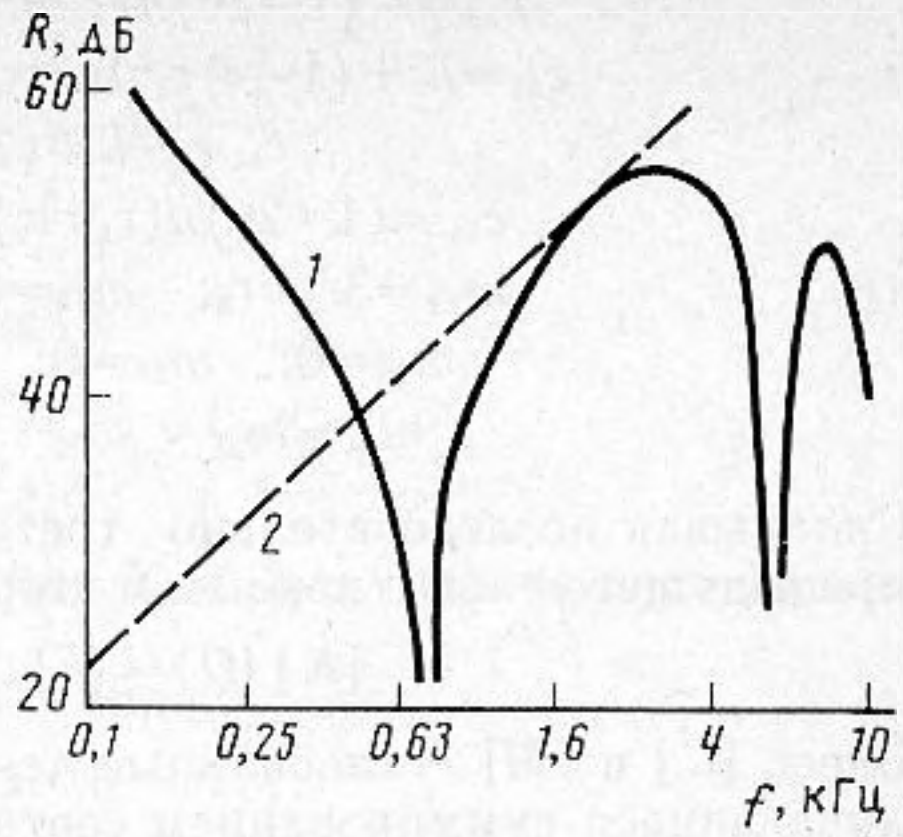

Рис. 2

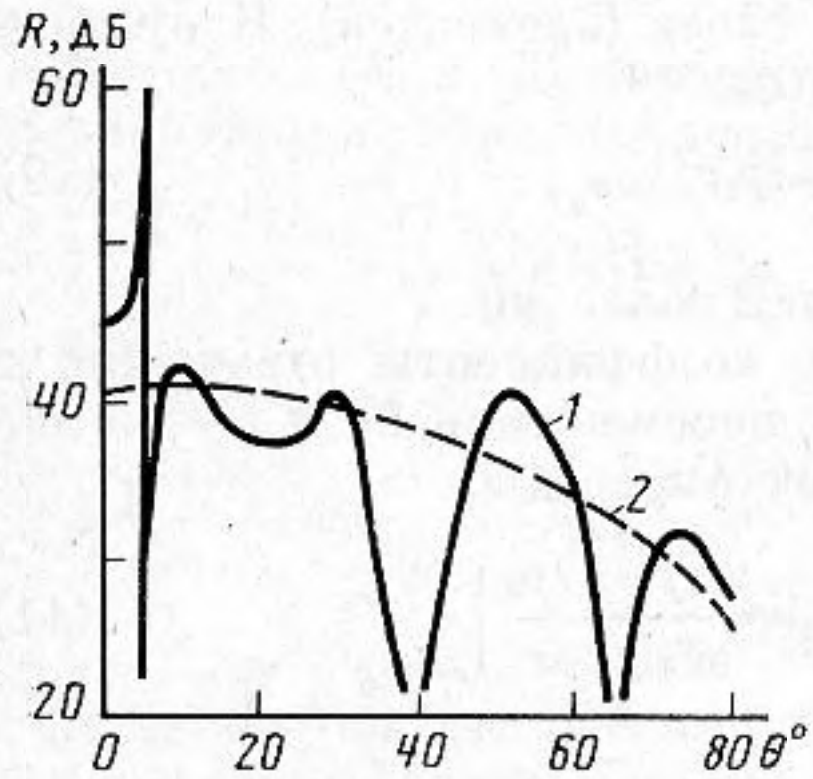

Рис. 3

Рис. 1. Частотные зависимости звукоизоляции трехслойных оболочек при нормальном падении волны: *1* – оболочка симметричного строения, $\delta_1=\delta_2=3\cdot10^{-3}$ м, *2* – несимметричного $\delta_1=10^{-2}$; $\delta_2=5\cdot10^{-5}$ м

Рис. 2. Частотные зависимости звукоизоляции при нормальном падении волны: *1* – для пятислойной оболочки, *2* – по закону массы

Рис. 3. Зависимость звукоизоляции от угла падения волны при $f=500$ Гц: *1* – для пятислойной оболочки, *2* – по закону массы

По изложенной теории проведен расчет звукоизоляции сложных оболочек с различным распределением составляющих материалов по толщине пакета. На рис. 1 показаны частотные зависимости звукоизоляции трехслойных оболочек с заполнителем из материала ПХВ ($E=5\cdot10^7$ нм$^{-2}$; $\nu=0{,}4$; $\rho=0{,}3\cdot10^3$ кгм$^{-3}$) толщиной $h=2\cdot10^{-2}$ М и алюминиевыми обшивками. Радиус срединной поверхности заполнителя $R=0{,}99$ М. Аналогичная кривая на рис. 2 получена для пятислойной оболочки, составленной из трех алюминиевых слоев толщиной $\delta=2\cdot10^{-3}$ м, разделенных между собой двумя слоями ПХВ толщиной $h=10^{-2}$ м каждый. Заметим, что толщина оболочки во всех трех случаях одинакова. Точность расчетов контролировалась путем сопоставления результатов, получаемых при увеличении числа элементов, которое в рассмотренном диапазоне частот изменялось от 6 до 12.

Из представленных результатов видно, что частотные характеристики звукоизоляции слоистых оболочек содержат два ярко выраженных провала. Первый из них, положение которого практически не зависит от распределения составляющих материалов по толщине пакета, обусловлен резонансными колебаниями оболочки как кольца. Частота этого резонанса (кольцевая частота) приближенно может быть найдена по формуле

$$\omega=R_{\text{ср}}\left[\sum_{i=1}^{n}E_ih_i\Big/\sum_{i=1}^{n}\rho_ih_i\right]^{1/2}, \qquad (17)$$

где $R_{\text{ср}}$ – срединный радиус оболочки, n – число слоев с параметрами E_i, ρ_i, h_i. Второй провал обусловлен резонансным взаимодействием масс несу-

щих слоев с упругостью разделяющих их низкопрочных слоев. Между указанными двумя частотами изменение звукоизоляции оболочки приближенно описывается известным законом массы (зависимость 2 на рис. 2). Кроме этого, в частотных характеристиках звукоизоляции оболочек имеются не показанные на рисунках минимумы, вызванные резонансными колебаниями столба воздуха внутри оболочки в направлении распространения расходящейся волны. Эти частоты находятся по формуле $\omega_n=\mu_n c_0/(R_в \cos\theta)$, где μ_n — последовательные корни уравнения $I_1(x)=0$.

На рис. 3 кривой *1* для частоты $f=500$ Гц показана зависимость звукоизоляции пятислойной оболочки от угла падения волны. Максимумы прохождения звука вблизи углов $\theta=5$, 42, 65° вызваны эффектом волнового совпадения и резонансами столба воздуха. С увеличением частоты возбуждения число резонансных максимумов прохождения в угловой характеристике звукоизоляции возрастает. При углах, отличных от углов полного прохождения, звукоизоляция оболочки приближается к кривой *2*, определяемой формулой

$$|B|^2=\left[1+\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\rho_i h_i}{2\rho_0 c_0}\cos\theta\right)^2\right]^{-1}.$$

В заключение отметим, что полученная по методу конечных элементов частотная характеристика звукоизоляции симметричной трехслойной оболочки практически совпадает с рассчитанной в работе [3] другим методом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильинский В. В.* Звукоизоляция трехслойных цилиндрических оболочек // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1974. № 7. С. 64–67.
2. *Ильинский В. В.* Звукоизоляция трехслойных цилиндрических оболочек со сжимаемым заполнителем // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1974. № 11. С. 12–18.
3. *Голоскоков Е. Г., Бешенков С. Н.* Упругоакустические задачи динамики трехслойных конструкций. Харьков: Вища школа, 1989. 120 с.
4. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов. М.: Мир, 1975. 541 с.
5. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.

Запорожский государственный университет

Поступила в редакцию 03.01.90

S. N. Beshenkov, M. I. Klemenko

ON CALCULATION OF SOUNDPROOFING OF INSIDE EXCITED MULTILAYER CYLINDRICAL SHELLS

Soundproofing of an infinite multilayer cylindrical shell, which is axisymmetrically excited on the inside, is considered. Displacement variation across a shell thickness is approximated by piecewise linear functions, which nodal values are determined by the finite elements method in the Galerkin's form. Frequency and angular dependences of shell soundproofing for different distributions of materials the shell consists of are investigated.