АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 1

УДК 534.222

© 1991 г.

О. В. Руденко, В. А. Хохлова

КИНЕТИКА ОДНОМЕРНЫХ ПИЛООБРАЗНЫХ ВОЛН

Получено кинетическое уравнение типа Больцмана для функции распределения шумового акустического поля, содержащего разрывы. Изучено влияние движения фронтов и их парных соударений на статистические и спектральные характеристики случайной пилообразной волны.

Среди задач статистической нелинейной акустики важное место занимает проблема описания акустической турбулентности — распространения интенсивных шумовых волн с широким спектром. Основное внимание здесь уделялось нахождению стационарных спектральных распределений или универсальных высокочастотных асимптотик [1]. Проводилось также изучение асимптотических вероятностных распределений на больших расстояниях с учетом многократного слияния разрывов [2].

Одним из методов статистического описания турбулентности является метод кинетических уравнений [2]. Однако до сих пор замкнутого кинетического уравнения для функции распределения пилообразных волн получить не удавалось.

В работах (3, 4) развит кинетический подход для описания функции распределения случайной последовательности «ступенеобразных» волн — стационарных решений уравнения Бюргерса. Обобщим его на случай пилообразных волн. Аналогичный подход ранее использовался в неволновых задачах статистической механики при описании турбулентности Бюргерса [5]. Предложенный в [3] метод позволяет получить замкнутое кинетическое уравнение для функции распределения и продвинуться далее (по сравнению с [5]) в построении аналитических решений. Основные идеи метода состоят в следующем.

Известно, что исходная шумовая волна с широким спектром в нелинейной среде трансформируется в последовательность треугольных импульсов со случайными сильно различающимися от импульса к импульсу параметрами, с движущимися и взаимодействующими друг с другом разрывами. Существует аналогия между взаимодействием попутных слабых ударных волн и газом абсолютно неупруго сталкивающихся частиц [6]. Воспользуемся ею для построения кинетического уравнения типа Больцмана для функции распределения шумового поля, содержащего разрывы.

Пусть при $x=0$ поле представляет собой случайную последовательность пилообразных волн, эволюция которых описывается уравнением Бюргерса (рис. 1)

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{c_0^2}u\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{b}{2c_0^3\rho_0}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}. \qquad (1)$$

Здесь u — колебательная скорость в волне, распространяющейся вдоль оси x, $\tau=t-x/c_0$ — время в бегущей системе координат, c_0 — скорость звука, ε, b — коэффициенты нелинейности и вязкости, ρ_0 — равновесная плотность среды; акустическое число Рейнольдса $\Gamma^{-1}=\varepsilon c_0\rho_0 m_0\tau_0/b\gg 1$, т. е. ши-

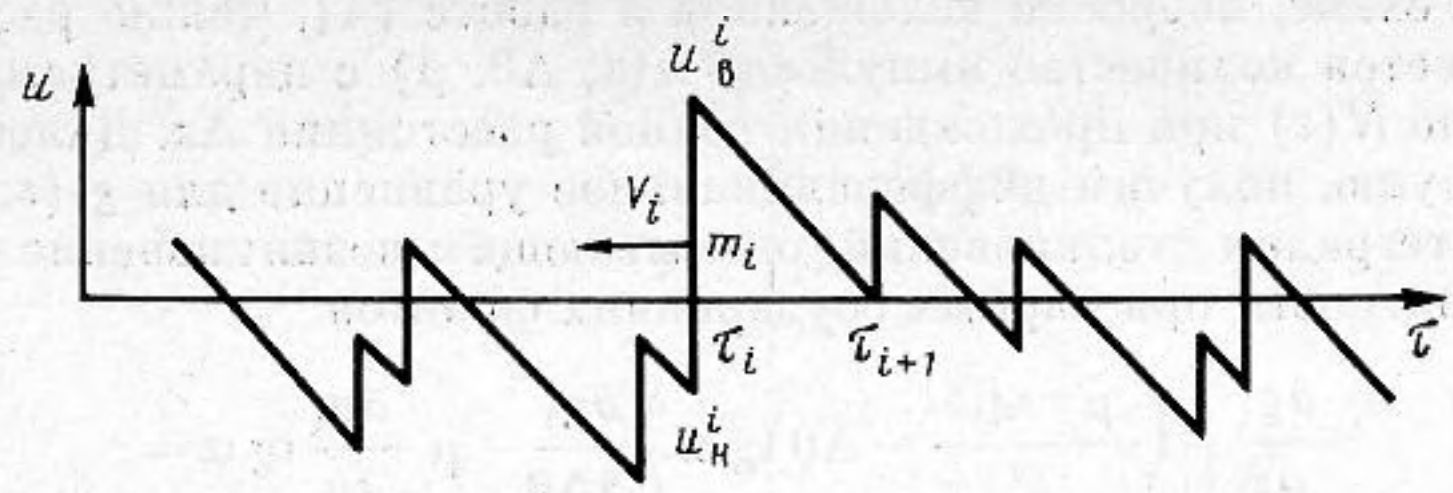

Рис. 1. Отрезок пилообразной волны, состоящей из последовательности треугольных импульсов со случайными параметрами: амплитудой слабых ударных фронтов $m_i = u_в^i - u_н^i$, где $u_в^i$ и $u_н^i$ – соответственно верхние и нижние значения скорости u на i-м разрыве, и интервалами $\Delta\tau_i = \tau_{i+1} - \tau_i$ между соседними разрывами. Скорость движения v_i каждого i-го фронта в сопровождающей системе координат $\tau = t - x/c_0$ определяется его положением относительно $u=0$: $v_i = -\varepsilon(u_в^i + u_н^i)/2c_0^2$

рина ударных фронтов много меньше, чем промежутки времени $\Delta\tau$ между разрывами.

В работе [7] было показано, что статистика отрицательных наклонов — пологих участков в случайной волне имеет тенденцию к «сглаживанию». Здесь будем считать, что пологие участки волны имеют одинаковый наклон.

Сопоставим амплитуде i-го ударного фронта (рис. 1) $(u_в^i - u_н^i)$ массу частицы m_i, а скорости его движения в сопровождающей системе координат $d\tau_i/dx$ – скорость частицы v_i. Рассмотрим сначала общие законы движения таких волн-частиц.

Согласно уравнению (1), частицы (ударные фронты) двигаются между столкновениями с постоянной скоростью: $d\tau_i/dx = -\varepsilon(u_в^i + u_н^i)/2c_0^2$. При столкновении двух разрывов с массами m_i и m_{i+1} и скоростями соответственно v_i и v_{i+1} образуется новый разрыв с параметрами, отвечающими законам сохранения «массы» и «импульса»: $m = m_i + m_{i+1}$; $mv = m_i v_i + m_{i+1} v_{i+1}$. Нелинейное поглощение энергии на разрывах приводит к «испарению» частиц – уменьшению массы m по закону $m(x) = m(x=0) \times (1 + \varepsilon m_0 x/c_0^2 \tau_0)^{-1}$, m_0, τ_0 – средние значения массы m и промежутков $\Delta\tau$ между «частицами» при $x=0$. Наклон пологих участков уменьшается с расстоянием как $\operatorname{tg}\alpha(x) = \langle m \rangle \tau_0 / \langle \Delta\tau \rangle m_0 = (1 + \varepsilon m_0 x/c_0^2 \tau_0)^{-1}$.

Таким образом, распространение случайной пилообразной волны можно рассматривать как одномерный поток «испаряющихся» частиц, двигающихся относительно потока c_0 со случайными скоростями и абсолютно неупруго сталкивающихся между собой.

Обратимся теперь к статистическому описанию такого процесса (рис. 1). Перейдем к безразмерным переменным: $\mu = m/m_0$, $\Delta\theta = \Delta\tau/\Delta\tau_0$, $z = x/x_н$, $x_н = c_0^2 \tau_0 / \varepsilon m_0$. Рассмотрим стациснарный случай, когда среднее значение поля $\langle u \rangle = \langle \sum_i (\mu_i - \Delta\theta_i \operatorname{tg}\alpha) \rangle = 0$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha(z=0) = 1$.

Пусть вероятность появления i-го фронта «массой» μ зависит только от промежутка времени $\Delta\theta$, прошедшего с момента возникновения предыдущего фронта, а интервалы $\Delta\theta_i$ независимы. Выделим достаточно длинный интервал θ, содержащий $N \gg 1$ фронтов. Плотность вероятности $g_1(z; \Delta\theta, \mu)$ можно определить как отношение числа треугольных импульсов с параметрами $(\Delta\theta, \mu)$ к общему их числу $N(z)$: $g_1(z; \Delta\theta, \mu) = n(z; \Delta\theta, \mu)/N(z)$. Ясно, что трансформация функции распределения g_1 по параметру μ будет происходить за счет «испарения» частиц и их столкновений – образования частиц большей массы. Изменение статистики интервалов $\Delta\theta$ происходит за счет движения – сближения и удаления фронтов друг от друга.

Следуя схеме, подробно изложенной в работе [4], можно рассмотреть, как изменяется количество импульсов $n(z;\ \Delta\theta,\ \mu)$ с параметрами $\Delta\theta$, μ и общее число $N(z)$ при прохождении волной расстояния Δz. Далее, устремляя Δz к нулю, получим дифференциальное уравнение для $g_1(z;\ \Delta\theta,\ \mu)=$ $=n/N$ с интегралом столкновений, описывающим возникновение — уничтожение вероятности при парных соударениях фронтов:

$$\frac{\partial g_1}{\partial z}-\left(\frac{\mu+\langle\mu\rangle}{2}-\Delta\theta\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)\frac{\partial g_1}{\partial\Delta\theta}-\mu\frac{\partial g_1}{\partial\mu}\mathrm{tg}\,\alpha=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\mu\int_0^{\mu}g_1(z;\Delta\theta,\mu')g_1(z;0,\mu-\mu')d\mu'-\right. \tag{2}$$
$$\left.-(\mu-\langle\mu\rangle)g_1(z;\Delta\theta,\mu)\int_0^{\infty}g_1(z;0,\mu')d\mu'\right\}$$
$$\langle\mu\rangle=\iint_0^{\infty}\mu g_1(z;\Delta\theta,\mu)d\Delta\theta\,d\mu;\qquad \mathrm{tg}\,\alpha(z)=(1+z)^{-1}.$$

Существенным моментом в получении кинетического уравнения (2) было предположение о независимости временных интервалов между разрывами. Это несколько ограничивает класс рассматриваемых задач, поскольку не любая исходная гладкая шумовая волна после образования разрывов будет обладать именно такой статистикой. Однако, с другой стороны, ясно, что, если спектр волны широк и время корреляции $\theta_к$ порядка нескольких интервалов между разрывами, то после их слияния корреляция с соседними участками волны будет слабой и можно считать промежутки $\Delta\theta$ между фронтами независимыми. Используемое приближение позволяет получить замкнутое уравнение (2) и выявить основные тенденции в трансформации вероятностных и спектральных характеристик, проявляющиеся и в более широком круге задач.

Рассмотрим общие свойства решений уравнения (2). Домножая (2) на величины N, μ, $\Delta\theta$ и усредняя, можно получить дифференциальные уравнения для средних значений параметров волны:

$$\frac{dN}{dz}=-NI,\qquad \frac{d\langle\mu\rangle}{dz}+\langle\mu\rangle\mathrm{tg}\,\alpha=\langle\mu\rangle I,$$
$$\frac{d\Delta\theta}{dz}+\langle\mu\rangle-\Delta\theta\,\mathrm{tg}\,\alpha=\langle\Delta\theta\rangle I, \tag{3}$$
$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\mu+\langle\mu\rangle)g_1(z;0,\mu)d\mu.$$

Из уравнений (3) следуют интегралы сохранения $M=\langle\mu\rangle N=M_0(1+z)^{-1}$; $T=\langle\Delta\theta\rangle N=T_0$ — полная «масса» зубцов уменьшается с расстоянием $\sim(1+z)^{-1}$, как и при бесстолкновительном движении, за счет «испарения»; полная длительность реализации сохраняется.

Уравнение (2) имеет точное решение, отвечающее входному пуассоновскому процессу

$$g_1(z=0;\Delta\theta,\mu)=\frac{1}{\Delta\theta}\exp(-\Delta\theta)g_0(z,\mu).$$

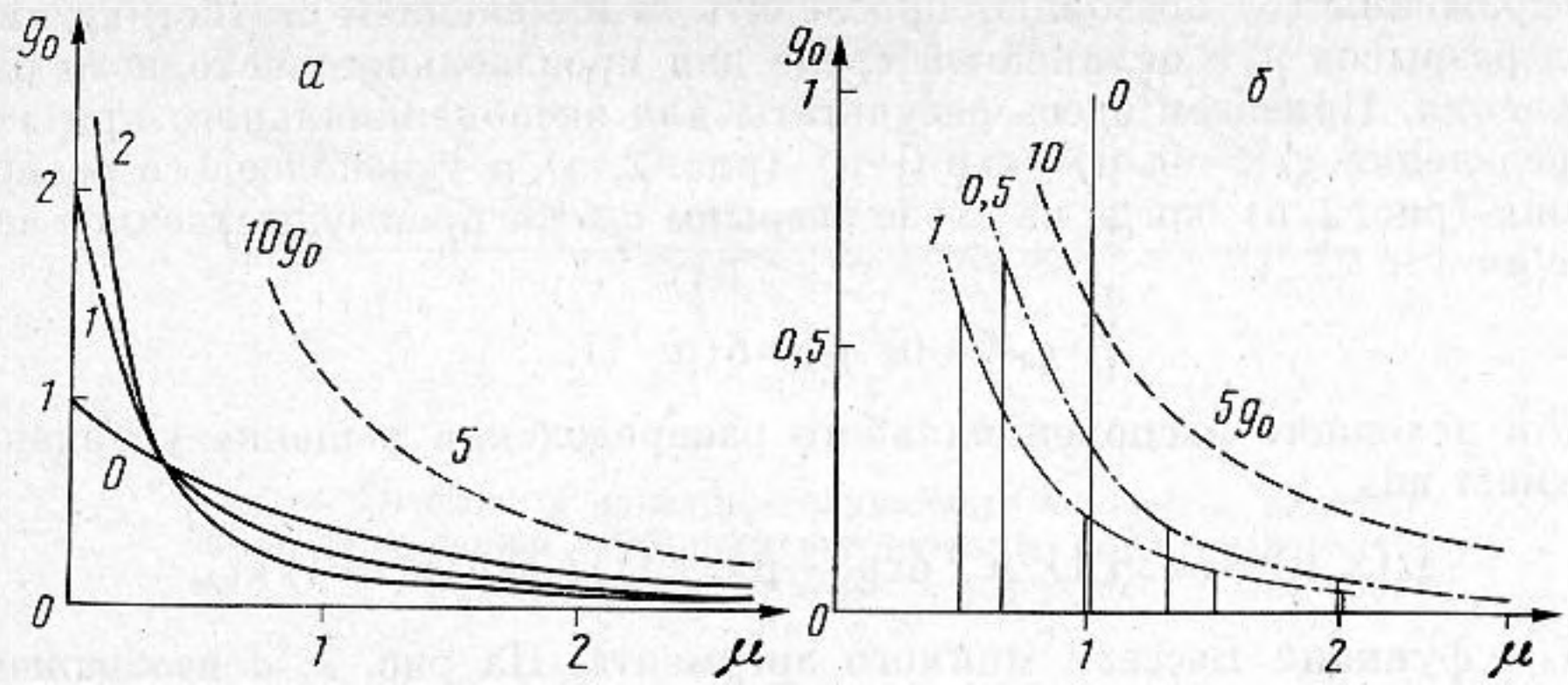

Рис. 2. Трансформация различных исходных функций распределения амплитуд разрывов в нелинейной среде. Цифры у кривых – значения безразмерного расстояния z: a – $g_0(z=0,\ \mu)=\exp(-\mu)$, $б$ – $g_0(z=0,\ \mu)=\delta(\mu-1)$. Штриховые линии – асимптотические функций распределения при $\mu z \gg 1$

Легко показать, что в среде функция распределения будет изменяться следующим образом:

$$g_1(z;\ \Delta\theta,\ \mu)=(1+z)^{-1}\exp(-\Delta\theta(1+z)^{-1}g_0(z,\ \mu),$$

$$(1+z)\frac{\partial g_0}{\partial z}-\mu\frac{\partial g_0}{\partial \mu}-(\mu-1)g_0=\frac{\mu}{2}\int\limits_0^{\mu} g_0(z,\mu')g_0(z,\mu-\mu')d\mu'. \qquad (4)$$

Уравнение (4) также можно решить точно. Для вспомогательной функции

$$f_0(\xi,\ \eta)=(1+z)^{-1}\exp(-\mu)g_0(z,\ \mu),\ \xi=(1+z)^{-1},\ \mu=\xi\eta,$$

переходя в (4) к новым переменным ξ, η, получим уравнение

$$\frac{\partial f_0}{\partial \xi}=-\frac{\eta}{2}\int\limits_0^{\eta} f_0(\xi,\eta')f_0(\xi,\eta-\eta')d\eta',$$

образ Лапласа которого удовлетворяет уравнению простых волн

$$\frac{\partial \tilde f_0}{\partial \xi}-\tilde f_0\frac{\partial \tilde f_0}{\partial s}=0, \qquad (5)$$

$$\tilde f_0(\xi,s)=\int\limits_0^{\infty} f_0(\xi,\eta)\exp(-s\eta)d\eta.$$

Преобразуя общее решение (5) $\tilde f_0(\xi,\ s)=\Phi(s-(1-\xi)\tilde f_0)$ по формуле Меллина и возвращаясь к обычным переменным z, μ, получим

$$g_0(z,\mu)=\frac{(1+z)e^{-\mu z}}{2\pi\mu z}\int\limits_0^{\infty}[e^{\mu z\Phi_1(k)}-1]e^{ik\mu(1+z)}dk,$$

$$\Phi_1(k)=\int\limits_0^{\infty} g_0(z=0,\mu)e^{-ik\mu}d\mu. \qquad (6)$$

Выражения (6) позволяют проследить за изменением статистики амплитуд разрывов μ в нелинейной среде для произвольного исходного распределения. Приведем здесь результаты для экспоненциального при $z=0$ распределения $g_0(z=0, \mu)=\exp(-\mu)$ (рис. 2, *а*) и узкополосного распределения (рис. 2, *б*), когда на входе разрывы имеют преимущественное значение $\mu=1$:

$$g_0(z=0, \mu)=\delta(\mu-1).$$

Для исходного экспоненциального распределения решение уравнения (4) имеет вид

$$g_0(z, \mu)=(z/z+1)^{1/2}\mu^{-1}\exp(-\mu(z+1))I_1(2\mu(z(z+1))^{1/2}),$$

где I_1 — функция Бесселя мнимого аргумента. На рис. 2, *а* изображены зависимости функции распределения $g_0(z, \mu)$ от параметра μ на различных расстояниях z (цифры у кривых). Штриховая линия — увеличенное в 10 раз асимптотическое распределение, формирующееся при $\mu z \gg 1$: $g_0=(\pi z)^{-1/2}\mu^{-3/2}\exp(-\mu/4z)/2$.

Если при $z=0$ все разрывы имели амплитуду $\mu=1$, то при $z>0$, как следует из (6), функция распределения будет представлять собой набор равноотстоящих друг от друга δ-функций:

$$g_0(z, \mu)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\delta\left(\mu-\frac{n}{z+1}\right), \quad A_n=\frac{(nz/(z+1))^{n-1}\exp(-nz/(z+1))}{n!}. \tag{7}$$

Как видно из выражений (7), столкновения разрывов приводят к образованию фронтов двух-, трех- и т. д. кратной амплитуды и одновременно амплитуда каждого фронта уменьшается на фактор $(1+z)^{-1}$ вследствие нелинейного поглощения. На рис. 2, *б* амплитуды A_n для $n=1, 2, 3, 4$ изображены отрезками соответствующей высоты и соединены штрихпунктирной линией. При увеличении расстояния промежутки между δ-функциями уменьшаются $\sim z^{-1}$ и можно перейти к непрерывному распределению (при $\mu z \gg 1$): $g_0=(2\pi z)^{-1/2}\mu^{-3/2}\exp(-\mu/2z)$ — штриховая линия на рис. 2, *б*. Используя общее решение (6), можно показать, что асимптотика $g_0(z, \mu)\sim z^{-1/2}\mu^{-3/2}\exp(-\mu/\alpha z)$ при $\mu z \gg 1$ формируется для произвольного исходного распределения $g_0(z=0, \mu)$.

Основные тенденции трансформации функций распределения в нелинейной среде состоят в увеличении плотности вероятности для больших и малых значений μ и уменьшении вероятности в серединной части распределения. Рост вероятности малых значений μ обусловлен нелинейным затуханием энергии на разрывах. Основной вклад здесь вносят отрезки реализации, на которых поле в среднем уменьшается и столкновения происходят редко (рис. 3, *а*).

Увеличение плотности вероятности $g_0(z, \mu)$ при больших значениях μ обусловлено процессом слияния разрывов и образования фронтов суммарной амплитуды, что сильнее всего выражено на участках реализации, где поле в среднем увеличивается, фронты догоняют друг друга, и столкновения происходят достаточно часто (рис. 3, *б*). Взаимное влияние этих двух конкурирующих эффектов приводит к тому, что среднее значение $\langle\mu\rangle$ остается постоянным, а дисперсия $\langle\mu^2\rangle=\langle\mu^2\rangle_0(1+z)$ линейно растет (этот результат справедлив для произвольного при $z=0$ распределения).

При выводе кинетического уравнения фронты предполагались бесконечно крутыми, что соответствует бесконечно большим числам Рейнольдса $\Gamma^{-1}\to\infty$. Для больших, но конечных чисел Рейнольдса, форму волны можно описать как суперпозицию разрывов конечной ширины — стационар-

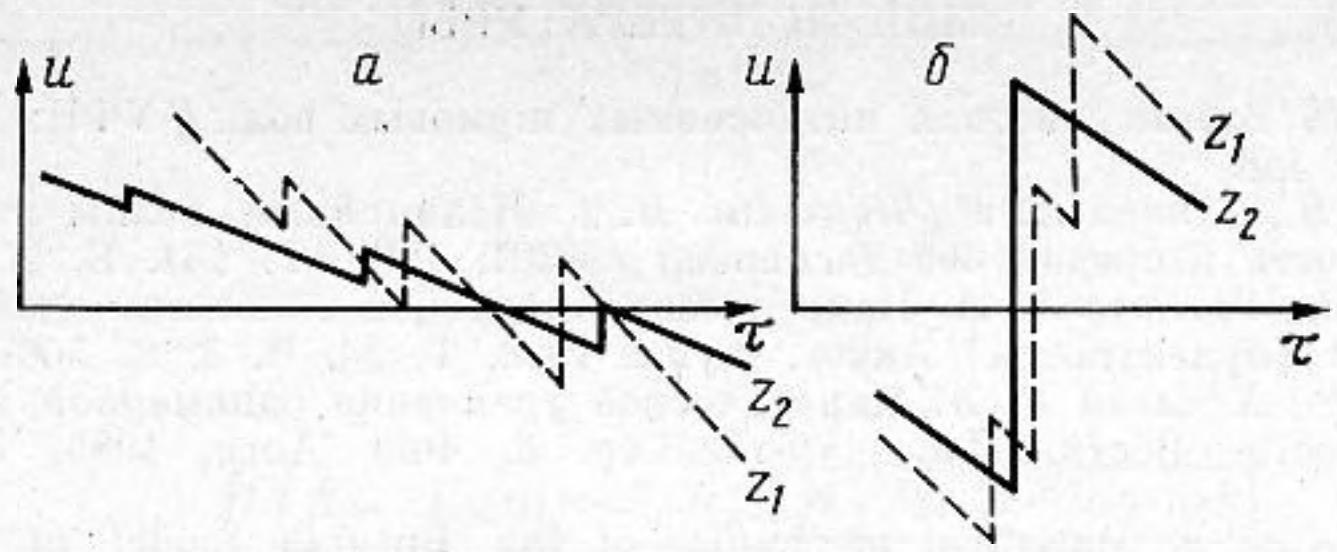

Рис. 3. Отрезки реализации случайного процесса, ведущие *а* – к увеличению плотности вероятности для малых значений μ, *б* – к увеличению плотности вероятности для больших μ

ных решений уравнения Бюргерса и линейного профиля

$$u(z,\theta)=\sum_i \frac{\mu_i}{2}\,\mathrm{th}\left[\frac{\mu_i(\theta-\theta_i)}{2\Gamma}\right]-\theta\,\mathrm{tg}\,\alpha;\qquad \mathrm{tg}\,\alpha=(1+z)^{-1}. \tag{8}$$

Эволюция такой последовательности за счет движения разрывов (изменения θ_i), столкновений и нелинейного затухания (изменения μ_i и $\mathrm{tg}\,\alpha(z)$) будет происходить по тем же законам, что и в случае бесконечно крутых фронтов. Статистика $\Delta\theta$, μ будет меняться согласно уравнению (2).

Используя представление (8) и учитывая предположение о пуассоновском характере процесса, получим выражение для спектра интенсивности

$$G(\omega)=2\pi^3\Gamma^2(1+z)^{-1}\int_0^\infty g_0(z,\mu)\,\mathrm{sh}^{-2}\left[\frac{\pi\omega\Gamma}{\mu}\right]d\mu. \tag{9}$$

Для нахождения спектра (9) воспользуемся полученной выше автомодельной асимптотикой $g_0(z,\mu)$, формирующейся при $\mu z\gg 1$ для произвольного исходного распределения $g_0(z=0,\mu)$. Легко показать, что в спектре случайной пилообразной волны можно выделить два характерных участка. В частотном диапазоне $\omega\ll(\pi\Gamma)^{-1}$ универсальная зависимость $G(\omega)\sim\omega^{-2}$, как и в случае регулярной волны, обусловлена крутыми участками профиля; в области $\omega\gg(\pi\Gamma)^{-1}$ асимптотика переходит в экспоненциальную $z^{-3/2}\omega^{-1/2}\exp(-(\omega/z)^{1/2})$ – отличающуюся от спектра регулярной пилообразной волны ($G(\omega)\sim\exp(-\alpha\omega z)$). Более медленное уменьшение спектра на высоких частотах в случайной волне объясняется влиянием разрывов большой амплитуды, в спектре которых характерная частота перехода степенной зависимости $\sim\omega^{-2}$ в экспоненциальную растет с ростом μ.

Полученные результаты согласуются с выводами работы [8], где было также показано, что из-за флуктуаций ширины разрывов спектр шума в среде с затуханием спадает на высоких частотах медленнее, чем спектр регулярной пилообразной волны. Однако в работе [8] было получено, что спектр затухает как $\sim\exp(\sim\omega^{2/3})$. Отличие связано с использованием различных функций распределения $g_0(z,\mu)$, с помощью которых проводилось усреднение спектра.

Выше было рассмотрено лишь одно частное решение уравнения (2). Существует возможность построения других решений, а также обобщения уравнения (2) на более общий случай существования статистической связи между интервалами $\Delta\theta_i$.

Авторы благодарны С. Н. Гурбатову за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Руденко О. В.* Взаимодействия интенсивных шумовых волн // УФН. 1986. Т. 149. В. 3. С. 413–448.
2. *Гурбатов С. Н., Саичев А. И., Якушкин И. Г.* Нелинейные волны и одномерная турбулентность в средах без дисперсии // УФН. 1983. Т. 141. В. 2. С. 221–255.
3. *Руденко О. В., Хохлова В. А.* Кинетический подход к описанию одномерной акустической турбулентности // Акуст. журн. 1988. Т. 34. В. 3. С. 500–506.
4. *Руденко О. В., Хохлова В. А.* Кинетическое уравнение одномерной акустической турбулентности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астр. 1989. Т. 30. № 4. С. 64–69.
5. *Tatsumi T., Kida S.* Statistical mechanics of the Burgers model of turbulence // J. Fluid Mech. 1972. V. 55. P. 659–675.
6. *Burgers J. M.* // Statistical models and turbulence/Ed. M. Rosenblatt and C. Van Atta, Springer, 1972.
7. *Watanabe Y., Urabe Y.* Changes of zero crossing slopes of a finite-amplitude noise propagation in a tube // Jap. J. Appl. Phys. 1981. V. 20. S. 20–3. P. 35–39.
8. *Гурбатов С. Н., Саичев А. И.* Вырождение одномерной акустической турбулентности при больших числах Рейнольдса // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. № 2. С. 689–703.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
20.04.90

O. V. Rudenko, V. A. Khokhlova

KINETICS OF ONE-DIMENSIONAL SAWTOOTH WAVES

The kinetic equation of the Boltzmann's type for the distribution function of an acoustic field with shocks is obtained. The effect of the shocks motion and theirs pair collisions on the statistics and spectral characteristics of random sawtooth waves is investigated on the basis of this equation. The evolution of different distribution functions in a nonlinear medium is considered, the equations for mean values of wave parameters are obtained and asymptotic expressions for an intensity spectrum in a high-frequency area taking into account the finite width of shock fronts are determined.