АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 1

УДК 534.222.2

© 1991 г.

З. А. Гольдберг

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОДНОМЕРНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ СТОЯЧИХ ВОЛН В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

Рассматриваются особенности резонансного взаимодействия стоячих продольных волн с поперечными и продольными стоячими волнами в плоскопараллельном слое изотропного твердого тела. Полученные результаты используются для анализа процесса термолизации нелинейной цепочки с квадратичной нелинейностью (модель Ферми – Паста – Улама).

Известно, что учет нелинейных членов в уравнениях движения изотропного твердого тела приводит к взаимодействию акустических волн. При выполнении условий временного и пространственного синхронизма эти взаимодействия имеют резонансный характер. При возбуждении продольной стоячей волны в плоскопараллельном слое изотропного твердого тела возможно резонансное параметрическое взаимодействие с ней спонтанно возникающих как продольных, так и поперечных стоячих волн. В силу различия скоростей распространения продольных и поперечных волн условия синхронизма разрешают резонансное взаимодействие продольной с двумя поперечными стоячими волнами. Взаимодействие же продольных волн при отсутствии дисперсии и эквидистантности спектра собственных частот характеризуется так называемым массовым синхронизмом, что значительно усложняет анализ такого взаимодействия.

В данной работе аналитически рассмотрена одномерная задача о параметрическом резонансном взаимодействии продольной волны накачки с двумя поперечными стоячими волнами в приближении заданного поля волны накачки. Проведен сравнительный численный анализ процесса взаимодействия одномерных продольных стоячих волн в изотропном твердом теле и в дискретной нелинейной цепочке частиц и его влияния на процесс термализации цепочки (установления равнораспределения кинетической энергии частиц).

Нелинейные уравнения движения изотропного твердого тела можно записать в виде [1]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{1}$$

где ρ_0 — плотность недеформированного тела, $\mathbf{u}$ — вектор деформации, t — время,

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial U}{\partial (\partial u_i / \partial x_k)}$$

dU — изменение внутренней энергии при адиабатических процессах, x_k — пространственные координаты Лагранжа. Чтобы получить уравнения движения с точностью до кубических членов включительно относительно $\partial u_i/\partial x_k$, необходимо знать общее выражение U с учетом членов до четвертой степени включительно по тензору деформации u_{ik}. Соответ-

ствующее выражение для упругой энергии изотропного твердого тела возьмем в следующем виде [2—4]:

$$U=\mu u_{ik}^2+\left(\frac{K}{2}-\frac{\mu}{3}\right)u_{ee}^2+\frac{A}{3}u_{ik}u_{ie}u_{ke}+Bu_{ik}^2u_{ee}+\frac{c}{3}u_{ee}^3+Du_{ik}u_{ie}u_{jk}u_{je}+$$
$$+E(u_{ik}^2)^2+Fu_{ik}u_{ie}u_{ke}u_{ee}+Gu_{ik}^2u_{ee}^2+Hu_{ee}^4, \qquad (2)$$

где μ — модуль сдвига, K — модуль сжатия, A, B, C — модули третьего порядка, D, E, F, G, H — модули четвертого порядка.

Подставив в уравнение (1) выражение (2) и точное значение тензора деформации

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial u_e}{\partial x_i}\frac{\partial u_e}{\partial x_k}\right),$$

получим уравнения движения относительно вектора деформации.

В частном случае плоских одномерных волн, когда

$$\mathbf{u}(x,t)=\mathbf{i}u_x(x,t)+\mathbf{j}u_y(x,t)+\mathbf{k}u_z(x,t),$$

уравнения движения примут следующий вид:

$$\rho_0\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2}-\left(K+\frac{4}{3}\mu\right)\frac{\partial^2u_x}{\partial x^2}=\gamma\frac{\partial^2u_x}{\partial x^2}\frac{\partial u_x}{\partial x}+\gamma_1\left(\frac{\partial^2u_y}{\partial x^2}\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial^2u_z}{\partial x^2}\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)+$$
$$+6\gamma_2\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2u_x}{\partial x^2}+\gamma_3\left\{\frac{\partial^2u_x}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2\right]+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial u_x}{\partial x}\left(\frac{\partial^2u_y}{\partial x^2}\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial^2u_z}{\partial x^2}\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\right\}, \qquad (3)$$

$$\rho_0\frac{\partial^2u_y}{\partial t^2}-\mu\frac{\partial^2u_y}{\partial x^2}=\gamma_1\left(\frac{\partial^2u_y}{\partial x^2}\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial^2u_x}{\partial x^2}\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)+$$
$$+\gamma_3\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2u_y}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2u_x}{\partial x^2}\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial x}\right]+2\gamma_4\left\{\frac{\partial^2u_y}{\partial x^2}\left[3\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2\right]+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial^2u_z}{\partial x^2}\frac{\partial u_z}{\partial x}\right. . \qquad (4)$$

Здесь

$$\gamma=3\left(K+\frac{4}{3}\mu\right)+2A+6B+2C, \qquad \gamma_1=K+\frac{4}{3}\mu+\frac{A}{2}+B,$$
$$\gamma_2={}^1/_4(K+{}^4/_3\mu)+A+3B+C+2(D+E+F+G+H),$$
$$\gamma_3={}^1/_2(K+{}^4/_3\mu)+{}^5/_4A+{}^7/_2B+C+2D+2E+{}^3/_2F+G,$$
$$\gamma_4={}^1/_4(K+{}^4/_3\mu)+A/4+B/2+D/4+E/2.$$

Заменив в уравнении (4) индекс y на z, а z на y, получим проекцию уравнения движения на ось OZ.

При учете необратимых процессов, вызванных наличием градиентов скоростей движущейся среды, в уравнениях (3)—(4) появятся слагаемые, по виду совпадающие с соответствующими членами уравнений движения жидкостей, обусловленными вязкостью среды [1]. Поэтому для учета диссипативных процессов в левую часть уравнения (3) необходимо ввести слагаемое $-\rho_0\beta_1\frac{\partial^3u_x}{\partial t\,\partial x^2}$, а в левую часть уравнения (4) — $-\rho_0\beta_2\frac{\partial^3u_y}{\partial t\,\partial x^2}$. В уравнении (3) слагаемыми аналогичного вида должны

учитываться необратимые процессы теплопроводности, вызываемые градиентами температуры, обусловленными продольными смещениями среды.

Наиболее простой оказывается задача о параметрическом резонансном взаимодействии продольной волны накачки с двумя поперечными стоячими волнами в плоскопараллельном слое изотропного твердого тела. Рассмотрим процесс возбуждения двух поперечных стоячих волн, продольной при следующем граничном условии для продольного смещения:

$$\left.\frac{\partial u_x}{\partial x}\right|_{x=0}=p_0+p\sin(\omega t-\varphi),\qquad u_x(L,t)=0,$$

и нулевых граничных условиях для поперечного смещения:

$$u_y(0,t)=u_y(L,t)=u_z(0,t)=u_z(L,t)=0.$$

Решая линеаризованное уравнение (3) с учетом диссипативного слагаемого, получим

$$u_x=p_0(x-L)+u'[\sin k(L-x)\operatorname{ch}\alpha(L-x)\cos\omega t+$$
$$+\cos k(L-x)\operatorname{sh}\alpha(L-x)\sin\omega t],$$

где

$$u'=p/k\sqrt{\cos^2 kL+\operatorname{sh}^2\alpha L},\qquad k=\omega/c_e,$$
$$c_e=\sqrt{(K+{}^4/_3\mu)/\rho_0},\qquad \alpha=\beta_1\omega^2/2c_e^3.$$

Слагаемое с p_0 учитывает статическую всестороннюю деформацию тела. Оно приводит лишь к изменению параметров среды. Так, скорости продольной и поперечной волн будут соответственно равны

$$c_e=\sqrt{(K+{}^4/_3\mu+\gamma p_0)/\rho_0},\qquad c_t=\sqrt{(\mu+\gamma_1 p_0)/\rho_0},$$

а собственные частоты ω_0 продольных стоячих волн определяются условием

$$\cos(\omega_0 L/c_e)=0.$$

Решение уравнения (4) с учетом линейных, квадратичных и диссипативного слагаемых будем искать в виде

$$u_y=\sum_{i=1}^{2}f_i(t)\sin k_{i0}x.$$

Применяя метод Бубнова — Галеркина, получим следующую систему двух связанных уравнений Матье:

$$\frac{d^2f_1}{dt^2}+\alpha_1\frac{df_1}{dt}+\omega_{10}^2f_1+(F_{11}f_1+F_{21}f_2)\cos\omega t=0,$$
$$\frac{d^2f_2}{dt^2}+\alpha_2\frac{df_2}{dt}+\omega_{20}^2f_2+(F_{22}f_2+F_{12}f_1)\cos\omega t=0,$$

где

$$\alpha_i=\beta_2k_{i0}^2,\qquad k_{i0}=\omega_{i0}/c_t,\qquad \sin k_{i0}L=0\qquad (i=1,2),$$

$$F_{ie}=\frac{\gamma_1u'kk_{i0}}{2\rho_0}[(k_{i0}-k)\psi(k_{i0}-k,k_e)+(k_{i0}+k)\psi(k_{i0}+k,k_e)],$$

$$\psi(b_1,b_2)=\frac{2}{L}\int_0^L\sin b_1x\sin b_2x\,dx.$$

Учитывая следующие условия временного и пространственного синхронизма:

$$\omega=\omega_1+\omega_2=\omega_{10}+\omega_{20}+\delta, \quad k=k_{10}-k_{20}+\varkappa,$$

где

$$\omega_1=\omega_{10}+\delta_1, \quad \omega_2=\omega_{20}+\delta_2, \quad \delta=\delta_1+\delta_2,$$

$\varkappa$ — расстройка условия пространственного синхронизма, получим

$$F_{ii}=\frac{\gamma_1 p k_{i0}^2}{\rho_0\sqrt{\cos^2 kL+\operatorname{sh}^2 \alpha L}} f_{ii},$$

$$f_{ii}=\frac{\sin kL}{kL}\,\frac{4k_{i0}^2L^2-2k^2L^2}{4k_{i0}^2L^2-k^2L^2},$$

$$F_{12}=F_{21}=\frac{\gamma_1 p k_{10}k_{20}}{\rho_0\sqrt{\cos^2 kL+\operatorname{sh}^2 \alpha L}} f_{12},$$

$$f_{12}=\frac{\sin \varkappa L}{\varkappa L}\,\frac{2k(2k_{10}k_{20}+\varkappa^2-2k\varkappa)}{(2k-\varkappa)(2k_{10}+\varkappa)(2k_{20}-\varkappa)}.$$

Для u_z все аналогично.

Условие параметрического возбуждения поперечных волн имеет вид [5]

$$\frac{F_{12}^2}{\omega_{10}\omega_{20}}=\frac{\gamma_1^2 p^2 f_{12}^2\omega_{10}\omega_{20}}{\rho_0^2 c_t^4(\cos^2 kL+\operatorname{sh}^2 \alpha L)}\geqslant 4\delta^2\left[1-\frac{(\alpha_2-\alpha_1)^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\right]+4\alpha_1\alpha_2. \qquad (5)$$

При знаке равенства условие (5) определяет порог комбинационного параметрического резонанса. В случае главного параметрического резонанса ($k_{10}=k_{20}$) соответствующее условие имеет вид

$$\frac{F_{11}^2}{4\omega_{10}^2}=\frac{\gamma_1^2 p^2 f_{11}^2\omega_{10}^2}{4\rho_0^2 c_t^4(\cos^2 kL+\operatorname{sh}^2 \alpha L)}=\delta^2+\alpha_1^2.$$

Наилучшие условия для главного параметрического резонанса сводятся к близости ω к собственной продольной частоте и одновременно к удвоенной собственной частоте поперечной волны, а также к требованию наименьшего значения расстройки пространственного синхронизма ($\varkappa L=kL=\pi/2$). Оптимальные параметры для возбуждения комбинационного параметрического резонанса определяются требованиями

$$kL=(2n-1)\pi/2$$

и одновременно

$$kL\approx\frac{\omega_{10}+\omega_{20}}{c}L=\frac{c_t}{c}(n_1+n_2)\pi \qquad (k_{10}L=n_1\pi,\ k_{20}L=n_2\pi).$$

Распространение и взаимодействие одномерных продольных волн в жидкости и в изотропном твердом теле описываются уравнениями, различающимися только коэффициентами. Поэтому все процессы в этих средах качественно подобны. Естественно попытаться выяснить, какие результаты, известные для одномерных стоячих нелинейных волн в указанных сплошных средах [6—10], должны иметь место и для дискретных ограниченных нелинейных цепочек частиц.

Рассмотрим одномерную цепочку, описываемую следующим уравнением с квадратичной нелинейностью:

$$\frac{d^2y_i}{dt^2}=(y_{i+1}+y_{i-1}-2y_i)+\alpha[(y_{i+1}-y_i)^2-(y_i-y_{i-1})^2], \quad i=1,2,\ldots,n, \qquad (6)$$

которое неоднократно исследовалось в связи с проблемой Ферми — Паста — Улама. Здесь $y_i(t)$ — смещение i-й частицы цепочки от некоторого

среднего положения $y_{i,0}$, причем $y_{i+1,0}-y_{i,0}=l$. Приведем в соответствие уравнению (6) бездиссипационное уравнение для продольных колебаний изотропного твердого тела, учитывающее только квадратичную нелинейность, следующее из (3):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_l^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\gamma}{\rho_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{7}$$

где $u=u_x$. Вводя безразмерные переменные

$$\bar{u}=u/u_0,\quad \bar{x}=x/l,\quad t=t/(l/c_l).$$

и заменяя частные производные по x в уравнении (7) разностными отношениями с шагом по оси OX, равным l, в безразмерной форме уравнение (7) можно привести к виду уравнения (6) с коэффициентом $\alpha=\gamma u_0/(2\rho_0 l c_l^2)$. Таким образом, решения одной и той же задачи, полученные на основе уравнений (7) и (6), должны быть связаны соотношением (ср. [11])

$$y_i=\frac{1}{u_0}u(t, y_{i,0}).$$

Однако следует иметь в виду, что при переходе от сплошного к дискретному случаю могут теряться и приобретаться новые качества [12, 13]. Так, продольные колебания сплошной среды в рассматриваемом случае, в отличие от колебаний частиц цепочки, имеют эквидистантный спектр частот собственных колебаний. Аналитическое решение уравнения (7) для первоначально синусоидальной стоячей волны приводит к неограниченному искажению формы волны. Только учет диссипативных процессов предотвращает образование ударных волн с нулевой шириной и явление «захлестывания». В одномерной же цепочке соответствующие процессы должны предотвращаться взаимодействием колебаний частиц, которое и ответственно за диссипацию энергии в сплошной среде, моделируемой цепочкой. Поэтому, вообще говоря, результаты для y_i, полученные на основе решений уравнения (7), нуждаются в установлении их границ применимости.

Будем искать решение уравнения (7) в виде

$$u=u_0\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i}[a_i(t)\cos i\omega t+b_i(t)\sin i\omega t]\sin ik(x-L) \tag{8}$$

с некоторыми начальными условиями, a_{i0} и b_{i0}, и следующими граничными условиями: $u(0, t)=u(L, t)=0$. Удовлетворяя граничным условиям требованием $kL=\pi$, получим эквидистантный спектр собственных частот $\omega_i=i\omega$. Подставив выражение (8) в уравнение (7) после соответствующей обработки по методу гармонического баланса стоячих волн, а также пренебрегая слагаемыми, содержащими вторые производные по времени от коэффициентов a_i и b_i, получим систему $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных a_i, b_i. В результате удается исключить из дальнейшего численного анализа задачи быстропеременную часть смещения, что должно значительно сократить машинное время, необходимое для доведения расчетов до достижения состояния термализации. Естественно ожидать, что благодаря ошибкам численного счета, имитирующим флуктуации в моделируемой реальной среде, при любых начальных условиях должен осуществиться процесс термализации цепочки. Однако при одночастотном начальном возбуждении системы за практически разумное число временных шагов не удается обнаружить тенденции к установлению термализации цепочки. Это известный результат для проблемы ФПУ. Надо иметь в виду, что при таких начальных условиях процесс термализации должен пройти стадию возбужде-

ния колебаний всех частиц, затем благодаря ошибкам численного счета — стадию хаотизации сдвига фаз между колебаниями различных частиц. Только после этого можно ожидать эффективного протекания процесса термализации. Заметим, что в реальных системах возмущения вводятся в равновесную систему именно в такой ситуации.

Был проведен качественный анализ факторов, влияющих на процесс термализации цепочки. Численно исследовалось поведение цепочки из начального состояния равных амплитуд ($\sqrt{a_{i0}^2+b_{i0}^2}$) и произвольного сдвига фаз между различными модами системы. При таких начальных условиях удавалось осуществить процесс термализации цепочки. Так, при $N=n=3$ за несколько десятков тысяч временных шагов удается добиться состояния термализации с различием средней кинетической энергии частиц менее 1%. Вводимое в эту термализованную систему одночастотное возмущение с амплитудой, в 3—5 раз больше начальной, за количество временных шагов того же порядка рассасывалось и в системе устанавливался новый уровень термализации. Аналогичные процессы удавалось создавать при $N=8$ и $n=3$, а также при $N=64$ и $n=3$ или 8, причем при фиксированном числе n и увеличении числа N процесс термализации ускорялся. Отметим, что численный счет с бóльшей ошибкой счета, как и следовало ожидать, способствует более быстрой термализации системы.

При строгом анализе процесса термализации необходимо, конечно, учитывать процессы взаимодействия продольных и поперечных волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. Изд. 4-е. Испр. и доп. М.: Наука, 1987. С. 246.
2. *Гольдберг З. А.* О взаимодействии плоских продольных и поперечных упругих волн // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 3. С. 307–310.
3. *Конюхов Б. А., Шалашов Г. М.* Об эффектах третьего приближения при распространении упругих волн в изотропных твердых телах. Генерация высших гармоник // ПМТФ. 1974. № 4. С. 125–132.
4. *Гольдберг З. А.* Параметрические явления в поле стоячих упругих волн // VI Междунар. симпоз. по нелинейной акустике. Тез. докл. М.: Изд-во МГУ, 1975. С. 430–433.
5. *Гольдберг З. А.* О комбинационном параметрическом резонансе // Прикладная и теоретическая физика. Алма-Ата: КазГУ, 1978. С. 30–34.
6. *Эйхенвальд А. А.* Акустические волны большой амплитуды // УФН. 1934. Т. 14. Вып. 5. С. 552–585.
7. *Андреев Н. Н.* О стоячих звуковых волнах большой амплитуды // Исследования по экспериментальной и теоретической физике. Памяти Г. С. Ландсберга. М.: Наука, 1959. С. 53–55.
8. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах // УФН. 1970. Т. 102. Вып. 4. С. 549–586.
9. *Канер В. В., Карабутов А. А., Руденко О. В.* Нелинейные эффекты в акустических резонаторах // Нелинейная акустика. Горький: ИПФ АН СССР, 1980. С. 98–107.
10. *Гольдберг З. А.* Параметрическая неустойчивость нелинейных плоских стоячих волн в жидкости // Проблемы нелинейной акустики. XI Междунар. симпоз. по нелинейной акустике. Ч. 1. Новосибирск: СО АН СССР, 1987. С. 154–158.
11. *Филимонов М. Ю.* О решении нелинейного волнового уравнения в случае струны с закрепленными концами // Точные и приближенные методы исследования задач механики сплошной среды. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983. С. 97–104.
12. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988. С. 368.
13. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. С. 608.

Казахский государственный университет им. С. М. Кирова

Поступила в редакцию 26.03.90

Z. A. Goldberg

INTERACTION OF ONE-DIMENSIONAL ACOUSTIC STANDING WAVES IN A SOLID

Pecularities of the standing longitudinal waves resonance interaction with longitudinal and transverse standing waves in a plane – parallel layer of an isotropic solid are considered. Results obtained for the longitudinal standing waves interaction in a solid are used for analyzing the nonlinear chain thermalization process with quadratic nonlinearity (the Fermi – Pasta – Ulam model).