АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 2

УДК 534+551.463.21

© 1991 г.

Ф. М. Исмагилов, Ю. А. Кравцов

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФОКУСИРОВКИ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ ОБРАЩЕННЫМ ВОЛНОВЫМ ФРОНТОМ В ОКЕАНИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

В рамках теории «вертикальных мод и горизонтальных лучей» рассчитана эффективность фокусировки обращенного волнового поля, излучаемого реперным источником в случайно-неоднородной среде, заполняющей океанический волновод. Расчеты проведены для неоднородностей, описываемых гауссовой корреляционной функцией и степенной структурной функцией. Фокусировка поля в произвольную точку волновода, не совпадающую с положением реперного источника, обеспечивалась фазовой коррекцией каждой моды, которая осуществляет фокусировку в заданную точку в невозмущенной среде. Приведена оценка размеров области, в которой интенсивность поля, сфокусированного по алгоритмам невозмущенной среды, сохранит свою величину и при наличии случайных неоднородностей. Это позволяет оценить минимальное число реперных источников, необходимое для эффективной фокусировки поля в любую точку заданной области.

В последнее время большое внимание уделяется адаптивным системам, использующим принцип обращения волнового фронта (ОВФ), в частности системам ОВФ, предназначенным для компенсации влияния неоднородностей среды и достижения дифракционного предела фокусировки отраженного излучения в окрестности источника [1, 2]. Вопрос об эффективности фокусировки обращенного волнового поля в неограниченной среде с флуктуирующими во времени параметрами рассмотрен в работах [3, 4], а в работе [5] изучены возможности фокусировки в точки, не совпадающие с реперным источником. В данной работе подобный же вопрос изучается для ограниченной среды, а именно для распространения звуковых волн в океаническом волноводе.

При фокусировке в исходную точку излучения влияние неоднородностей устраняется и интенсивность I^0 оказывается такой же, как в невозмущенной среде. Фокусировка в произвольную точку волновода, осуществляемая по алгоритмам невозмущенной среды, приводит к уменьшению интенсивности: $(I<I^0)$. Вопрос, который мы хотели бы рассмотреть в данной работе, заключается в том, чтобы оценить размеры области надежной фокусировки вокруг источника ΔS, в которой выполнено условие: $I>0{,}5\cdot I^0$. Это позволяет оценить число N реперных источников, необходимое для эффективной фокусировки поля в любую точку заданной области S: $N\cong S/\Delta S$.

Для описания прохождения звуковых волн через горизонтально-неоднородный океан воспользуемся теорией адиабатических нормальных волн в варианте «теория вертикальных мод и горизонтальных лучей», разработанном Р. Бэрриджем и Г. Вейнбергом [6]. В условиях, когда параметры океана (глубина, показатель преломления $n(z, \mathbf{r})$) достаточно медленно меняются в горизонтальной плоскости, функцию Грина $G(\mathbf{R}_0, \mathbf{R})$ можно представить суммой мод вида

$$g_m(\mathbf{R}_0, \mathbf{R})=A_m(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})\exp\{i\varphi_m(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})\}\cdot \cdot u_m(z_0, \mathbf{r}_0)u_m(z, \mathbf{r}), \quad (1)$$

где $\mathbf{r}=(x, y)$ — радиус-вектор в горизонтальной плоскости, z — вертикальная координата, $A_m(\mathbf{r})$ — амплитуда волны, удовлетворяющая закону сохранения

$$\nabla(A_m^2\nabla\varphi_m)=0, \quad \nabla=(\partial/\partial x, \partial/\partial y)=\partial/\partial\mathbf{r}. \tag{2}$$

Эволюция волнового фронта m-й моды описывается уравнением эйконала

$$(\nabla\varphi_m)^2=h_m^2(\mathbf{r}). \tag{3}$$

В приведенных формулах u_m и h_m — соответственно собственные функции и собственные значения «вертикального» волнового уравнения

$$\partial^2u_m/\partial z^2+(k_0^2\varepsilon(z, \mathbf{r})-h_m^2)u_m=0, \quad k_0\cong\omega_0/c, \tag{4}$$

где $\varepsilon(z, \mathbf{r})=n^2(z, \mathbf{r})$ — вертикальный профиль квадрата показателя преломления.

Пусть волна, исходящая от реперного источника, расположенного в точке $\mathbf{R}_0=(z_0, \mathbf{r}_0)$, обращается антенной, координаты точек поверхности которой обозначим $\boldsymbol{\rho}=(\rho_z, \boldsymbol{\rho}_h)$. Выберем систему координат, как показано на рис. 1. Поле, падающее на обращающую антенну, выражается суммой распространяющихся мод вида (1):

$$E_{\text{пад}}(\boldsymbol{\rho})=\sum_m g_m(\mathbf{R}_0, \boldsymbol{\rho}). \tag{5}$$

Обращенная волна создается сопряжением фазы каждой моды, так что на поверхности антенны

$$E_{\text{обр}}(\boldsymbol{\rho})=\sum_m B_m g_m^*(\mathbf{R}_0, \boldsymbol{\rho}), \tag{6}$$

где B_m — коэффициент усиления антенны для m-й моды. При достаточно большом числе мод волна с граничным условием (6) автоматически сфокусируется в точку $\mathbf{R}_0$.

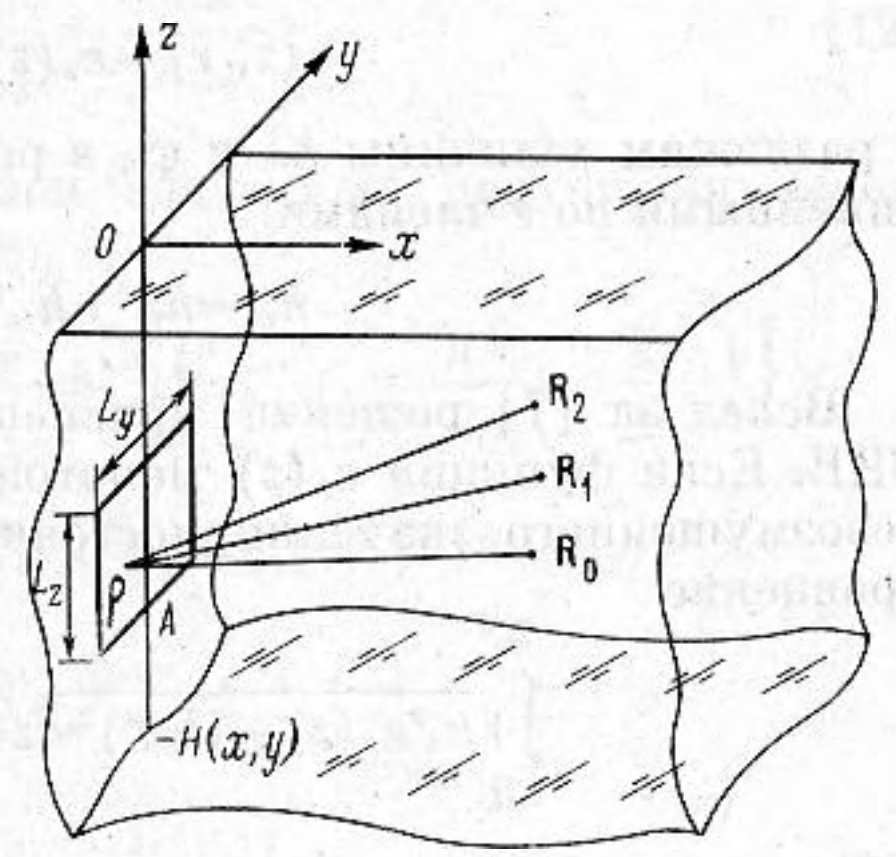

Рис. 1. Волна, исходящая от реперного источника, расположенного в точке $\mathbf{R}_0$, распадается на нормальные моды (*1*), отражается антенной A и фокусируется в точке $\mathbf{R}_1$. Начало отсчета координат находится на поверхности океана, а ось Ox выбрана вдоль нормали к антенне. Точке наблюдения соответствует радиус-вектор $\mathbf{R}_2$

Для фокусировки обращенного поля в произвольную точку пространства $\mathbf{R}_1$ необходимо усложнить алгоритм обращения, представив излучаемую волну в виде

$$E_{\text{изл}}(\boldsymbol{\rho})=\sum F_m(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\rho}_h, \mathbf{r}_1)\times \times B_m g_m^*(\mathbf{R}_0, \boldsymbol{\rho}), \tag{7}$$

где $F_m(\mathbf{r}_0, \rho, \mathbf{r}_1)$ — управляющий множитель для m-й моды, который мы конкретизируем ниже (см. формулу (16)). Если найти этот множитель для невозмущенной среды и сохранить его для флуктуирующей среды, то обращенное поле в произвольной точке можно записать при помощи интеграла Кирхгофа:

$$E(\mathbf{R}_2)=\int_{S_a} E_{\text{изл}}(\boldsymbol{\rho})G(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{R}_2)\,d^2\boldsymbol{\rho}= =\sum_m\sum_n B_m\int_{S_a} F_m(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}_1)g_m^*(\mathbf{R}_0, \boldsymbol{\rho})g_n(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{R}_2)\,d^2\boldsymbol{\rho}. \tag{8}$$

Суммирование по одному из индексов в (8) удается снять, предположив,

что антенна перекрывает по высоте весь волновод, и воспользовавшись свойством ортогональности собственных функций:

$$\int\limits_{S_a} u_m^*(\boldsymbol{\rho}_z, \boldsymbol{\rho}_h)\, u_n(\boldsymbol{\rho}_z, \boldsymbol{\rho}_h)\, d\rho_z = \delta_{mn} |u_m|^2. \tag{9}$$

В силу (8) и (9) выражение для средней интенсивности поля в точке R_2 имеет вид:

$$I(\mathbf{R}_2) = \sum_m \sum_n B_m B_n^* \iint\limits_{S_a} d^2\rho_1\, d^2\rho_2 \langle g_m^*(R_0, \rho_1) F_m(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\rho}_h, \mathbf{r}_1) \times$$

$$\times g_m(\boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{R}_2) g_n(\mathbf{R}_0, \boldsymbol{\rho}_2) F_n(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\rho}_2, \mathbf{r}_1) g_n^*(\boldsymbol{\rho}_2, \mathbf{R}_2)\rangle, \tag{10}$$

где $\langle \ldots \rangle$ означает усреднение по ансамблю реализаций случайных неоднородностей среды.

Положим, что квадрат показателя преломления (проницаемость) $\varepsilon(z, \mathbf{r})$ мало отличается от своего среднего (невозмущенного) значения $\varepsilon_0(z)$, однородного в горизонтальной плоскости

$$\varepsilon(z, \mathbf{r}) = \varepsilon_0(z) + \tilde{\varepsilon}(z, \mathbf{r}), \quad \tilde{\varepsilon} \ll \varepsilon_0, \tag{11}$$

и разложим величины h_m и φ_m в ряд по степеням $\tilde{\varepsilon}$, ограничиваясь только линейными по $\tilde{\varepsilon}$ членами:

$$h_m = h_m^0 + h_m^1, \quad \varphi_m = \varphi_m^0 + \varphi_m^1. \tag{12}$$

Вслед за [7] решение уравнения (4) будем искать в приближении ВКБ. Если функция $\varepsilon_0(z)$ монотонно уменьшается к поверхности, то для невозмущенного значения постоянной распространения h_m^0 получается уравнение

$$\int\limits_{-H}^{\bar{z}_m^0} \sqrt{k_0^2 \varepsilon_0(z) - (h_m^0)^2}\, dz = \pi(m - {}^3/_4), \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

относящееся к случаю водно-донных лучей, которые отражаются от идеального дна (при $z = -H(\mathbf{r})$) и поворачивают вниз на уровне $z = \bar{z}_m^0$. В случае, когда $|\partial\tilde{\varepsilon}/\partial z| \ll |\partial\varepsilon_0/\partial z|$, линейная поправка h_m^1 к h_m^0 дается выражением

$$h_m^1 = 0{,}5 \frac{k_0^2}{h_m^0} \left(\int\limits_{-H}^{\bar{z}_m^0} \frac{dz}{q_m^0} \right)^{-1} \int\limits_{-H}^{\bar{z}_m^0} \frac{\tilde{\varepsilon}}{q_m^0}\, dz, \tag{14}$$

где $q_m^0 = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_0(z) - (h_m^0)^2}$.

Зная поправку h_m^1, воспользуемся теорией возмущения для горизонтальных лучей [8]. В нулевом и первом приближениях для фазы $\varphi_m(\rho_\gamma, \mathbf{r})$, получим

$$\varphi_m^0 = h_m^0 |\mathbf{r} - \rho_\gamma|, \qquad \varphi_m^1 = \int\limits_{\rho_\gamma}^{\mathbf{r}} h_m^1(\mathbf{r}(s))\, ds. \tag{15}$$

Интегрирование в (15) ведется вдоль невозмущенного луча $\mathbf{r}(s) = \boldsymbol{\rho}_\gamma + s|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_\gamma|^{-1}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_\gamma)$. Управление пучком будем осуществлять при помощи фазового множителя:

$$F_m(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\rho}_\gamma, \mathbf{r}_1) = \exp(i\varphi_q(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\rho}_\gamma, \mathbf{r}_1) = \\ = \exp\{ih_m(|\mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\rho}_\gamma| - |\mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\rho}_\gamma|)\}, \tag{16}$$

где фазовая функция $\varphi(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\rho}_\gamma, \mathbf{r}_1)$ переводит цилиндрическую волну, по-

ступающую на антенну от источника, в цилиндрическую волну, сходящуюся в невозмущенной среде в точке $\mathbf{r}_1$.

Во френелевском приближении ($|y-\rho_y| \ll x$, где ось Ox выбрана вдоль нормали к антенне) для невозмущенной фазы получаем

$$\varphi_m^0(\rho_\gamma, \mathbf{r}) = h_m^0\left(x + \frac{(y-\rho_{\gamma y})^2}{2x}\right). \tag{17}$$

В этом случае управляющий множитель (16) принимает вид:

$$F_m(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\rho}_\gamma, \mathbf{r}_1) = \exp\left\{ih_m^0\left(C_0 + C_1 + \frac{1}{2}C_2\rho_{\gamma y}^2\right)\right\}, \tag{18}$$

где $C_0 = x_1 - x_0 + {}^1/_2(y_1^2/x_1 - y_0^2/x_0)$, $C_1 = y_0/x_0 - y_1/x_1$, $C_2 = 1/x_1 - 1/x_0$. Линейный член в (18) поворачивает фазовый фронт m-й моды в направлении точки $\mathbf{r}_1$, а квадратичный — искривляет его для перефокусировки с расстояния r_0 на расстояние r_1.

Соотношение (2) позволяет с точностью до постоянного множителя найти амплитуду волны:

$$A_m^2(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}) = \frac{\text{const}}{h_m|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}_\gamma|} = \frac{\text{const}}{h_m x}. \tag{19}$$

Считая флуктуации $\tilde{\varepsilon}$ гауссовыми, при сделанных допущениях среднюю интенсивность (10) запишем в виде:

$$I(\mathbf{R}_2) = \frac{4}{x_0 x_2}\sum_m\sum_n B_m B_n^* \exp\left\{i(h_m^0 - h_n^0)\left(x_2 - x_1 + \frac{y_2^2}{2x_2} - \frac{y_1^2}{2x_1}\right)\right\}\times$$
$$\times u_m^*(z_0)\,u_n(z_0)\,u_m(z_2)\,u_n^*(z_2)\iint\limits_{S_a} d^2\boldsymbol{\rho}_1\, d^2\boldsymbol{\rho}_2\,|u_m(\rho_{1z})|^2\,|u_n(\rho_{2z})|^2\times$$
$$\times\exp\left\{i(y_1/x_1 - y_2/x_2)(h_m^0\rho_{1y} - h_n^0\rho_{2y}) - \frac{i}{2}\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right)\times\right.$$
$$\left.\times(h_m^0\rho_{1y} - h_n^0\rho_{2y}) - \frac{1}{2}\sigma_\varphi^2\right\}, \tag{20}$$

где

$$\sigma_\varphi^2 = \langle\varphi_m^1(\rho_{1y}, \mathbf{r}_2) - \varphi_m^1(\mathbf{r}_0, \rho_{1y}) +$$
$$+\varphi_n^1(\mathbf{r}_0, \rho_{2y}) - \varphi_n^1(\rho_{2y}, \mathbf{r}_2)\rangle^2. \tag{21}$$

Необходимо отметить, что даже в невозмущенной среде вследствие ограниченности апертуры идеальной фокусировки достичь не удается. Распределение интенсивности в этом случае имеет вид:

$$I(\mathbf{R}_2) = \frac{4}{x_0 x_2}\left|\sum_n B_m \exp\left\{ih_m^0\left(x_2 - x_1 + \frac{y_2^2}{2x_2} - \frac{y_1^2}{2x_1}\right)\right\}\times\right.$$
$$\times u_m^*(z_0)\,u_m(z_2)\int\limits_{S_a} d\rho_z\,|u_m(\rho_z)|^2\int\limits_{S_a} d\rho_y\exp\left\{ih_m^0(y_1/x_1 - y_2/x_2)\rho_y +\right.$$
$$\left.\left.+\frac{i}{2}\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right)h_m^0\rho_y^2\right\}\right|^2. \tag{22}$$

Выражение (22) описывает систему фокальных пятен в горизонтальной плоскости. Наибольшая интенсивность приходится на центральное пятно с центром в точке r_1 с поперечным размером $\Delta y = {}^1/_2\lambda^{\max}x_1/L_y$ и с продольным размером $\Delta x = {}^1/_2\lambda^{\max}(x_1/L_y)^2$ в ближней зоне ($h_{\min}^0 L_y^2 \gg x_1$). В этих оцен-

ках L_y — горизонтальный размер антенны, $h^0_{\min}=\min\{h_m{}^0\}$, $\lambda^{\max}=2\pi/h^0_{\min}$. В зоне Фраунгофера ($h^0_{\min}\ L_y{}^2\ll x_1$) пятно расплывается в полосу, и можно говорить только о фокусировке по углу, но не по дальности.

При фокусировке в исходную точку излучения $\mathbf{R}_0$ влияние неоднородностей устраняется ($\sigma_\varphi{}^2=0$) и максимальная интенсивность в фокальном пятне оказывается такой же, как в невозмущенной среде:

$$I_0^{\max}=\frac{4L_y{}^2}{x_0x_0}\left|\sum_n B_m|u_m(z_0)|^2\int\limits_{S_a} d\rho_z|u_m(\rho_z)|^2.\right. \tag{23}$$

Фокусировка в произвольную точку волновода $\mathbf{R}_1\neq\mathbf{R}_0$ приводит к некоторому размыванию дифракционной картины, в результате чего интенсивность в фокальном пятне уменьшается:

$$I^{foc}(\mathbf{R}_1)=\frac{4}{x_0x_1}\sum_m\sum_n B_mB_n{}^*u_m{}^*(z_0)\,u_n(z_0)\,u_m(z_1)\,u_n{}^*(z_1)\int\limits_{S_a} d\rho_{1z}|u_m(\rho_{1z})|^2\times$$
$$\times\int\limits_{S_a} d\rho_{2z}|u_n(\rho_{2z})|^2\int\limits_{S_a} d\rho_{1y}\int\limits_{S_a} d\rho_{2y}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_\varphi{}^2\right\}. \tag{24}$$

Получим выражения, оценивающие область допустимых отклонений $\mathbf{R}_1$ от R_0, в которой выполнено неравенство:

$$I^{foc}\geqslant\frac{1}{2}I_0^{\max}, \tag{25}$$

рассматриваемое как критерий приемлемой эффективности фокусировки. Отметим, что для эффективного возбуждения нормальных волн точки излучения и фокусировки должны располагаться ниже соответствующих точек поворота.

Пусть флуктуации проницаемости $\tilde\varepsilon$ являются статистически однородными и описываются корреляционной функцией $\psi_\varepsilon(\mathbf{R})=\langle\tilde\varepsilon(\Delta\mathbf{R})\tilde\varepsilon(\mathbf{R}+\Delta\mathbf{R})\rangle$, имеющей радиус корреляции l_ε, а глубина океана является постоянной $H(\mathbf{r})=H$. В этом случае статистическое усреднение (21) дает (при $x\gg l_\varepsilon$, $|\bar z^0+H|\gg l_\varepsilon$):

$$\begin{aligned}\sigma_\varphi{}^2=(x_1+x_0)\{&(k_{mm}+k_{nn})\psi_\varphi(0,0)-2k_{mn}\psi_\varphi(\rho_{2y}-\rho_{1y},0)-\\&-2x_{10}k_{mm}\psi_\varphi(x_{10}(\alpha+\rho_{1y}(1/x_1-1x_0)),0)-\\&-2x_{10}k_{nn}\psi_\varphi(x_{10}(\alpha+\rho_{2y}(1/x_1-1/x_0)),0)+\\&+2x_{10}k_{mn}\psi_\varphi(\rho_{2y}-\rho_{1y}+x_{10}(\alpha+\rho_{1y}/x_0-\rho_{2y}/x_1),\rho_{2y}-\rho_{1y})+\\&+2x_{10}k_{mn}\psi_\varphi(\rho_{2y}-\rho_{1y}+x_{10}(-\alpha+\rho_{1y}/x_1-\rho_{2y}/x_0),\rho_{2y}-\rho_{1y})\},\end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\psi_\varphi(a,b)=\int\limits_0^1 d\xi\int\limits_0^\infty d\eta\int\limits_0^\infty d\zeta\,\psi_\varepsilon(\eta,\xi a+(1-\xi)b,\zeta),$$

$$k_{mn}=\frac{k_0{}^4}{h_m{}^0h_n{}^0}\left(\int\limits_H^{\bar z_m{}^0}\frac{dz}{q_m{}^0}\int\limits_H^{\bar z_n{}^0}\frac{dz}{q_n{}^0}\right)^{-1}\int\limits_H^{\bar z_{mn}{}^0}\frac{dz}{q_n{}^0q_m{}^0}$$

$$x_{10}=\min\{x_1,x_0\},\quad \bar z_{mn}{}^0=\min\{\bar z_m{}^0,\bar z_n{}^0\},\quad \alpha=y_0/x_0-y_1/x_1.$$

Ограничимся рассмотрением корреляционной функции, имеющей гаус-

сову форму:

$$\psi_\varepsilon(\mathbf{R})=\sigma_\varepsilon^2\exp(-R^2/2l_\varepsilon^2).$$

Считая, что точки излучения и фокусировки разнесены только в поперечном направлении ($x_1=x_0=x$), найдем из (26) зависимость дисперсии σ_φ^2 от координаты y_1:

$$\sigma_\varphi^2=\pi l_\varepsilon^2\sigma_\varepsilon^2 x\left\{(k_{mm}+h_{nn})(1-F(b))-2k_{mn}\frac{b^2}{b^2-a^2}(F(b)-F(a))\right\}, \quad (27)$$

где

$$a=(\rho_{2y}-\rho_{1y})/l_\varepsilon,\quad b=(y_0-y_1)/l_\varepsilon,\quad F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\exp(-t^2/2)\,dt.$$

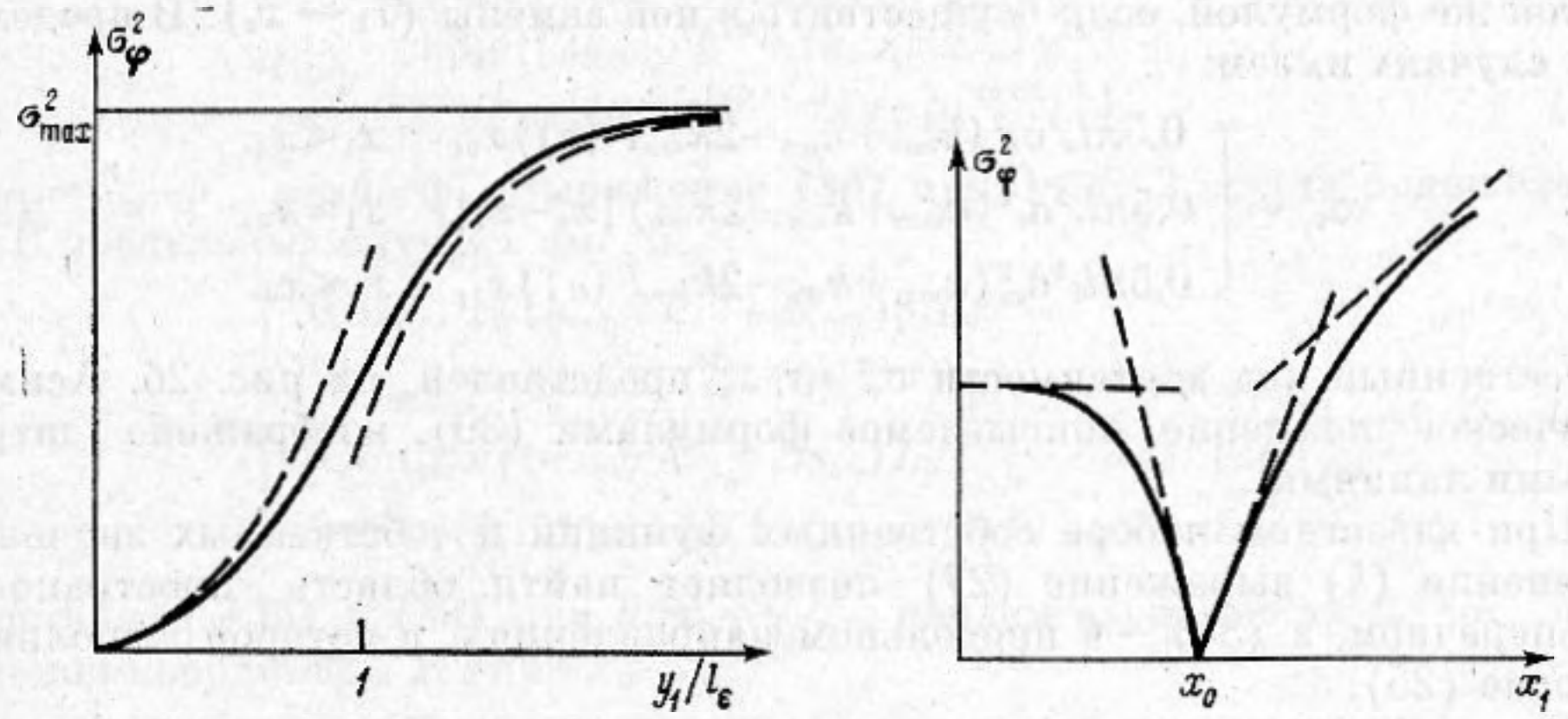

Рис. 2. Зависимость дисперсии σ_φ^2 от поперечной координаты y_1 (*а*) и продольной координаты x_1 (*б*) для неоднородностей среды, описываемых гауссовской корреляционной функцией. Асимптотическое поведение, описываемое формулами (29) и (31), изображено штриховыми линиями

Выражение (27) всегда положительно и ограничено сверху:

$$\sigma_\varphi^2\leqslant\sigma_{max}^2=\pi l_\varepsilon^2\sigma_\varepsilon^2 x(k_{mm}+k_{nn}-2k_{mn}F(a)). \quad (28)$$

В предельных случаях имеем:

$$\sigma_\varphi^2=\begin{cases}\pi l_\varepsilon^2\sigma_\varepsilon^2 x\left\{(k_{mm}+k_{nn})/6-2k_{mn}\dfrac{1-F(a)}{a^2}\right\}^2, & b\ll\min(a,1),\\ \sigma_{max}^2-\pi l_\varepsilon^2\sigma_\varepsilon^2 x(\sqrt{\pi/2}(k_{mm}+k_{nn}-2k_{mn})/b-2k_{mn}a^2F(a)/b^2), & b\gg\max(a,1).\end{cases} \quad (29)$$

Качественный ход зависимости σ_φ^2 от b приведен на рис. 2а. Начальный участок кривой описывается первой формулой (29), а конечный — второй. Ограниченность дисперсии (28) говорит о том, что при фокусировке на близкие расстояния ($x<x_{min}$) роль неоднородностей оказывается несущественной (в смысле критерия (25)). Для оценки x_{min} по порядку величины можно воспользоваться следующей формулой:

$$x_{min}\cong 85L_п h_{min}^2\sigma_\varepsilon^{-2}k_0^{-4}\left(\frac{1}{18}L_y^2+l_\varepsilon^2(1-h_{min}/h_{max})\right)^{-1},$$

где $L_п$ — расстояние от дна до ближайшей точки поворота нормальных волн. Однако с удалением точек фокусировки и излучения поперечный ($\Delta y_0=y_0-y_1$) размер области эффективной фокусировки быстро уменьша-

ется и при $x \cong 0{,}85(h^2_{\min} l_\varepsilon^2 x_{\min})^{1/3}$ оказывается сравнимым с поперечным размером центрального фокального пятна $\Delta y = 0{,}5 x \lambda^{\max}/L_y$, а при $x \cong (6 \div 7) x_{\min}$ — с радиусом корреляции l_ε, и задача нахождения необходимого числа реперных источников теряет смысл.

Предполагая, что точки фокусировки и излучения находятся на одном луче, $y_1/x_1 = y_0/x_0$, найдем зависимость дисперсии от продольной координаты x_1 (при $x_1 \geqslant x_0$):

$$\begin{gathered}\sigma_\varphi^2 = 0{,}5\pi l_\varepsilon^2 \sigma_\varepsilon^2 (x_1 + x_0) \times \\ \times \{k_{mm} + k_{nn} - 2k_{mn} cd (c-a)^{-1} (d+a)^{-1} F(a) + \\ + 2(1 + x_1/x_0)^{-1} ((k_{mn} - k_{mm}) c + k_{mm} a)(c-a)^{-1} F(c) + \\ + 2(1 + x_1/x_0)^{-1} ((k_{mn} - k_{mm}) d - k_{nn} a)(d+a)^{-1} F(d)\},\end{gathered} \tag{30}$$

где $c = (x_0/x_1 - 1)\rho_{1y}$, $d = (x_0/x_1 - 1)\rho_{2y}$. Поведение σ_φ^2 при $x_1 < x_0$ определяется той же формулой, если осуществить в ней замены $(x_1 \leftrightarrow x_0)$. В предельных случаях имеем:

$$\sigma_\varphi^2 = \begin{cases} 0{,}5\pi l_\varepsilon^2 \sigma_\varepsilon^2 (k_{mm} + k_{nn} - 2k_{mn} F(a)) x_0, & x_1 \ll x_0, \\ 0{,}5\pi l_\varepsilon^2 \sigma_\varepsilon^2 (k_{mm} + k_{nn} - 2k_{mn}) |x_0 - x_1|, & x_1 \approx x_0, \\ 0{,}5\pi l_\varepsilon^2 \sigma_\varepsilon^2 (k_{mm} + k_{nn} - 2k_{mn} F(a)) x_1, & x_1 \ll x_0. \end{cases} \tag{31}$$

Качественный ход зависимости σ_φ^2 от x_1 представлен на рис. 2б. Асимптотическое поведение, описываемое формулами (30), изображено штриховыми линиями.

При известном наборе собственных функций и собственных значений уравнения (4) выражение (27) позволяет найти область пространства в поперечном, а (30) — в продольном направлениях, в которой выполнено условие (25).

Пусть флуктуации проницаемости $\tilde{\varepsilon}$ являются статистически однородными и описываются структурной функцией $D_\varepsilon(\mathbf{R}) = \langle |\varepsilon(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) - \varepsilon(\Delta\mathbf{R})|^2 \rangle$, которая отличается степенным поведением на малых дистанциях $R < L_0$ и насыщается на расстояниях, превышающих внешний масштаб неоднородностей L_0:

$$D_\varepsilon(R) = \begin{cases} C_\varepsilon^2 R^{2p}, & R \leqslant L_0, \\ C_\varepsilon^2 L_0^{2p}, & R \geqslant L_0. \end{cases} \tag{32}$$

При $p = 1/3$ эта функция переходит в «закон 2/3» Колмогорова — Обухова [9]. Согласно (21), статистическое усреднение в этом случае дает:

$$\begin{gathered}\sigma_\varphi^2 = 0{,}5\{(k_{mm} + k_{nn} - 2k_{mn}) |x_1 - x_0| D_\varphi(0, \infty) + \\ + k_{mn}(x_1 + x_0) D_\varphi(\rho_{2y} - \rho_{1y}, 0) + \\ + x_{10} k_{mm} D_\varphi[x_{10}(\alpha + \rho_{1y}(1/x_1 - 1/x_0)), 0] + \\ + x_{10} k_{nn} D_\varphi[x_{10}(\alpha + \rho_{2y}(1/x_1 - 1/x_0)), 0] - \\ - x_{10} k_{mn} D_\varphi[\rho_{2y} - \rho_{1y} + x_{10}(\alpha + \rho_{1y}/x_0 - \rho_{2y}/x_1), \rho_{2y} - \rho_{1y}] - \\ - x_{10} k_{mn} D_\varphi[\rho_{2y} - \rho_{1y} + x_{10}(-\alpha + \rho_{1y}/x_1 - \rho_{2y}/x_0), \rho_{2y} - \rho_{1y}]\},\end{gathered} \tag{33}$$

где

$$D_\varphi(a, b) = 0{,}5\pi \int_0^1 d\xi \int_0^\infty \eta\, d\eta \{D_\varepsilon(\sqrt{(\xi a + (1-\xi) b)^2 + \eta^2}) - D_\varepsilon(\eta)\}. \tag{34}$$

Для вычисления двукратного интеграла (34) воспользуемся аппроксимацией (32) и, следуя [4], вычислим интеграл по η приближенно, разбив ось η на интервалы $(0, A)$, $(A, \sqrt{L_0^2 - A^2})$, $(\sqrt{L_0^2 - A^2}, L_0)$ и (L_0, ∞), где $A = |\xi a + (1-\xi) b|$. На первом интервале можно воспользоваться разложением $r^{2p} = |\eta^2 + A^2|^p$ в ряд по степеням параметра $(\eta/A) < 1$, а на втором —

по степеням обратной величины $(A/\eta)<1$. Три первых члена каждого из разложений обеспечивают точность 1%. Получившееся после интегрирования по η выражение $f(\xi)$ аппроксимирует затем квадратичным трехчленом по ξ, добиваясь совпадения аппроксимирующей функции $\tilde{f}(\xi)$ с исходной функцией $f(\xi)$ в точках $\xi=0$, 1/2, 1. В итоге получим выражение:

$$D_\varphi(a, b)=0{,}5\pi C_\varepsilon^2\{\beta_1 L_0^{2p}(a^2+b^2+ab)+ \\ +\beta_2(a^{2p+2}+b^{2p+2}+\beta_3|a+b|^{2p+2})\}, \tag{35}$$

где $\beta_1=1/6$, $\beta_2=[p(p^2-1)-6]/72(p+1)$, $\beta_3=2^{-2p}$. Подставляя (35) в (32) $x_1=x_0=x$, найдем зависимость σ_φ^2 от поперечной координаты y_1:

$$\sigma_\varphi^2=0{,}5\pi C_\varepsilon^2 x\times \\ \times\{(k_{mm}+k_{nn}-2k_{mn})(\beta_1 L_0^{2p}y^2+\beta_2 y^{2p+2})+ \\ +\beta_2\beta_3[2k_{mn}\rho^{2p+2}+(k_{mm}+k_{nn})y^{2p+2}- \\ -k_{mn}(|y+\rho|^{2p+2}+|y-\rho|^{2p+2})]\}, \tag{36}$$

где $\rho=\rho_{2y}-\rho_{1y}$, $y=y_1-y_0$. Выражение (36) при $0<p<2$ всегда положительно. В предельных случаях имеем:

$$\sigma_\varphi^2=\begin{cases} 0{,}5\pi C_\varepsilon^2 x\{(k_{mm}+k_{nn}-2k_{mn})\beta_1 L_0^{2p}- \\ -k_{mn}\beta_2\beta_3(2p+1)(2p+2)\rho^{2p+2}\}y^2, & y\ll\rho, L_0, \\ 0{,}5\pi C_\varepsilon^2 x\{(k_{mm}+k_{nn}-2k_{mn})L_0^{2p}(1-L_0/y)/(2p+2)+ \\ +2k_{mn}(\beta_1 L_0^{2p}\rho^2+\beta_2(1+\beta_3)\rho^{2p+2})\}, & y\gg\rho, L_0. \end{cases} \tag{37}$$

Подставляя (35) в (33) при $y_1/x_1=y_0/x_0$, найдем зависимость σ_φ^2 от продольной координаты x_1 (при $x_1\geqslant x_0$):

$$\sigma_\varphi^2=0{,}5\pi C_\varepsilon^2\Big\{\frac{p}{4(p+1)}(k_{mm}+k_{nn}-2k_{mn})L_0^{2p}(x_1-x_0)+ \\ +k_{mn}\{\beta_1 L_0^{2p}\rho^2(x_1-x_0)^2/x_1+\beta_2(x_1-x_0+\beta_3(x_1+x_0))\rho^{2p+2}\}+ \\ +\beta_2\beta_3 x_0\{k_{mm}\tilde{\rho}_1^{2p+2}+k_{nn}\tilde{\rho}_2^{2p+2}-k_{mn}(|\tilde{\rho}_1+\rho|^{2p+2}+|\tilde{\rho}_2-\rho|^{2p+2})\}+ \\ +(k_{mm}-k_{nn})x_0(\beta_1 L_0^{2p}\tilde{\rho}_1^2+\beta_2\tilde{\rho}_1^2)+(k_{nn}-k_{mm})x_0(\beta_1 L_0^{2p}\tilde{\rho}_2^2+\beta_2\tilde{\rho}_2^2), \tag{38}$$

где $\tilde{\rho}_1=\rho_{1y}(x_0/x_1-1)$, $\tilde{\rho}_2=\rho_{2y}(x_0/x_1-1)$. Поведение σ_φ^2 при $x_1\leqslant x_0$ определяется той же формулой (38), если осуществить в ней замены $(x_1\leftrightarrow x_0)$. В предельных случаях имеем:

$$\sigma_\varphi^2=\begin{cases} \{\Phi_{mn}+k_{mn}[\beta_1 L_0^{2p}\rho^2+\beta_2(1+\beta_3)\rho^{2p+2}]\}x_0, & x_1\ll x_0, \\ \{\Phi_{mn}+k_{mn}\beta_2(1-\beta_3)(2p+1)\rho^{2p+2}\}|x_1-x_0|, & x_1\approx x_0, \\ \{\Phi_{mn}+k_{mn}[\beta_1 L_0^{2p}\rho^2+\beta_2(1+\beta_3)\rho^{2p+2}]\}x_1, & x_1\gg x_0, \end{cases} \tag{39}$$

где $\Phi_{mn}=(\pi p/8(p+1))C_\varepsilon^2(k_{mm}+k_{nn}-2k_{mn})L_0^{2p}$. Как видим, качественный ход зависимости σ_φ^2 от x_1 и y_1 аналогичен предыдущему случаю, когда флуктуации $\tilde{\varepsilon}$ описываются гауссовой корреляционной функцией.

Выражение (36) позволяет найти размеры области пространства, в которой выполнено условие (25), в поперечном (Δy_0), а (38) — в продольном (Δx_0) направлениях.

Необходимо отметить, что полученные этим путем размеры области фокусировки Δy_0 и Δx_0 оказываются существенно отличными от соответствующих поперечного и продольного радиусов корреляции волны, излучаемой точечным источником, расположенным в плоскости антенны.

Располагая поперечным (Δy_0) и продольным (Δx_0) размерами области эффективной (по критерию (25)) фокусировки, мы в состоянии оценить

минимально необходимое число реперных источников для данной площади поверхности океана. Если $\Delta S=\Delta y_0 \Delta x_0$ – площадь области надежной фокусировки вокруг одного источника, находящегося во френелевской зоне антенны, то для области пространства, имеющей проекцию на поверхность океана площади S, потребуется примерно $N \approx S/\Delta S$ реперных источников. Если же источник находится во фраунгоферовой зоне антенны и $\Delta\varphi=\Delta y_0/\Delta x_0$ – угловой размер зоны эффективной фокусировки, то для перекрытия сектора углов раствором φ потребуется $N \approx \varphi/\Delta\varphi$ источников.

В качестве примера рассмотрим волновод глубиной $H=200$ м с постоянным по вертикали профилем невозмущенной скорости звука. Пусть длина волны равна $\lambda=15$, а размеры антенны составляют 500 м по оси Oy и 200 м по оси Oz. Если неоднородности описываются гауссовской корреляционной функцией с параметрами $\sigma_\varepsilon^2=10^{-4}$ и $l_\varepsilon^2=100$ м, то для эффективной фокусировки поля в область пространства $\Delta y=\Delta x=1$ км, находящуюся на расстоянии $x=5$ км от антенны, потребуется девять реперных источников. При тех же условиях для неоднородностей, описываемых структурной функцией (32) с параметрами $p=1/3$, $L_0=1$ км и $\sigma_\varepsilon^2=0.5C_\varepsilon^2 L_0^{2p}=10^{-4}$, потребуется пять источников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адаптивная оптика // Сб. статей/Под ред. Витриченко Э. А. М.: Мир, 1980.
2. *Лукин В. П.* Атмосферная адаптивная оптика // Новосибирск: Наука, 1986.
3. *Ахунов Х. Г., Бункин Ф. В., Власов Д. В., Кравцов Ю. А.* // Квантовая электроника. 1982. Т. 9. № 6. С. 1287.
4. *Ахунов Х. Г., Бункин Ф. В., Власов Д. В., Кравцов Ю. А.* // РЭ. 1984. Т. 24. № 1. С. 1.
5. *Исмагилов Ф. М., Кравцов Ю. А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 30. № 7. С. 1058.
6. *Бэрридж Р., Вейнберг Г.* Горизонтальные лучи и вертикальные моды // Распространение волн и подводная акустика. М.: Мир, 1980.
7. *Кобозев И. К., Кравцов Ю. А., Огурцов А. В.* // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 1. С. 109.
8. *Кравцов Ю. А., Кузькин В. М., Петников В. Г.* // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 1. С. 79.
9. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978.

Малое специализированное
предприятие «ГРОТ»
Института общей физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
18.04.90

F. M. Ismagilov, Yu. A. Kravtsov

ON FOCUSING EFFECTIVENESS OF A SOUND BY FIELD A REVERSE WAVE FRONT IN AN OCEANIC WAVEGUIDE

The method of normal modes and horizontal rays in suited for the analysis of focusing effectiveness of a reverse wave field radiated by a point source in a random-inhomogeneous medium of an oceanic waveguide. Calculations are carried out for inhomogeneities described by Gaussian correlative function and power structural one. Field focusing in an arbitrary point of the waveguide different from the location is realized by means of phase correction of each mode, which ensures focusing in necessary point in the homogeneous medium. Assessment of the region area in which field intensity focused in accordance with the homogeneous medium algorithms keeps its value. for an inhomogeneous medium is performed. This permits to evaluate minimum number of point sources, which is necessary for effectivene focusing into arbitrary point of the given region.