АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 3

УДК 534.222

С.Н. Макаров

НЕЛИНЕЙНЫЙ ЗВУКОВОЙ ПУЧОК В ТРУБЕ С ЖЕСТКИМИ СТЕНКАМИ. СРЕДНИЕ ПАРАМЕТРЫ ПОЛЯ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СИЛА

Для пучка в трубе с условием непротекания на стенке теоретически вычислено среднее избыточное давление. Сделан вывод о том, что при определенных граничных условиях выражение для гидродинамической силы, действующей на жидкость, должно включать, по-видимому, не только вихревую, но и потенциальную компоненту, индуцированную его градиентом.

С точки зрения усредненных эффектов бегущих звуковых волн принято различать две полярные ситуации: плоскую волну и ограниченный пучок в свободном пространстве [1, 2]. В первую очередь это относится к определению среднего избыточного статического давления P, которое для плоской волны отлично от нуля. Точное выражение для него при больших числах Рейнольдса (с учетом образования разрывов и отражений на разрывах) указано в работе [3], а при малых числах Рейнольдса – в работе [4]. Результаты вычислений в обоих случаях совпадают. Для пучка в свободном пространстве среднее давление, напротив, тождественно равно нулю [5]; весьма изящное доказательство этого утверждения приведено в [6]. Было показано, что условие $P = 0$ следует и из полной системы уравнений нелинейной акустики звуковых пучков во втором приближении [7].

Далее необратимые потери импульса звукового поля также проявляются в двух различных формах. Так как полный импульс всегда сохраняется, потери импульса бегущей звуковой волной приводят к образованию новых мод. Для квазиплоской волны таковыми являются вторая звуковая мода (отраженные волны давления, бегущие к источнику [8]) и вихревая (гидродинамическая) мода, развитие которой приводит к акустическому течению. Для строго плоской безграничной волны возбуждается, очевидно, только вторая звуковая мода, причем последнее имеет место не только при нелинейном (отражение на разрывах), но и при чисто диссипативном поглощении [3]. Для ограниченного пучка в принципе могут существовать обе моды, но расчет, проведенный с использования аппарата нелинейной акустики, приводит к несколько неожиданному результату [9]: отраженные волны давления здесь вообще не существуют, а возбуждается исключительно вихревая мода, вызывающая акустическое течение. Физическая причина этого не совсем ясна: по-видимому, какую-то роль играют энергетические соображения.

Определенный интерес представляет попытка "сшить" две указанные ситуации, т. е. получить решение, имеющее промежуточный характер и включающее каждый случай в рамках известного предельного перехода. Очевидно, что физически это соответствует поршневому излучателю фиксированного радиуса и мощности в трубе переменного радиуса. Если радиус трубы меньше или равен радиусу излучателя, то в трубе (без учета трения об стенки) распространяется строго плоская волна. Если, напротив, радиус трубы устремить к бесконечности (параметры излучателя фиксированы), то имеем предельный случай ограниченного пучка в свободном пространстве.

В настоящей работе получено решение для пучка в трубе с условием непротекания на жесткой стенке и произвольным амплитудным распределением на излучателе. В качестве аппарата, как и ранее [3, 7, 9], были использованы асимптотические соотношения нелинейной акустики бегущих волн, включающие не только уравнение для основной волны, но и некоторые соотношения для новых мод. Особенностью развиваемой методики является то, что она позволяет математически строго определить средние значения и параметры (вернее, источники) для новых мод. В то же время область ее применения ограничена областью применения асимптотических условий теории нелинейных пучков: метода медленно меняющегося профиля и параболического приближения теории дифракции. Кроме того, эта методика дает средние значение только для бегущих волн давления: эти средние квадратичны по полю и устанавливаются мгновенно после прихода звука в точку наблюдения. Она не позволяет оценить вклад установившихся соленоидальных акустических течений, который может быть существенным в неодномерном случае. Поэтому, например, для пучка в свободном пространстве полученный таким образом результат, строго говоря, справедлив лишь на начальном этапе, когда течение не успело развиться [7]. То же самое в определенной степени относится и к рассматриваемому случаю.

Схема рассуждений, использованная ниже, состоит в следующем. Сначала доказывается независимость среднего давления $\overline{p}'$, для главной моды, а также амплитуды отраженных волн давления от радиальной координаты. Это принципиальный момент, справедливый только для пучков с узким угловым спектром, т. е. в рамках параболического приближения. Далее эти параметры вычисляются с помощью процедуры усреднения исходных выражений по сечению, причем результат содержит среднее по сечению от квадрата средней по периоду колебательной скорости. Коль скоро радиус трубы стремится к бесконечности, а полная мощность излучателя фиксирована, указанное среднее по сечению стремятся к нулю и полное среднее избыточное давление P обращается в нуль. Если же радиус трубы конечен, P также конечно.

Последнее утверждение имеет одно следствие, по-видимому, интересное с практической точки зрения. Если определить гидродинамическую силу как градиент полного среднего потока импульса, то за счет ненулевой компоненты P эта сила будет в точности равна нулю интегрально по сечению. Вопрос о том, насколько и в каких ситуациях потенциальная компонента силы существенна, остается во многом открытым. Для пучка в трубе нельзя дать однозначного ответа на этот вопрос в противоположность, например, пучку в свободном пространстве [10]. Во всяком случае она заведомо не играет роли для замкнутой трубы (см. ниже). Если же труба используется как элемент акустического насоса, ее, вероятно, следует учитывать. В этом случае потенциальная компонента силы препятствует образованию направленного (и, следовательно, быстрого) акустического течения, а если поле однородно, то сила вообще тождественно равна нулю. Поэтому, во-первых, подтверждается справедливость вычисления самой величины P, во-вторых, возникает теоретическое возражение относительно использования данной схемы насоса.

Рассмотрим круглую трубу радиуса a, заполненную баротропной жидкостью с уравнением состояния Тэта. Пусть x, r — осевая и радиальная координаты, v, w — соответствующие компоненты колебательной скорости, $\tau = t - x/c_0$ — "бегущее" время, μ — малый параметр (амплитуда волны), p' — избыточное давление. Здесь и ниже все параметры течения: v, w и т. д. относятся только к волнам давления; иными словами, мы считаем, что соленоидальные акустические течения (гидродинамическая мода) либо не успели развиться, либо являются достаточно слабыми и могут не приниматься во внимание. Асимптотические условия метода медленно меняющегося профиля в координатах x, r, τ [8] предполагают, что $\partial/\partial x$, v, ρ', $b = O(\mu)$ и $\partial/\partial r = O(\mu^{1/2})$, $w = O(\mu^{3/2})$, где ρ' — избыточная плотность, b — диссипативный коэффициент.

Будем считать, что все колебательные величины не содержат постоянных составляющих в малых главного порядка, т. е.

$$\overline{v} = O(\mu^2), \quad \overline{w} = O(\mu^{2\frac{1}{2}}), \ldots \tag{1}$$

и являются периодическими функциями τ в малых главного и следующего порядков. Апериодичность проявляется в членах третьего порядка малости ($O(\mu^3)$ для v, p';

$O(\mu^{3½})$ для w) и отражает действие необратимых процессов. Апериодические поправки, такие, как амплитуда отраженной волны давления $p_s = O(\mu^3)$, в главном приближении не зависят от "быстрой" переменной τ.

Эти естественные допущения подтверждаются данными для плоских волн [8] и при необходимости могут быть строго доказаны.

Покажем, что значения $\overline{p}'$ и p_s не зависят от радиальной координаты. Для этого рассмотрим гидродинамическое уравнение импульсов в проекции на ось r (физическая система координат)

$$\rho w_t + \rho w w_r + \rho v w_x + p_r - (\xi + {}^4/_3\,\eta)\frac{\partial}{\partial r}\,\mathrm{div}_\perp w - \eta w_{xx} - (\xi + \eta/3) v_{xr} = 0. \tag{2}$$

Здесь η, ξ – коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости, $\mathrm{div}_\perp = \partial/\partial r + 1/r$. Перейдем в (2) к системе координат "бегущего" времени по формулам $\partial/\partial t = \partial/\partial\tau$, $\partial/\partial x = -c_0^{-1}\,\partial/\partial\tau + \partial/\partial x$, проведем усреднение по периоду волны и используем асимптотические условия, введенные выше. Учитывая, что $\eta, \xi = O(\mu)$, получим

$$\overline{\rho' w_\tau} - \frac{\rho_0}{c_0}\,\overline{v w_\tau} + \overline{p}'_r = O(\mu^{3½}). \tag{3}$$

В квазиплоских волнах $\rho' = \rho_0 v/c_0$ [8], поэтому два первых слагаемых левой части (3) сокращаются, и после интегрирования по r имеем

$$\overline{p}' = \varphi(x) \tag{4}$$

с погрешностью $O(\mu^3)$. Для ограниченного пучка в свободном пространстве $\varphi \equiv 0$, в нашем случае это не так.

Аналогично, используя дифференциальное уравнение для завихренности, можно показать, что величина $\overline{v}$ не зависит от r.

Теперь рассмотрим амплитуду волны давления, отраженной от одного периода. Значение p_s можно определить следующим образом:

$$p_s = p'(\tau = \widetilde{T}) - p'(\tau = 0), \tag{5}$$

где $\widetilde{T}$ – период волны. Вновь перейдем в уравнении (2) к переменным x, r, τ и составим разность значений левой части в точках $\tau = \widetilde{T}$, 0. Так как произведение периодических функций снова периодично, все нелинейные члены дают вклад не более чем $O(\mu^{4½})$. Слагаемое $\rho_0 w_\tau$ дает поправку порядка $O(\mu^{4½})$ по той причине, что функция w_τ (но не w!) – периодическая в малых третьего порядка. Среди диссипативных членов наибольшую величину имеет первый, но и он оценивается как $O(\mu^{4½})$. Поэтому $\partial p_s/\partial r = O(\mu^{4½})$, откуда следует

$$p_s = \psi(x) \tag{6}$$

с погрешностью $O(\mu^4)$.

Если просуммировать волны, отраженные от всех периодов, получим полную отраженную волну с амплитудой $P_s = O(\mu^2)$, также не зависящей от r.

Для плоской геометрии в задаче Ирншоу параметры $\overline{p}'$ и P_s были найдены с помощью уравнений третьего или газодинамического приближения теории волн конечной амплитуды [3]. Учет малых третьего порядка при вычислении средних необходим по той причине, что кубические по полю поправки накапливаются с расстоянием и изменяют решение для мгновенных значений $v(x, r, \tau)$ или $p'(x, r, \tau)$ в квадратичных членах. В принципе, используя метод медленно меняющегося профиля, можно получить систему уравнений третьего приближения и для пучков. Однако в случае трубы с жесткими стенками это излишне. Коротко говоря, дело заключается в том, что при выполнении граничных условий

$$w = 0 \quad \text{при} \quad r = 0,\ r = a \tag{7}$$

все соотношения третьего приближения для плоских волн будут верны и в нашем случае, но только в интегральной по сечению форме.

Докажем это. Радиальные (неплоские) члены, входящие в исходные уравнения неразрывности, импульсов в проекции на ось x и энтропии имеют вид (физические координаты)

$$\operatorname{div}_\perp \rho w,\quad \rho w v_r - \eta \Delta_\perp v - (\xi + \eta/3)\operatorname{div}_\perp w_x,$$

$$\rho T w s_r - \kappa \Delta_\perp T - (\xi + {}^4/_3\,\eta)(\operatorname{div}_\perp w)^2 - \eta\,((v_r)^2 + (w_x)^2) - 2(\xi + \eta/3) v_x \operatorname{div}_\perp w, \tag{8}$$

где T – температура, s – удельная энтропия, $\kappa = O(\mu)$ – коэффициент теплопроводности. Для плоских волн и слабодифрагирующих пучков $s = O(\mu^2)$. Отбросим в выражениях (8) малые порядка $O(\mu^4)$ и возьмем интеграл по сечению трубы с учетом граничных условий (7). Под знаком интеграла остаются три слагаемых, а именно

$$\rho_0 w v_r, \; -\eta \Delta_\perp v, \; -\frac{c_0 \kappa}{c_p}\,\Delta_\perp v \tag{9}$$

поскольку $T' = c_0 v/c_p + O(\mu^2)$. Далее используем условие потенциальности звукового поля, согласно которому $v_r = -c_0^{-1} w_\tau$ с погрешностью не более чем $O(\mu^{2\,1/2})$. Тогда интеграл по сечению от $\Delta_\perp v$ также обращается в нуль, и остается один член, пропорциональный $w w_\tau$.

Таким образом, после интегрирования по сечению трубы все радиальные члены, кроме $w w_\tau$, обращаются в нуль с требуемой точностью. Но уравнения третьего (или второго) приближения выводятся из гидродинамической системы Навье – Стокса только посредством операций типа сложения или умножения на постоянную. Поэтому интеграл по сечению сохраняет свой вид вплоть до окончательного результата. Последний же соответствует плоской задаче, так как единственный "лишний" член $w w_\tau$ периодичен в малых порядка $O(\mu^3)$ (не дает вклад в отраженные волны) и обладает нулевым средним (не входит в эволюционное уравнение после усреднения по времени).

Проинтегрируем формулы (8), (11) работы [3] для $\overline{p}'$ и P_s по сечению трубы, считая все функции, кроме $\overline{p}'$, P_s, зависящими от r. Получим

$$\overline{p}'(x) = \frac{\gamma - 7}{4}\;\frac{\rho_0}{a^2}\int_0^a r\overline{v}^2\,dr + \frac{\epsilon\rho_0}{2a^2}\int_0^a r\overline{v}_0^2\,dr, \tag{10}$$

$$P_s(x) = -\frac{\epsilon}{2}\,\frac{\rho_0}{a^2}\int_0^a r\overline{v}^2\,dr - \frac{\epsilon\rho_0}{2a^2}\int_0^a r\overline{v}_0^2\,dr. \tag{11}$$

Здесь γ – параметр нелинейности, $\epsilon = (\gamma + 1)/2$, $\overline{v}_0^2 = \overline{v}^2\,(r, x = 0)$. Наличие постоянных составляющих связано с учетом граничного условия на закрытом конце трубы [3], которое означает, что поток массы на излучатель ($x = 0$) тождественно равен нулю.

Если волна является плоской, т. е. $\partial\overline{v}^2/\partial r = 0$, выражения (10), (11) совпадают с решением задачи Ирншоу. Если же устремить радиус трубы a в бесконечность и считать мощность источника постоянной величиной $(\int_0^a r\overline{v}^2\,dr = \mathrm{const} < \infty)$, то формулы (10), (11) переходят в решение для ограниченного пучка в свободном пространстве

$$\overline{p}' = 0,\quad P_s = 0. \tag{12}$$

В качестве малого параметра здесь выступает отношение радиуса пучка к радиусу трубы. Заметим, что согласно (12) в ограниченном пучке не существуют отраженные от разрывов волны давления, ранее этот факт был установлен в [9] другим способом.

Складывая (10), (11), определим полное среднее избыточное акустическое давление $P = \overline{p}' + P_s$. Его градиент вдоль оси x вычисляется с помощью равенства [9]

$$\overline{v}_x^2 + \operatorname{div}_\perp \overline{v} w = -\frac{b}{\rho_0 c_0^3}\,(\overline{v}_\tau)^2,$$

которое следует из уравнения Хохлова — Заболотской — Кузнецова. Учитывая при интегрировании граничные условия (7), находим

$$\frac{dP}{dx} = \frac{2}{a^2} \int_0^a \frac{b}{c_0^3} (\overline{v}_\tau)^2 r dr. \tag{13}$$

Градиент полного акустического давления направлен от излучателя и равен нулю в среде без поглощения, т. е. при $b = 0$.

Теперь рассмотрим выражение для гидродинамической силы **F**, вызывающей постоянное течение в трубе. Этот вопрос не является простым по следующей причине. С одной стороны, согласно Лайтхиллу [11], а также Ниборгу [12], вектор силы в неоднородном звуковом поле имеет вид

$$F_i = -\rho_0 \, \partial \overline{v_i v_j} / \partial x_j \; ; \; i, j = 1, 2, 3, \tag{14}$$

т. е. определяется изменением динамической части акустического тензора потока импульса. Сила **F** (14) имеет вихревую природу, а величина $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ входит в качестве источника в гидродинамическое уравнение вихря.

Но в трубе (как, вероятно, во всяком ограниченном объеме) существует и отличный от нуля градиент акустического давления P (13). Этот градиент также способен вызвать направленное движение жидкости. Поэтому, чтобы найти полную картину течения, в определение (14) необходимо включить потенциальную компоненту силы, а именно принять

$$F_i = -\rho_0 \, \partial \overline{v}_i \overline{v}_j / \partial x_j - \partial P / \partial x_i . \tag{15}$$

Для звукового поля в свободном пространстве потенциальный член обращается в нуль, и формулы (14), (15) совпадают. В случае пучка в трубе отсюда получим некоторые неожиданные результаты.

Осевая компонента векторов **F** (14) в цилиндрических координатах равна $-\rho_0 (\overline{v}_x^2 + \operatorname{div}_\perp \overline{vw})$ или, что то же самое, $(b/c_0^3)(\overline{v}_\tau)^2$. Ранее подобное выражение было указано в [13]. Используя (13), (15), находим окончательно

$$F = \frac{b}{c_0^3} \; (\overline{v}_\tau)^2 - \frac{2}{a^2} \int_0^a \frac{b}{c_0^3} \; (\overline{v}_\tau)^2 r dr. \tag{16}$$

В соответствии с (16) вихревая и потенциальная составляющие силы действуют в противоположных направлениях и взаимно уравновешивают друг друга интегрально по сечению. Для плоских волн $F \equiv 0$ независимо от наличия поглощения.

Серьезный аргумент не в пользу формул (15), (16) состоит в том, что потенциальная компонента любой силы может быть точно уравновешена градиентом гидростатического давления и, следовательно, не влияет на скорость потока[1]. Согласно [14], это действительно имеет место, но только в том случае, когда давление не входит явно в граничные условия для уравнений Навье — Стокса несжимаемой жидкости. В качестве примера можно указать на хорошо известное эккартовское течение в замкнутой трубе.

Если же давление входит в граничные условия, потенциальная компонента силы должна учитываться. Простейшей ситуацией является длинная вертикальная труба, сообщающаяся с двумя резервуарами постоянного давления. Гидростатическое давление одинаково во всей жидкости, а потенциальная сила тяжести вызывает поток из верхнего резервуара в нижний [14].

Та же труба, но расположенная горизонтально и имеющая излучатель на одном из торцов, может рассматриваться как акустический насос. Тогда согласно (16) объемный расход равен нулю $(\int_0^a rF dr = 0)$, в то время как (14) дает расход не меньший, чем в сечении вблизи оси пучка в свободном пространстве [12]. Экспериментально наблюдается в основном картина, близкая к первому случаю, даже если предусмотрен

[1] По-видимому, именно так рассуждал Ниборг [12], сразу исключивший из рассмотрения акустическое давление второго приближения.

подвод и отвод жидкости[2]. Это в значительной степени подтверждает сделанное предположение, хотя определенную роль может играть возникающее трение о стенки, возможно изменение звукового поля и т. д. Для однозначного ответа на этот вопрос требуются специальный эксперимент и расчет.

В заключение выражаю благодарность Н.Г. Семеновой за полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.
2. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
3. *Макаров С.Н., Хамзина Б.С.* Определение средних параметров звука в задаче Ирншоу на основе нелинейной теории // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 2. С. 308–312.
4. *Островский Л.А.* Величины второго порядка в бегущей звуковой волне // Акуст. журн. 1968. Т. 14. № 1. С. 82–89.
5. *Borgnis F.E.* Acoustic radiation pressure of plane compressional waves // Rev. Mod. Phys. 1953. V. 25. № 3. P. 653–664.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
7. *Макаров С.Н.* Использование уравнения нелинейной акустики ограниченных пучков при вычислении средних величин // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 3. С. 507–510.
8. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
9. *Макаров С.Н., Назаров А.Ю.* Генерация вихревой и второй звуковой моды в поле мощного ограниченного пучка // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 4. С. 703–707.
10. *Гусев В.Э., Руденко О.В.* Нестационарные квазиодномерные акустические течения в неограниченных объемах с учетом гидродинамической нелинейности // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 6. С. 875–881.
11. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкости. М.: Мир, 1981. 598 с.
12. *Ниборг В.* Акустические течения // Физическая акустика. Т. 2. Б.М.: Мир, 1969. С. 302–377.
13. *Карабутов А.А., Руденко О.В., Сапожников О.А.* Теория тепловой самофокусировки с учетом формирования ударных волн и акустических течений // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 4. С. 644–650.
14. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 19.10.89

S.N. Makarov

NONLINEAR SOUND BEAM IN A TUBE WITH RIGID WALLS. AVERAGE PARAMETERS OF SOUND AND A HYDRODYNAMIC FORCE

The time–average acoustic pressure is calculated theoretically for a quasiplane nonlinear wave in a tube without taking into account Stokes boundary layer. The solution obtained contains both Earnshaw problem solution (initial wave is planar and the transducer radius is greater than the tube one) and the solution for the sound beam in a free space (the transducer is fixed but the tube radius increases). The mean acoustic momentum flux through any tube cross–section turns out to be equal to zero.

A double–opened long tube with transducer placed at the end, that is an acoustic pump is considered. In this case (part–bounded volume) the hydrodynamic force should be a gradient of full momentum flux and contain a potential part in the contrast to the case of a free space. Therefore, force integrated over cross–sectional area is also equal to zero. That is a theoretical objection to design of such kind of acoustic pumps.

---

[2] Н.Г. Семенова. Частное сообщение.