АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 3

УДК 550.34
© 1991 г.

Г.А. Максимов

СТЕПЕНЬ "КОМПЕНСАЦИИ" АКУСТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ И ЕЕ СВЯЗЬ С ЗАТУХАНИЕМ

Затухание импульсов, распространяющихся в диссипативных средах, существенно связано с характером структуры их профилей, их скомпенсированностью. В работе вводится понятие степени "компенсации" импульса и устанавливается ее связь с затуханием амплитуды импульса.

Распространение импульсов в реальных средах сопровождается изменением их амплитуды и формы, что обусловлено как геометрией излучения, так и неидеальными свойствами сред, наиболее существенным из которых является затухание.

Наличие в среде затухания приводит к уменьшению амплитуды распространяющегося в среде импульса. Так, например, в среде с квадратичной зависимостью коэффициента затухания на низких частотах амплитуда плоского одиночного импульса убывает с расстоянием по закону $r^{-1/2}$ при этом его характерная ширина растет пропорционально $r^{1/2}$ [1].

При неплоской геометрии задачи изменение амплитуды импульсов, распространяющихся в диссипативных средах, оказывается иным. Так, в работах [2, 3] исследовалось асимптотическое поведение импульсов объемных и поверхностных волн, возбуждаемых линейным и точечным источниками. Было установлено, что затухание амплитуды сферических импульсов происходит по закону r^{-2}, а цилиндрических – $r^{-5/4}$. Рэлеевские волны, возбуждаемые линейным и точечным источниками, затухают по законам r^{-1} и $r^{-7/4}$ соответственно.

Различный характер затухания импульсов в диссипативных средах при разной геометрии излучения связан не только с отличиями в геометрическом расхождении волн, но и со степенью "скомпенсированности" их профилей, которая определяется как видом функции источника, так и геометрией излучения. При распространении сферических волн в диссипативной среде внимание на этот факт было обращено в [1], где отмечено, что профиль импульса, возбуждаемого в диссипативной среде точечным источником, имеет вид производной гауссового пакета, так что составляющие его импульсы различной полярности при своем распространении расплываются и дополнительно поглощают друг друга [4]. Если площади импульсов разной полярности равны (т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mathbf{r}, t)dt = 0$, где $\Phi(\mathbf{r}, t)$ – профиль импульса), то затухание оказывается более сильным.

В этой связи представляет интерес выяснить взаимосвязь между характером структуры импульса, распространяющегося в диссипативной среде, и затуханием его амплитуды.

Последовательный учет влияния диссипативных свойств среды на распространение импульсов может быть проведен в рамках наследственной теории упругости в терминах релаксационных процессов, протекающих в среде при прохождении импульса, которые характеризуются их временами релаксации к термодинамическому равновесию [5]. На основе такого подхода в [6] дано описание эволюции плоского импульса, распро-

страняющегося в среде со спектром времен релаксации произвольного вида в случае малой дисперсии фазовой скорости. Было показано, что импульс разделяется на экспоненциально затухающий с расстоянием предвестник и главную часть, амплитуда которой изменяется с расстоянием по степенному закону $r^{-1/2}$, а характерная ширина растет пропорционально $r^{1/2}$.

Оценка расстояний, на которых наличием предвестника можно пренебречь (т. е. когда его амплитуда становится малой по сравнению с главной частью), имеет вид

$$r \gg c_\infty \langle\tau\rangle/\Delta, \tag{1}$$

где $\langle\tau\rangle$ – среднее время релаксации, c_∞ и c_0 – максимальная и минимальная скорости распространения возмущений в среде, $\Delta = (c_\infty^2 - c_0^2)/c_\infty^2$ – дисперсия фазовой скорости.

При выполнении условия (1) главная часть импульса в окрестности своего максимума может быть представлена в виде

$$I(t, r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{f}{r}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{f}{2r}\left(t - \frac{r}{c_0}\right)\right\}, \tag{2}$$

где

$$f = \frac{c_\infty \langle\tau\rangle}{\Delta\langle\tau^2\rangle}.$$

Выражение (2) соответствует учету квадратичных поправок к волновому числу, обусловленных диссипативными свойствами среды. Заметим, что при релаксационной природе этих свойств коэффициент затухания является монотонно растущей функцией частоты, так что на расстояниях (1) в спектре импульса выживают только низкие частоты, где поведение коэффициента затухания носит квадратичный характер.

В работах [2, 3, 7] показано, что при неплоской геометрии задачи с не зависящими явно от времени граничными условиями описание распространения импульсов в дискретно-однородных наследственно упругих средах может быть представлено в форме, когда разделены факторы, ответственные за геометрию задачи и диссипативные свойства среды:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \int_0^t dt'\, Q(t') \int_0^\infty d\zeta\, \mathbf{G}(\mathbf{r}, \zeta)\, I(t - t', c\zeta), \tag{3}$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ – скорость смещения частиц среды, $\mathbf{G}(\mathbf{r}, t)$ – функция Грина скорости смещений в упругой среде, $I(t, r)$ – фундаментальное решение плоской задачи для диссипативной среды, $Q(t)$ – функция источника, равная произведению площади его поверхности на скорость смещения, задаваемую на этой поверхности.

Представление импульса в форме (3) позволяет анализировать влияние геометрии излучения и формы функции источника на характер затухания импульса, распространяющегося в диссипативной среде.

Рассмотрим вначале плоский импульс. В этом случае $G(r, \zeta) = \delta\left(\frac{r}{c} - \zeta\right)$, так что

$$\mathbf{v}(r, t) = \int_0^t dt'\, Q(t')\, I(t - t', r). \tag{4}$$

Если функция источника является дельта-функцией, то на расстоянии (1) от источника профиль импульса описывается выражением (2), так что его амплитуда затухает по закону $r^{-1/2}$. При конечной длительности действия источника T аналогичное поведение будет наблюдаться на расстояниях, удовлетворяющих условиям (1) и $r \gg fT^2$.

Если функция источника может быть представлена в виде k-той производной от некоторого одиночного импульса $Q_0(t)$: $Q(t) = \partial^k/\partial t^k\, Q_0(t)$, то на указанных выше расстояниях асимптотическое поведение импульса, как это следует из (4), будет описываться выражением

$$v(r, t) = \text{const}\, \frac{\partial^k}{\partial k^k}\, I(t, r), \tag{5}$$

имеющем вид цуга с k осцилляциями. Ведущее слагаемое в этом выражении затухает согласно (2) по закону r^{-n}: $n = (1 + k)/2$.

Из выражения (5) следует, что характер затухания импульса, распространяющегося в диссипативной среде, существенно связан с видом его профиля, точнее со степенью его "компенсации", отражающей возможность представления профиля импульса в виде (5). При этом на каждый порядок k степени "компенсации" приходится дополнительная степень затухания амплитуды импульса, равная 1/2.

Однако функцию источника $Q(t)$ не всегда можно представить в виде k-той производной от одиночного импульса. В этом случае удобнее воспользоваться другим определением степени "компенсации".

Рассмотрим повторный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{t} dt_1 \ldots \int_{-\infty}^{t_{i-1}} dt_i \, v(\mathbf{r}, t_i).$$

Если при $i < k$ он равен нулю, а при $i = k$ – отличен от нуля, то в качестве степени "компенсации" импульса можно выбрать число k. Такое определение полностью согласуется с возможностью представления импульса в форме (5) и в то же время учитывает те случаи, когда такое представление невозможно, например когда $Q_0(t)$ убывает при больших t достаточно медленно степенным образом.

При неплоской геометрии задачи, например при излучении источником сферических или цилиндрических волн, возникают дополнительные причины, приводящие к более сильному затуханию амплитуды распространяющихся в диссипативной среде импульсов. Первая из них связана с дополнительным геометрическим расхождением импульса, являющимся следствием закона сохранения энергии в среде без диссипации, что приводит к убыванию амплитуды сферических и цилиндрических волн по законам r^{-m}, где $m = 1$ и $m = 1/2$ соответственно.

Вторая причина связана с тем, что при излучении сферических и цилиндрических волн должно выполнять условие $\int_{-\infty}^{\infty} p(r, t)\,dt = 0$, где $p(r, t)$ – профиль давления в акустическом импульсе [1]. Таким образом, вне зависимости от конкретного вида функции источника, действующего конечное время, импульс (давления), излучаемый сферическим или цилиндрическим источником, всегда является "скомпенсированным", что при наличии в среде диссипации приводит к его более сильному затуханию.

Представление (3) позволяет выяснить влияние геометрии излучения на степень "компенсации" импульса и на его затухание. Для этого в представлении (3) распространим область интегрирования по переменной ζ до $-\infty$. Это возможно, поскольку вследствие причинности функция Грина упругой среды $\mathbf{G}(\mathbf{r}, t)$ равна нулю при значениях $t < r/c_\infty$, где c_∞ – скорость звука в упругой среде. По этой же причине при больших значениях r выражение для фактора $I(t, r)$ можно записать в виде

$$I(t, r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{f}{tc_0}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{f}{2tc_0}\left(t - \frac{r}{c_0}\right)\right\}. \tag{6}$$

При указанных изменениях представление (3) можно рассматривать как свертку двустороннего преобразования Лапласа [8], которое в этом случае эквивалентно выражению

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dp\, e^{pt}\, \mathbf{G}(\mathbf{r}, p)\, I(t, p)\, Q(p), \tag{7}$$

где $I(t, p) = 2\sqrt{2}\exp\left\{p^2 \frac{c_0 t}{2f}\right\}$, $\gamma = (-i\infty, i\infty)$, а $\mathbf{G}(\mathbf{r}, p)$ и $Q(p)$ совпадают с односторонними лапласовскими образами $(t \to p)$ от $\mathbf{G}(\mathbf{r}, t)$ и $Q(t)$ соответственно.

На больших расстояниях от источника функцию Грина идеально упругой среды, неограниченной по координате r (например, в случае плоского волновода), можно

асимптотически представить в виде

$$\mathbf{G}(r, p) = \mathbf{A} r^{-m} F(p) e^{-pr/c_*}, \tag{8}$$

где $\mathbf{A}$ – амплитуда, множитель r^{-m} описывает геометрическое расхождение волны, $F(p)$ – частотная характеристика, определяемая геометрией излучения (например, поперечной структурой волновода), c_* – скорость распространения волны (собственной моды), которую для рассматриваемого класса задач будем считать независящей от p (бездисперсионная мода).

Подставляя (8) в (7) и учитывая, что при больших r из-за сильных осцилляций подынтегральной функции интеграл будет заметно отличен от нуля при $t \approx r/c_*$ для оценки амплитуды импульса получим

$$\mathbf{v}(r, t) \approx \frac{\sqrt{2}}{\pi i} \mathbf{A} r^{-m} \int_\gamma dp \exp\left\{p^2 \frac{r}{2f} \frac{c_0}{c_*}\right\} F(p) Q(p). \tag{9}$$

Если спектр функции источника $Q(p)$ имеет характерную ширину $\Delta\omega$ вблизи несущей частоты ω_0 $(p = i\omega)$, то на расстояниях $r \ll \Delta\omega f c_*/c_0$ амплитуда импульса будет затухать по экспоненциальному закону $r^{-m}\exp(-r \frac{\omega_0^2}{2f} \cdot \frac{c_0}{c_*})$. На больших расстояниях $r \gg \Delta\omega f c_*/c_0$ вклад в интеграл будут вносить малые значения p: $|p| \lesssim (\frac{f}{r} \frac{c_*}{c_0})^{1/2}$.

Пусть разложение при $p \to 0$ функций $F(p)$ и $Q(p)$ начинается с членов вида p^α и p^β соответственно, что отражает поведение этих функций на больших временах, поскольку $\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to\infty} F(t)$. Тогда после обезразмеривания интеграла (8) получим закон затухания амплитуды импульса

$$|v(r, t)| \sim \mathrm{const}\, r^{-n-m}, \quad n = (1 + \alpha + \beta)/2. \tag{10}$$

Сумму $\gamma = \alpha + \beta$ будем называть степенью "компенсации" импульса. Заметим, что если функция источника является k-той производной от одиночного импульса, то $Q(p) \underset{p\to 0}{\to} p^k$, так что в случае плоского импульса ($F(p) = \mathrm{const}$ и, следовательно, $\alpha = 0$) это определение полностью эквивалентно рассмотренному выше: $\gamma = k$. Как видно из определения, степень "компенсации" импульса γ определяется как видом функции источника β, так и теми особенностями геометрии задачи, которые отражены в ее функции Грина через параметр α. В частности, при плоской геометрии $\alpha = 0$, $m = 0$, импульс в виде ступеньки $\beta = -1$ "скомпенсирован" со степенью $\gamma = -1$ и распространяется без затухания.

Используя понятие степени "компенсации", нетрудно объяснить результаты работ [2, 3] относительно затухания объемных и поверхностных волн. Для сферической геометрии задачи $\alpha = 1$, для цилиндрической $\alpha = 1/2$, поэтому затухание одиночного импульса $\beta = 0$ с учетом геометрического расхождения $m = 1$ и $m = 1/2$ происходит соответственно по законам r^{-2} и $r^{-5/4}$ [2]. Аналогично для скорости смещения поверхности в волне Рэлея, возбуждаемой линейным $\alpha = 1$, $m = 0$ и точечным $\alpha = 3/2$, $m = 1/2$ источниками для одиночного начального импульса $\beta = 0$ получаются законы затухания r^{-1} и $r^{-7/4}$ соответственно [3].

Полученное в работе соотношение, связывающее параметры функции источника и геометрии излучения с характером затухания импульса в диссипативной среде дает принципиальную возможность по измерениям затухания амплитуды импульса получать информацию о низкочастотном спектре источника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
2. *Дунин С.З., Максимов Г.А.* Особенности структуры объемных волн в дисперсионно-диссипативных средах // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 2. С. 94–100.
3. *Дунин С.З., Максимов Г.А.* Распространение волн Рэлея в диссипативных средах. Линейный источник // ПМТФ. 1988. № 3. С. 141–149.

4. *Коган С.Я.* О влиянии поглощения на форму сейсмического импульса // Изв. АН СССР. Сер. Геофиз. 1961. № 12. С. 1738–1748.
5. *Новик А., Берри Б.* Релаксационные явления в кристаллах. М.: Атомиздат, 1975. 472 с.
6. *Дунин С.З., Максимов Г.А.* Распространение импульсов в средах, обладающих спектром времен релаксации // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 6. С. 1048–1055.
7. *Шемякин Е.И.* Задачи Лэмба для среды с упругим последствием // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. № 2. С. 193–196.
8. *Ван-дер-Поль Б., Бреммер Х.* Операционное вычисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. М.: Изд-во иностр. лит., 1952.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию 08.02.90

G.A. Maximov

THE COMPENSATION DEGREE OF ACOUSTIC PULSES AND ITS RELATION WITH ATTENUATION

During pulses propagation through natural media their amplitudes and shapes are changing. It is caused by both radiation geometry and nonideal properties of media and dissipation is the most essential one. The dissipation in a medium leads to the attenuation of a pulse amplitude. There is the relationship between the pulse shape and its amplitude attenuation. For example the attenuation of the alone pulse is less than that of the bipolar one because of the additional damping owing to the diffusion and cancellation of different parts of the pulse in the process of its propagation. In the case of the nonplane geometry of radiation additional factors not connected with the source function shape appear to influence the pulse amplitude attenuation. They are the amplitude decreasing owing to the geometrical divergence of the pulse and additional attenuation caused by the special pulse shape. For example the pressure pulse radiated by a spherical source must be compensated, e.g. in any point the integral on time of the pulse propagating through this point must be equal to zero. Thus, the notion of the "compensation" degree of the pulse is introducted and its relation with the pulse attenuation is established.