

УДК 534.222

© 1991 г.

А.Г. Шустиков

### ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ И АМПЛИТУДЫ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ПРИ ЕЕ РАССЕЯНИИ НА ИЗОТРОПНЫХ ПУЛЬСАЦИЯХ СКОРОСТИ

Для некоторых модельных ситуаций исследуются продольные и поперечные пространственные и временные спектры флуктуаций фазы (амплитуды) плоской волны, возникающие при ее рассеянии на турбулентных пульсациях скорости. Рассмотрены случаи, когда поле пульсаций скорости одномасштабно и многомасштабно.

Во многих задачах, связанных с распространением и приемом звука, требуется учитывать флуктуации параметров волн, проходящих через случайно-неоднородную среду. При анализе полей флуктуаций фазы и амплитуды плоской волны выделяют продольное направление, параллельное волновому вектору первичной волны, и поперечное направление, когда точки наблюдения расположены в плоскости, перпендикулярной к волновому вектору. В литературе, посвященной данному вопросу, преимущественно рассматривались статистические характеристики флуктуаций в поперечном направлении [1–4]. Флуктуации фазы и амплитуды волны в продольном направлении исследованы менее полно. Продольная корреляция электромагнитного или звукового поля вычислялась в работе [5]. Корреляционные функции фазы и амплитуды плоской волны в продольном направлении для случая, когда стохастическое поле неоднородностей одномасштабно и скалярно, исследовались в монографии [1]. Настоящая работа посвящена исследованиям флуктуаций фазы и амплитуды плоской волны в продольном направлении в условиях, когда рассеяние происходит на многомасштабных случайных неоднородностях среды, имеющих векторный характер<sup>1</sup>. При этом производится сравнение продольных и поперечных спектров флуктуаций, рассматривается влияние фактора многомасштабности турбулентных пульсаций скорости, оценивается роль, которую играет в задачах о флуктуациях фазы и амплитуды звука отсутствие в случайном поле рассеивателей пространственных масштабов  $a$ , меньших некоторого характерного масштаба, например размера обтекаемого препятствия или масштаба Колмогорова. Задача решается при условии, что характерные линейные размеры  $a$  в случайно-неоднородной среде много больше длины звуковой волны.

Для вычисления продольного пространственного спектра фазы и амплитуды флуктуаций воспользуемся полученными в работе [1] в рамках метода плавных возмущений соотношением между продольной корреляцией  $B$  флуктуаций фазы (амплитуды) плоской волны и пространственной корреляционной функцией пульсаций показателя преломления среды:

$$B(L_1; L_2) = \frac{1}{2} \sigma_\mu^2 (J_1 + J_2), \quad (1)$$

<sup>1</sup>Заметим, что в литературе [2, 3, 6, 7] показана возможность сведения задачи о звуковых волнах в случайно-неоднородной движущейся среде к соответствующей задаче в неподвижной среде. Однако задача для неподвижной среды в нашей постановке не решалась и воспользоваться результатами указанных работ непосредственно не удастся.

где

$$J_1 = kL_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \frac{1}{k\Delta - \xi} \sin \frac{\rho^2}{2(k\Delta - \xi)} N(kr) \rho d\rho;$$

$$J_2 = - \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \left[ \operatorname{si} \frac{\rho^2}{2k(L_1 + L_2)} - \operatorname{si} \frac{\rho^2}{2k\Delta} \right] N(kr) \rho d\rho;$$

$L_1, L_2$  – расстояния от начала случайно-неоднородной среды до точек наблюдения, расположенных вдоль звукового луча;  $\Delta = L_2 - L_1$  ( $L_2 > L_1 \gg a$ );  $\sigma_\mu^2, N(\mathbf{r})$  – соответственно дисперсия и коэффициент пространственной корреляции отклонений  $\mu$  показателя преломления среды от среднего значения, равного единице;  $k$  – волновое число звука;  $\mathbf{r}$  – разнесение между точками поля неоднородностей,  $|k\mathbf{r}|^2 = \xi^2 + \rho^2$ , причем  $\xi$  – нормированное на  $k$  продольное разнесение,  $\rho$  – поперечное; знак плюс относится к флуктуациям фазы, знак минус – амплитуды.

Будем рассматривать флуктуации параметров звуковой волны, вызванные рассеянием на турбулентных пульсациях скорости  $v$ . Если учитывать в уравнениях движения только члены первого порядка малости по  $v$ , то  $|\mu| = v_1/c_0$  [2], где  $v_1$  – пульсации скорости в направлении распространения звуковой волны;  $c_0$  – средняя скорость звука. Для изотропной турбулентности в несжимаемой среде  $N(\mathbf{r})$  представляет собой компоненту  $N_{11}(\mathbf{r})$  корреляционного тензора случайного векторного поля, которая известным образом [3] выражается через скалярную функцию  $N_{LL}(r)$  ( $r = |\mathbf{r}|$ ), называемую коэффициентом продольной корреляции изотропного векторного поля. Зададим  $N_{LL}$  в виде:

$$N_{LL}(r) = \int_{a_1}^{a_2} f(a) e^{-\frac{r^2}{a^2}} da. \quad (2)$$

Аналогичное представление при  $a_2 = 0$  и  $a_2 = \infty$  использовалось в работе [8]. Выбирая  $a_1 \neq 0$  и  $a_2 \neq \infty$ , мы тем самым моделируем поле, в котором отсутствуют пространственные масштабы, меньшие  $a_1$  и большие  $a_2$ . Представление (2) позволит проводить расчеты флуктуаций звука для случая, когда в поле рассеивателей нет масштабов, меньших масштаба Колмогорова. Возможность ограничивать пространственные масштабы моделируемого случайного поля рассеивателей сверху чрезвычайно удобна, а в ряде случаев и необходима, поскольку флуктуации в волне существенным образом зависят от волнового параметра  $D = 4L_1/ka^2$ .

Если в качестве  $f(a)$  взять дельта-функцию, то

$$N_{LL}(r) = e^{-\frac{r^2}{a^2}}, \quad N_{11}(kr) = \left(1 - \frac{\rho^2}{k^2 a^2}\right) e^{-\frac{\rho^2 + \xi^2}{k^2 a^2}}. \quad (3)$$

Формула (3) описывает корреляцию в случайном поле, обладающем единственным пространственным масштабом  $a$ .

Исследуем сначала флуктуации звука в поле пульсаций скорости с корреляциями (3), а затем перейдем к более реальному случаю многомасштабной турбулентности. Подставляя (3) в (1) и выполняя интегрирование, получим

$$B(L_1; \Delta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_\mu^2 k^2 a L_1 \left\{ \frac{1 - \left(\frac{\Delta}{2L_1}\right)^2 D^2}{\left[1 + \left(\frac{\Delta}{2L_1}\right)^2 D^2\right]^2} \pm \frac{1}{1 + D^2} \left[ \frac{\left(1 + \frac{\Delta}{2L_1}\right)(1 + D^2)}{1 + D^2 \left(1 + \frac{\Delta}{2L_1}\right)^2} - \frac{\frac{\Delta}{2L_1}(1 + D^2)}{1 + \left(\frac{\Delta}{2L_1}\right)^2 D^2} \right] \right\}. \quad (4)$$

Отметим, что интеграл  $J_1$  (первый член в фигурных скобках) вычислен приближенно, подобно тому как это было сделано в [1], а интеграл  $J_2$  (второй член) – точно. Структура первого члена в фигурных скобках точно соответствует ситуации, когда поле рассеивателей в продольном направлении дельта коррелировано. При  $D \rightarrow 0$  выражение в правой части (4) в случае флуктуации фазы переходит в известное выражение для продольной корреляции, получаемое в лучевом приближении [4], когда поле рассеивателей скалярно.

Корреляционная функция (4) зависит от  $\Delta$ ,  $L_1$ ,  $D$  и характеризует, вообще говоря, статистически неоднородное поле. Рассмотрим случай  $D \rightarrow \infty$ , тогда корреляции флуктуаций фазы и амплитуды совпадают и из (4) следует:

$$B(\Delta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_{\mu}^2 k^2 a L_1 \frac{1 - \left(\frac{2\Delta}{ka^2}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{2\Delta}{ka^2}\right)^2\right]}. \quad (5)$$

Характерным линейным масштабом в (5) является  $ka^2$ . При выполнении условия  $ka^2 \ll L_1$  корреляция флуктуаций (5) практически обращается в нуль на расстояниях, много меньших дистанции  $L_1$  распространения волны в случайно-неоднородной среде. Поэтому зависимостью  $B$  от  $L_2$  можно пренебречь и считать, что  $B(L_1; L_2) = B(\Delta)$ ,  $L_1 \simeq L_2 = L$ . Найдем соответствующий (5) одномерный продольный пространственный спектр  $E_1(\kappa_1, a)$ :

$$\begin{aligned} E_1(\kappa_1; a) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\Delta) \cos(\kappa_1 \Delta) d\Delta = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{8} \sigma_{\mu}^2 (ka)^3 L (\kappa_1 ka^2) e^{-\frac{\kappa_1 ka^2}{2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Как видно из формулы (6), особенность продольного спектра флуктуаций фазы (амплитуды) волны при ее рассеянии на изотропных турбулентных пульсациях скорости (поле рассеивателей – векторно и соленоидально) заключается в том, что он равен нулю при  $\kappa_1 = 0$ . Когда поле рассеивателей скалярно, то  $E_1(0, a) \neq 0$ .

Вычислим поперечный одномерный пространственный спектр  $E_2(\kappa_2; a)$  флуктуаций фазы и амплитуды, исходя из результатов работы [2]:

$$E_2(\kappa_2; a) = 4 \int_0^{\infty} F(\kappa; a) d\kappa_3, \quad (7)$$

где

$$F(\kappa, a) = \pi k^2 L \left(1 \pm \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k} \Phi_{\mu}(\kappa; a)\right)$$

– двумерный пространственный спектр флуктуаций [2], знак плюс относится к флуктуациям фазы, знак минус – к флуктуациям амплитуды;  $\kappa^2 = \kappa_2^2 + \kappa_3^2$ ,  $\kappa_2$  и  $\kappa_3$  – поперечные волновые числа спектра флуктуаций;  $\Phi_{\mu}(\kappa; a) = \Phi_{\mu}(0; \kappa_2; \kappa_3; a)$  – трехмерный пространственный спектр случайного поля рассеивателей с единственным характерным масштабом  $a$ . Для рассматриваемого векторного поля изотропных пульсаций скорости с корреляционной функцией вида (3) имеем:

$$\Phi_{\mu}(\kappa; a) = \frac{\sigma_{\mu}^2 a^5 \kappa^2}{32\pi\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\kappa^2 a^2}{4}}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7) и интегрируя, получим:

$$E_2(\kappa; a) = \frac{\sigma_{\mu}^2 (ka)^2 L}{4} e^{-\frac{\kappa_2^2 a^2}{4}} \left\{ \left(1 + \frac{\kappa_2^2 a^2}{2}\right) \pm \frac{2}{D^4 \sqrt{1+D^2}} \sin\left(\frac{1}{2} \arctg D + \frac{\kappa_2^2 a^2}{4} D\right) \right\}. \quad (9)$$

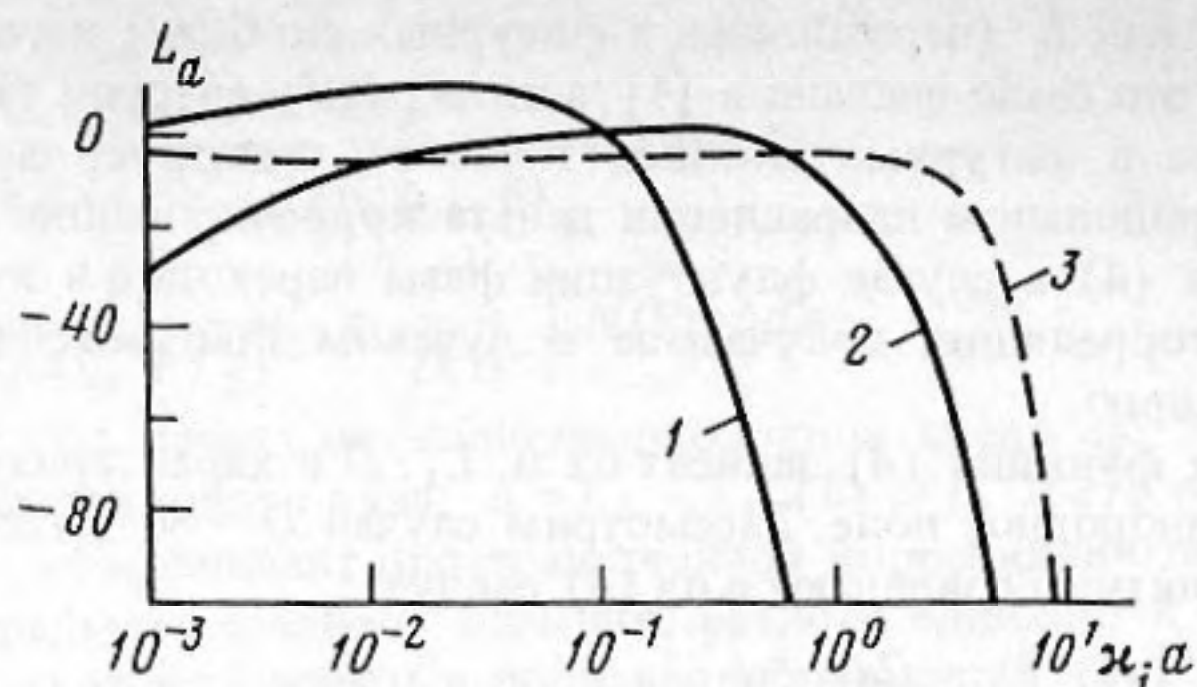


Рис. 1. Спектры флуктуаций фазы и амплитуды звука при рассеянии на одномасштабных пульсациях скорости: продольные —  $i = 1$ , расчет по формуле (6),  $1 - ka = 100$ ;  $2 - ka = 10$ ;  $3 -$  поперечный,  $i = 2$ , расчет по формуле (9)

Спектральные плотности флуктуаций фазы и амплитуды плоской волны в случае рассеяния на одномасштабных пульсациях скорости при  $D = \infty$  представлены на рис. 1. По вертикальной оси отложены нормированные спектральные уровни  $L_a = 10 \lg \bar{E}_i$ ,  $\bar{E}_i = E_i(\kappa_i a) / \sigma_v^2 (ka)^2 L$  в децибеллах, по горизонтальной оси — соответствующие волновые числа, нормированные на масштаб  $a$ . Хорошо видно, что ширина продольного спектра флуктуаций зависит от параметра  $ka$ : чем  $ka$  больше, тем он уже. Ширина поперечного спектра от  $ka$  не зависит, в рассматриваемых условиях он шире продольного. Отметим, также, что имеется область волновых чисел, где спектральная плотность продольного спектра больше, чем поперечного.

Рассмотрев спектры флуктуаций звука при рассеянии на одномасштабных пульсациях скорости, обратимся к более реальной ситуации многомасштабной турбулентности. Возьмем в (2)  $f(a) = \exp(-a^2/a_0^2) / a_0 \sqrt{\pi}$ , тогда при  $a_1 = 0$  и  $a_2 = \infty$   $N_{LL}(r) = \exp(-r/a_0)$ , где  $a_0$  — интегральный масштаб турбулентности. Для выбранной  $f(a)$  соответствующий (2) одномерный продольный спектр  $E(\kappa_1)$  пульсаций скорости равен:

$$E(\kappa_1) = \sigma_v^2 \frac{2}{\pi} \frac{a_0}{1 + a_0^2 \kappa_1^2} \left( e^{-\frac{1 + a_0^2 \kappa_1^2}{4a_0^2} a_1^2} - e^{-\frac{1 + a_0^2 \kappa_1^2}{4a_0^2} a_2^2} \right), \quad (10)$$

где  $\sigma_v^2$  — дисперсия пульсаций скорости. Спектр (10) характеризует модельное многомасштабное поле рассеивателей, он имеет участок степенного спада и быстро уменьшается при  $\kappa_1 < 2/a_2$  и при  $\kappa_1 > 2/a_1$ . Будем полагать в дальнейшем, что  $ka_1 \gg 1$  и  $D_2 = 4L/ka_2^2 \gg 1$ .

Выразим одномерные пространственные спектры  $E_i(\kappa_i)$  флуктуаций фазы и амплитуды плоской волны, вызванные рассеянием на многомасштабной турбулентности, через спектры  $E_i(\kappa_i; a)$  флуктуаций, соответствующие одномасштабному полю рассеивателей. Подставляя (2) в интегральные представления для продольной или поперечной автокорреляции [1] (например, в (1)) и переходя от автокорреляции через преобразование Фурье к соответствующим одномерным спектрам  $E_i(\kappa_i)$ , меняя порядок интегрирования, приходим к искомому соотношению:

$$E_i(\kappa_i) = \int_{a_1}^{a_2} f(a) E_i(\kappa_i; a) da; \quad (11)$$

при  $i = 1$  оно относится к продольным спектрам, а при  $i = 2$  — к поперечным.

Одномерный продольный пространственный спектр  $E_1(\kappa_1)$  флуктуаций получим, подставляя (6) в (11). Результат интегрирования с выбранной  $f(a)$  может быть

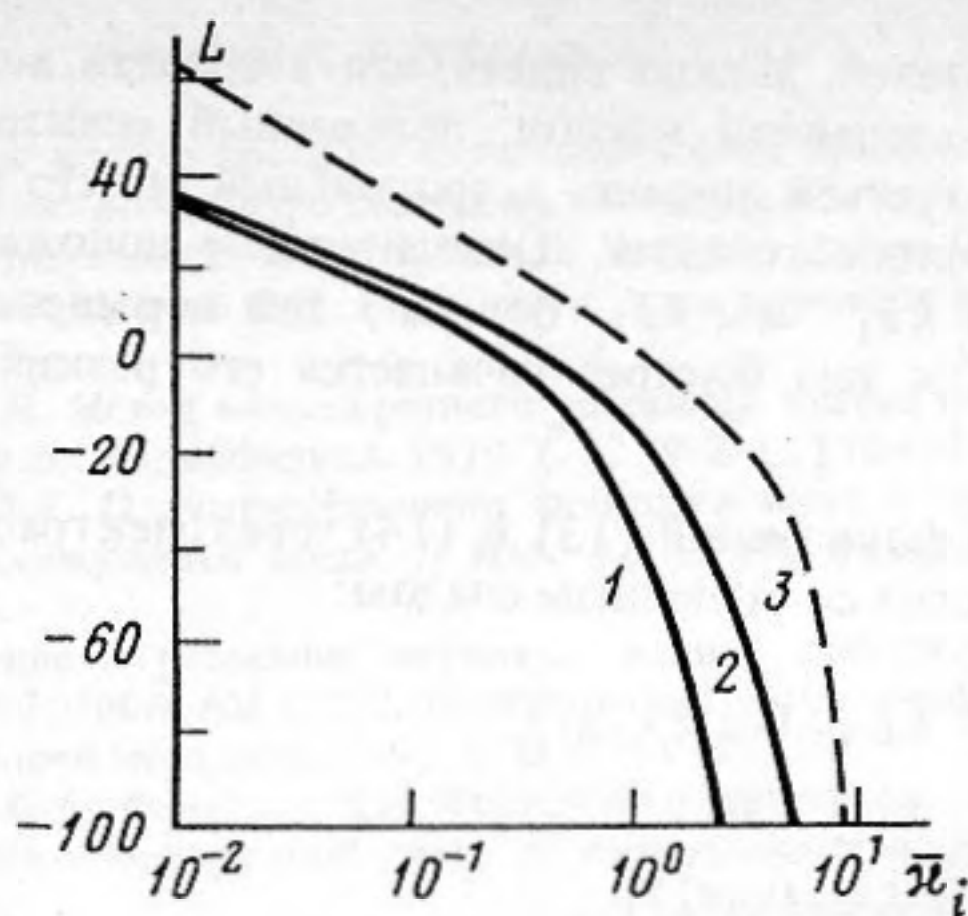


Рис. 2. Спектры флуктуаций фазы и амплитуды звука при рассеянии на многомасштабных пульсациях скорости: продольные —  $i=1$ , расчет по формуле (13),  $1 - ka_1 = 20$ ;  $2 - ka_1 = 10$ ;  $3 -$  поперечный,  $i=2$ , расчет по формуле (14)

записан в виде:

$$E_1(\kappa_1) = \frac{32\sigma_\mu^2 L a_0^5 k^4 \kappa_1}{(2\kappa k a_0^2 + 1)^3} \varphi(a_1; a_2; a_0; k; \kappa_1). \quad (12)$$

В случае  $a_0 \gg a_2$  функция  $\varphi$  описывает резкий спад спектра флуктуаций при малых и больших волновых числах  $\kappa_1$ , что обусловлено характером спектра (10) поля рассеивателей. Рассмотрим область больших волновых чисел  $\kappa_1 k a_0^2 \gg 1$ . Тогда при  $a_2 \gg a_1$  из (12) следует:

$$E_1(\kappa_1) = \sigma_\mu^2 k a_1 L \frac{a_1}{a_0} \frac{4\varphi_1(\kappa a_1; \kappa_1 a_1)}{(\kappa_1 a_1)^2}, \quad (13)$$

где

$$\varphi_1 = \left[ 1 + \frac{1}{2} (\kappa a_1) (\kappa_1 a_1) + \frac{1}{8} (\kappa a_1)^2 (\kappa_1 a_1)^2 \right] e^{-\frac{(\kappa a_1)(\kappa_1 a_1)}{2}}.$$

Одномерный поперечный пространственный спектр флуктуаций  $E_2(\kappa_2)$  получим, подставляя (9) в (11). При  $D = \infty$  и выполнении условия  $a_0 \gg a_2 \gg a_1$  в области больших волновых чисел  $(\kappa_2 a_0)^2 \gg 1$  результат интегрирования с той же  $f(a)$  имеет вид:

$$E_2(\kappa_2) = \sigma_\mu^2 (\kappa a_1)^2 L \frac{a_1}{a_0} \frac{2\varphi_2(\kappa_2 a_1)}{(\kappa_2 a_1)^3}, \quad (14)$$

где

$$\varphi_2 = \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\kappa_2 a_1}{\sqrt{\pi}}\right) \right] + \left[ \frac{\kappa_2 a_1}{\sqrt{\pi}} + \frac{(\kappa_2 a_1)^3}{8\sqrt{\pi}} \right] e^{-\frac{(\kappa_2 a_1)^2}{4}},$$

где  $\Phi$  — интеграл вероятности.

Спектральные плотности флуктуаций фазы и амплитуды плоской волны в случае рассеяния на многомасштабных пульсациях скорости при  $D_2 = \infty$  представлены на рис. 2. По вертикальной оси отложена нормированная спектральная плотность  $L = 10 \lg \bar{E}_i$ ,  $\bar{E}_i = E_i(\bar{\kappa}_i) a_0 / \sigma_\mu^2 (\kappa a_1)^2 L a_1$  флуктуаций в децибеллах, по горизонтальной оси — нормированные волновые числа  $\bar{\kappa}_i = \kappa_i a_1$ , где  $a_1$  — размер самых мелких пульса-

ций в поле рассеивателей. Можно видеть, что в области волновых чисел, где спектры флуктуаций имеют степенной наклон, поперечный спектр спадает пропорционально волновому числу в третьей степени, а продольный спектр медленнее: пропорционально второй степени волнового числа. Относительное положение спектральных уровней  $\bar{E}_1$  и  $\bar{E}_2$  зависит от  $ka_1$ : чем  $ka_1$  больше, тем нормированный продольный спектр располагается ниже, и тем быстрее начинается его резкий спад при больших волновых числах.

Выразим спектры флуктуаций (13) и (14) через спектральную плотность  $H(k)$  поля рассеивателей на участке со степенным спадом:

$$E_1(k_1) = 2\pi \frac{H(k_1)}{c_0^2} kL \varphi_1(ka_1; k_1 a_1), \quad (15)$$

$$E_2(k_2) = \pi \frac{H(k_2)}{c_0^2 k_2} k^2 L \varphi_2(k_2 a_1). \quad (16)$$

В использованной для расчетов модели (10) турбулентных пульсаций скорости  $H(k) = 2\sigma_v^2 / \pi a_0 k^2$ . Экспериментальные данные о локально-изотропной турбулентности хорошо обобщаются [3], если пользоваться формулой:

$$H(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (17)$$

где  $C$  – постоянная,  $\epsilon$  – средняя скорость диссипации турбулентной энергии.

Когда турбулентные пульсации сносятся средним течением со скоростью  $U_i$  вдоль или поперек направления распространения звука и выполняются условия квазистационарности [9], одномерные пространственные спектры  $E_i(k_i)$  определяют временные спектры флуктуаций  $W_i(f)$  [1, 2]:

$$W_i(f) = \frac{2\pi}{U_i} E_i\left(\frac{2\pi f}{U_i}\right). \quad (18)$$

Подставляя в (18) соотношения (15)–(17) и принимая рекомендуемое в работе [3] значение  $C \approx 0,5$ , приходим к следующим результатам: если средняя скорость  $U_1$  направлена вдоль звуковых лучей, то

$$W_1(f) = 0,9 \epsilon^{2/3} C_0^{-2} U_1^{2/3} kL f^{-5/3} \varphi_1\left(ka_1; \frac{2\pi f a_1}{U_1}\right); \quad (19)$$

если же средняя скорость  $U_2$  направлена поперек звуковых лучей, то

$$W_2(f) = 7 \cdot 10^{-2} \epsilon^{2/3} c_0^{-2} U_2^{5/3} f^{-8/3} k^2 L \varphi_2\left(\frac{2\pi f a_1}{U_2}\right). \quad (20)$$

Временной спектр (20) в области степенного спада практически совпадает с высокочастотной асимптотикой, полученной для аналогичных условий в работе [2]; при этом разница заключается только в значениях числового коэффициента, которые отличаются друг от друга на величину порядка 10%. Если понимать под  $a_1$  масштаб Колмогорова, то в области более высоких частот функция  $\varphi_2$  описывает быстрый спад спектра флуктуаций, обусловленный отсутствием в поле рассеивателей масштабов, меньших масштаба Колмогорова. Аналогичный смысл имеет функция  $\varphi_1$  в формуле (19).

Полученные выражения (19), (20) позволяют в области высоких частот сравнить между собой спектры флуктуаций, связанных с продольным и поперечным сносом. Продольный спектр существенно слабее зависит от средней скорости сноса по сравнению с поперечным. Вместе с тем продольный спектр спадает с частотой гораздо медленнее, чем поперечный. Численные оценки показывают, что вопреки распространенному мнению возможны ситуации, когда спектральная плотность флуктуаций, вызванных продольным сносом, сравнима со спектром флуктуаций при поперечном сносе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чернов Л.А.* Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М.: Наука, 1975.
2. *Татарский В.И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967.
3. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч. II. М.: Наука, 1967.
4. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. М.: Наука, 1978.
5. *Осташев В.Е., Татарский В.И.* Метод многократного рассеяния вперед в средах со случайными неоднородностями // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 2. С. 170–179.
6. *Абдуллаев С.С., Осташев В.Е.* О распространении звуковых волн в трехмерно-неоднородной (случайно-неоднородной) движущейся среде // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1988. Т. 24. № 4. С. 417–426.
7. *Осташев В.Е.* Распространение и рассеяние звуковых волн в случайно-неоднородных движущихся средах: Препринт № 7. ИФА АН СССР. Исследования пограничного слоя атмосферы над сушей и океаном акустическими методами. 1990. Ч. II. С. 45–50.
8. *Виноградов А.Г., Кравцов Ю.А., Фейзулин З.И.* Флуктуации сигнала от источника, движущегося в многомасштабной случайно-неоднородной среде // Радиотехника и электроника. 1974. № 8. Т. 19. С. 1758–1761.
9. *Кузнецова Н.Г., Чернов Л.А.* Влияние временной изменчивости случайных неоднородностей среды на корреляционную функцию поля и спектр волны // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. № 8. Т. 10. С. 1171–1180.

Акустический институт  
им. Н.Н. Андреева  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
04.01.90

A.G. Shustikov

### FLUCTUATIONS IN A PLANE SOUND WAVE DURING ITS SCATTERING BY ISOTROPIC VELOCITY PULSATIONS

For some model cases the longitudinal and transverse, spatial and temporal spectra of parameters fluctuations of a plane wave scattered by turbulent velocity pulsations are investigated. Single- and multiple-scale fields of the velocity pulsations are considered.