АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 4

УДК 534.26.51

© 1991 г.

А.В. Осипов

О ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ С ИМПЕДАНСНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Точное решение задачи, полученное Малюжинцем, преобразуется к представлениям в виде рядов бесселевых функций или рядов по степеням волнового расстояния от вершины. Исследуются свойства этих рядов для различных импедансов сторон и углов раствора области. Приводятся приближенные формулы для описания поля вблизи ребра.

Решение задачи дифракции плоской волны в угловой области с импедансными граничными условиями было построено почти 40 лет тому назад в виде контурного интеграла в комплексной плоскости [1]. Такое представление хорошо приспособлено для исследования решения при $kr \gg 1$, k – волновое число, r – расстояние до ребра, и в настоящее время по этому вопросу имеется обширная литература (см., например, [2, 3]).

Сложнее обстоит дело, если требуется рассмотреть поведение поля в промежуточной зоне ($kr \sim 1$) или вблизи ребра ($kr \ll 1$). Асимптотические методы вычисления интеграла в этом случае уже не работают, а численное интегрирование сопряжено с рядом трудностей, которые вызваны неограниченностью контура интегрирования, наличием у подынтегрального выражения полюсов, а также необходимостью многократного вычисления специальных функций, входящих в ядро [3, 4].

Известно, однако, что для расчетов полей при не очень больших значениях kr могут успешно применяться представления в виде рядов, содержащих цилиндрические функции [5, 6]. Эти разложения были получены для случаев граничных условий Дирихле или Неймана и описываются следующей формулой:

$$u = 4\mu \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon_p e^{-i\nu_p \pi/2} J_{\nu_p}(kr)\, \chi(\nu_p(\Phi+\varphi))\, \chi(\nu_p(\Phi+\varphi_0)), \tag{1}$$

где Φ – половина угла раствора области, $\mu = \pi/(2\Phi)$, φ и φ_0 – полярные углы точки наблюдения и направления падения волны ($-\Phi \leqslant \varphi, \varphi_0 \leqslant \Phi$), $J_{\nu_p}(kr)$ – функция Бесселя, $\epsilon_p = 1$ при $p \geqslant 1$. Значения параметров ϵ_0, ν_p и вид функций $\chi(\kappa)$ зависят от типа граничных условий: $\epsilon_0 = ½$, $\nu_p = \mu p$, $\chi(\kappa) = \cos\kappa$ – условия Неймана при $\varphi = \pm\Phi$; $\epsilon_0 = 1$, $\nu_p = \mu p$, $\chi(\kappa) = \sin\kappa$ – условия Дирихле при $\varphi = \pm\Phi$; $\epsilon_0 = 1$, $\nu_p = \mu(p + 1/2)$, $\chi(\kappa) = \sin\kappa$ – условие Неймана при $\varphi = \Phi$ и условие Дирихле при $\varphi = -\Phi$. Случай, когда условие Дирихле ставится на грани $\varphi = \Phi$, а условие Неймана – при $\varphi = -\Phi$, получается из предыдущего путем смены знаков перед φ и φ_0.

Преобразование интегрального решения Малюжинца к ряду бесселевых функций для угловой области с импедансным граничным условием на одной стороне и с условием Дирихле – на другой рассматривалось в статье [7]. Но приведенные в этой работе выражения для поля обращаются в тождественный нуль при переходе к условию Неймана на первой границе, что противоречит известному предельному случаю – формула (1).

Оригинальный подход к решению проблемы был предложен в статье [8], где был развит метод, объединяющий метод рядов и метод интегралов Зоммерфельда. Для одинаковых и чисто мнимых импедансов сторон, а также для падающего поля, симмет-

ричного относительно биссектрисы угловой области, был указан алгоритм построения всех членов представления в виде рядов бесселевых функций.

В настоящей статье излагается альтернативный подход к решению поставленной задачи. Представления в виде рядов получаются непосредственно из интеграла Малюжинца, причем импедансы сторон могут быть произвольными, а падающее поле – не обязательно симметричным. Идея построений сводится к разложению трансформанты интеграла в ряды экспоненциальных функций с последующим почленным применением интегральной формулы Зоммерфельда–Сонина для функций Бесселя. Найденные в результате представления являются точными, охватывают все возможные варианты постановки граничных условий и переходят в выражение (1) в соответствующих предельных случаях.

Кроме представлений, содержащих ряды бесселевых функций, в данной работе получаются и исследуются представления решения в виде рядов по степеням kr – так называемых рядов Мейкснера [9]. При малых kr первые члены этих рядов дают простые аналитические выражения для волнового поля в окрестности ребра.

Представления в виде рядов изменяют свою аналитическую структуру, если угол полураствора области может быть записан как $\Phi = \pi n/(2(2m-1))$, где n, m – натуральные числа. При этом в рядах цилиндрических функций появляются слагаемые, содержащие производные функций Бесселя по значку, а в рядах Мейкснера – логарифмические члены. Последний результат подтверждает выводы работ [10, 11] о необходимости пополнения рядов Мейкснера членами со степенями $\ln(kr)$ при определенных углах раствора области. Для важных частных случаев импедансной полуплоскости и плоскости со скачком поверхностного импеданса аналитическая структура видоизмененных рядов Мейкснера приводится полностью.

Запишем данное в [1] решение задачи дифракции в следующем виде:

$$u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{-ikr\cos\alpha}(S(\alpha+\varphi,\varphi_0) - S(-\alpha+\varphi,\varphi_0))\,d\alpha, \tag{2}$$

где

$$S(\alpha,\beta) = \Psi(\alpha)\,\sigma(\alpha,\beta)\,/\,\Psi(\beta) \text{ и } \sigma(\alpha,\beta) = \frac{\mu}{2}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\mu}{2}(\alpha-\beta)\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\mu}{2}(\alpha+\beta)\right)\right).$$

Контур интегрирования γ_+ на комплексной плоскости α представляет собой петлю в верхней полуплоскости, проходящую выше всех особенностей подынтегрального выражения, концы которой располагаются при $\pi/2 + i\infty$ и $-3\pi/2 + i\infty$. Функция $\Psi(\alpha)$ описывается произведением специальных функций Малюжинца: $\Psi(\alpha) = \prod_{p=1}^{4} \psi_\Phi(\alpha+\alpha_p)$, причем $\alpha_1 = \Phi + \pi/2 - \theta_+$, $\alpha_2 = \Phi - \pi/2 + \theta_+$, $\alpha_3 = -\Phi - \pi/2 + \theta_-$, $\alpha_4 = -\Phi + \pi/2 - \theta_-$. Углы Брюстера $\theta_\pm$, связанные с нормированными поверхностными импедансами сторон $z_\pm$ соотношением $\sin\theta_\pm = z_\pm^{-1}$, – в общем случае комплексные параметры с произвольной мнимой частью и вещественной частью, ограниченной условием: $\operatorname{Re}\theta_\pm \in (0,\pi/2]$.

Разложим трансформанты $S(\pm\alpha+\varphi,\varphi_0)$ в интеграле (2) в ряде по степеням $e^{i\alpha}$. Тригонометрические сомножители $\sigma(\pm\alpha+\varphi,\varphi_0)$ при $\operatorname{Im}\alpha > 0$ могут быть разложены в геометрические прогрессии:

$$\sigma(\pm\alpha+\varphi,\varphi_0) = \mp 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(\pm\varphi_0)\, e^{in\mu(\alpha\pm\varphi)+in\pi/2}, \tag{3}$$

где $a_m(\varphi_0) = \sin((m+1)(\mu\varphi_0 + \pi/2))$. Чтобы описать в аналогичной форме функцию $\Psi(\alpha)$, воспользуемся представлением функции Малюжинца, полученным в [12]:

$$\psi_\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\exp\left(\mp i\frac{\mu z}{4} + I(\pm z,\mu)\right). \tag{4}$$

Верхние знаки в (4) берутся при $\operatorname{Im} z > 0$, а нижние – при $\operatorname{Im} z < 0$. Функция $I(w,\mu)$

имеет вид суммы экспонент:

$$I(w,\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{e^{i\mu k w}}{2k\cos(\pi\mu k/2)} + \frac{e^{i(2k-1)w}}{(2k-1)\sin(\pi(2k-1)/\mu)} \right), \qquad (5)$$

и ряд сходится абсолютно, если $\operatorname{Im} w > 0$. При $|\operatorname{Im} z| \to \infty$ членом I в показателе экспоненты можно пренебречь и формула (4) переходит в известное асимптотическое выражение, указанное Малюжинцем [13]. Представление (4) согласуется и с асимптотикой, построенной в [14], но в отличие от нее имеет существенно более простой вид. Формула (4) является точной и описывает $\psi_\Phi(z)$ для значений параметра Φ, не равных $\Phi_{nm} = \pi n/(2(2m-1))$, где n, m – натуральные числа. При $\Phi = \Phi_{mn}$ отдельные слагаемые ряда (5) обращаются в бесконечность, однако особенности коэффициентов компенсируются и сумма в целом остается ограниченной. Все последующие выкладки проведем при условии, что $\Phi \neq \Phi_{nm}$. Случаи $\Phi = \Phi_{nm}$ могут быть рассмотрены путем предельного перехода в соответствующих формулах.

Контур γ_+ располагается целиком в полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha > M$, где $M = \sup(|\operatorname{Im}\theta_+|, |\operatorname{Im}\theta_-|)$ [1], поэтому при подстановке представлений (4) в произведения для $\Psi(\pm\alpha+\varphi)$ аналитический вид представления для каждой из функций Малюжинца будет одинаковым во всех точках контура. В результате получаем разложение

$$\Psi(\pm\alpha+\varphi) = \frac{1}{4}\psi_\Phi^4\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-i\mu(\alpha\pm\varphi)} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{\pm} e^{i\mu k(\alpha\pm\varphi)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\pm} e^{i(2k-1)(\alpha\pm\varphi)}\right). \qquad (6)$$

Коэффициенты рядов описываются формулами:

$$b_k^{\pm} = -b_k(\theta_+)e^{\mp i\pi k/2} - b_k(\theta_-)e^{\pm i\pi k/2}, \quad b_k(\theta_\pm) = \cos\left(\mu k\left(\frac{\pi}{2} - \theta_\pm\right)\right)/(k\cos(\pi\mu k/2)),$$

$$c_k^{\pm} = c_k(\theta_+)e^{\pm i(2k-1)\Phi} + c_k(\theta_-)e^{\mp i(2k-1)\Phi},$$

$$c_k(\theta_\pm) = \sin((2k-1)\theta_\pm)/\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\sin(2\Phi(2k-1))\right).$$

Если теперь для второго из экспоненциальных сомножителей в (6) записать ряд Тейлора по степеням показателя и перемножить с разложениями (3), то трансформанта интеграла (2) примет искомую форму рядов экспонент $e^{i\nu_{pq}\alpha}$, где $\nu_{pq} = \mu p + q$, p, q – натуральные числа. Перестановка порядка суммирования и интегрирования с учетом интегральной формулы Зоммерфельда–Сонина для функции Бесселя [15]

$$J_\nu(z) = -\frac{1}{2\pi} e^{i\nu\pi/2} \int_{\gamma_+} e^{-iz\cos\alpha + i\nu\alpha} d\alpha$$

приводит к представлению решения задачи в виде двойной суммы

$$u = \frac{\mu\psi_\Phi^4(\pi/2)}{2\Psi(\varphi_0)} \sum_{p,q=0}^{\infty} J_{\nu_{pq}}(kr) e^{-i\nu_{pq}\pi/2} f_p \left(g_q^+ e^{ip\pi/2 + i\nu_{pq}\varphi} + g_q^- e^{-ip\pi/2 - i\nu_{pq}\varphi}\right). \qquad (7)$$

Коэффициенты f_p, $g_q^{\pm}$ находятся путем разложения производящих функций:

$$\sum_{q=0}^{\infty} g_q^{\pm} z^q = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\pm} z^{2k-1}\right), \qquad (8)$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} f_p z^p = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varphi_0) z^n \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k\right), \qquad (9)$$

причем $b_k = (-1)^{k+1} b_k(\theta_+) - b_k(\theta_-)$; коэффициенты $b_k(\theta_\pm)$, $c_k^{\pm}$, $a_n(\varphi_0)$ были определены выше. При перестановке параметров $\theta_\pm$ коэффициенты $g_q^{\pm}$ переходят друг в друга, а для коэффициентов f_p выполняется тождество $f_p(\varphi_0, \theta_+, \theta_-)e^{-ip\pi/2} = f_p(-\varphi_0, \theta_-, \theta_+)e^{ip\pi/2}$. Учитывая эти свойства, легко видеть, что сумма (7) удовлетворяет очевид-

ному с физической точки зрения требованию инвариантности относительно смены знаков угловых координат φ, φ_0 и перестановки импедансных параметров $\theta_\pm$. В пределе $\theta_\pm \to 0$ (условия Неймана на обеих границах) коэффициенты $g_q^\pm$, f_p находятся явно и выражение (7) переходит в (1).

В формуле (7) нельзя выполнить предельный переход к граничному условию Дирихле ($|\operatorname{Im}\theta_\pm| \to \infty$) на одной или обеих сторонах угловой области. Дело в том, что при этом $M \to \infty$, тогда как при выводе (7) существенно использовалась возможность разместить контур интегрирования в (2) целиком в полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha > M$. Для построения представления, аналогичного (7), в этом случае необходимо сначала перейти к пределу в интегральном представлении (2) и только затем записать для трансформанты разложение по степеням $e^{i\alpha}$. Реализация указанной программы для условия Дирихле при $\varphi = -\Phi$ и импедансного условия при $\varphi = \Phi$ приводит к следующему представлению решения задачи дифракции:

$$u = 2\mu \frac{\psi^2_\Phi(\pi/2)}{\Psi_{12}(\varphi_0)} \sum_{p,q=0}^{\infty} J_{\bar\nu_{pq}}(kr)\, e^{-i\bar\nu_{pq}\pi/2} l_p(\varphi_0, \theta_+)\, m_q(\theta_+) \sin(\bar\nu_{pq}(\Phi + \varphi)). \qquad (10)$$

Здесь $\bar\nu_{pq} = \mu(p + \frac{1}{2}) + q$, $\Psi_{12}(\varphi_0) = \prod_{p=1}^{2} \psi_\Phi(\varphi_0 + \alpha_p)$. Коэффициенты m_q и l_p определяются с помощью выражений аналогичных (8) и (9) с той только разницей, что в (8) вместо $c_k^\pm$ нужно подставить $c_k(\theta_+)$, а в (9) в коэффициентах b_k опустить слагаемое, зависящее от θ_-. Нетрудно убедиться, что при $\theta_+ \to 0$ формула (10) переходит в (1).

Представление для случая, когда условие Дирихле накладывается при $\varphi = \Phi$, а импедансное условие – при $\varphi = -\Phi$, очевидно, может быть получено из (10) путем замены θ_+ на θ_- и смены знаков у φ и φ_0. Это представление и представления (1), (7) и (10) охватывают все возможные варианты постановки граничных условий в угловой области.

Формулы (7), (10) получены из точного решения задачи и поэтому удовлетворяют граничным условиям при $\varphi = \pm\Phi$. Однако в отличие от (1) каждый отдельно взятый член этих рядов уже не удовлетворяет условиям на границах. Чтобы исследовать механизм выполнения импедансных условий, подставим представления (7) и (10) в граничные условия. С учетом функционального соотношения для цилиндрических функций $(2\nu/z) J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)$ находим, что импедансные граничные условия при $\varphi = \pm\Phi$ будут выполнены, если коэффициенты $g_q^\pm$ связаны рекуррентными формулами

$$\mathbf{G}_{q+1} = \hat K_q \mathbf{G}_q + \hat L_q \mathbf{G}_{q-1}, \quad q = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (11)$$

где $\mathbf{G}_q = (g_q^+, g_q^-)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{G}_{-1} \equiv 0$; $\hat K_q$, $\hat L_q$ – известные матрицы:

$$\hat K_q = \frac{1}{\sin(2\Phi(q+1))} \begin{pmatrix} e^{i\Phi(2q+1)}\sin\theta_+ + e^{-i\Phi(2q+1)}\sin\theta_-, & e^{i\Phi}\sin\theta_+ + e^{-i\Phi}\sin\theta_- \\ e^{-i\Phi}\sin\theta_+ + e^{i\Phi}\sin\theta_-, & e^{-i\Phi(2q+1)}\sin\theta_+ + e^{i\Phi(2q+1)}\sin\theta_- \end{pmatrix},$$

$$\hat L_q = \frac{1}{\sin(2\Phi(q+1))} \begin{pmatrix} \sin(2q\Phi), & -\sin(2\Phi) \\ -\sin(2\Phi), & \sin(2q\Phi) \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты $g_0^\pm$, порождающие рекурсию, и коэффициенты f_p могут быть произвольными, их значения определяются падающим полем и условием на бесконечности. Из формулы (8) следует, что в нашем случае $\mathbf{G}_0 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$. Для ряда (10) импедансное условие на границе $\varphi = \Phi$ будет выполнено при произвольных l_p и m_0, если коэффи-

циенты m_q образуют рекурсию

$$m_{q+1} = 2\sin\theta_+ \frac{\cos(2\Phi q)}{\sin(2\Phi(q+1))} m_q + \frac{\sin(2\Phi(q-1))}{\sin(2\Phi(q+1))} m_{q-1}, \tag{12}$$

$q = 0, 1, 2 \ldots$ и $m_{-1} \equiv 0$. Коэффициентам ряда (10) отвечает $m_0 = 1$. Таким образом, при импедансных границах краевым условиям на сторонах угловой области удовлетворяют не отдельные члены разложений, а их неограниченные совокупности – ряды по q в формулах (7) и (10).

Рекуррентные соотношения (11), (12) сильно упрощают нахождение коэффициентов $g_q^{\pm}$ и m_q, так как в отличие от правила (8) они могут быть использованы в расчетах на ЭВМ. Данное обстоятельство особенно важно, когда значения kr не являются малыми, поскольку тогда в суммах (7), (10) потребуется учитывать большое количество слагаемых. Для этих же целей необходимо располагать и формализованными алгоритмами вычисления коэффициентов f_p и l_p. Указанные алгоритмы можно получить, если записать для экспоненты в (9) разложение по степеням показателя и воспользоваться известными соотношениями для коэффициентов степенных рядов, получаемых путем перемножения и возведения в целую степень степенных рядов [15].

Результат оказывается следующим:

$$f_p = \sum_{k=0}^{p} a_{p-k}(\varphi_0) d_k, \text{ где } d_0 = 1, \quad d_k = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} d_{k-m}^{(m)}$$

при $k \geqslant 1$; коэффициенты $d_m^{(j)}$ явно выражаются через b_k:

$$d_0^{(j)} = b_1^j, \quad d_m^{(j)} = \frac{1}{mb_1} \sum_{n=1}^{m} b_{n+1} d_{m-n}^{(j)}(nj - m + n).$$

Правила вычисления коэффициентов l_p – аналогично.

Из представленных формул следуют оценки поведения коэффициентов рядов (7), (10) при больших номерах. Можно показать, что при $n \to \infty$: $g_n^{\pm} = O(e^{nM})$, $f_n = O(e^{\mu n M})$, $m_n = O(e^{n|\operatorname{Im}\theta_+|})$, $l_n = O(e^{\mu n|\operatorname{Im}\theta_+|})$.

При больших положительных индексах функция Бесселя $J_\nu(kr)$ ведет себя как $O((\nu/kr)^{-\nu})$, что обеспечивает абсолютную сходимость рядов. Убывание членов сумм начинается при $\nu_{pq} > O(kre^M)$ и при $\bar{\nu}_{pq} = O(kre^{|\operatorname{Im}\theta_+|})$ соответственно.

Применим теперь формулы (7), (10) для описания свойств решения в окрестности угловой точки $r = 0$. Заменим функции Бесселя степенными рядами; при этом получаются представления в виде так называемых рядов Мейкснера [9–11]. Если ни на одной из граничных поверхностей не поставлены условия Дирихле, то разложение оказывается следующим:

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} (kr)^{\mu p} \sum_{m=0}^{\infty} A_{pm}(\varphi)(kr)^m, \tag{13}$$

а коэффициенты $A_{pm}(\varphi)$ выражаются конечной совокупностью коэффициентов ряда (7) (соответствующие формулы не выписываются здесь лишь в целях экономии места).

При малых значениях kr можно ограничиться несколькими первыми членами разложения (13), что дает приближенную формулу:

$$u = A_{00} + A_{10}(\varphi)(kr)^{\mu} + A_{01}(\varphi)\, kr + O((kr)^{2\delta}), \tag{14}$$

где

$$\delta = \inf(\mu, 1), \quad A_{00} = \mu \frac{\psi_\Phi^4(\pi/2)}{\Psi(\varphi_0)} \cos(\mu, \varphi_0),$$

$$A_{01}(\varphi) = -i\mu \frac{\psi_\Phi^4(\pi/2)\cos(\mu\varphi_0)}{\Psi(\varphi_0)\sin(2\Phi)} (\sin\theta_+\cos(\varphi+\Phi) + \sin\theta_-\cos(\varphi-\Phi)),$$

$$A_{10}(\varphi) = \frac{2\mu\psi_\Phi^4(\pi/2)}{\Gamma(\mu+1)\,\Psi(\varphi_0)} \left(\frac{e^{-i\pi/2}}{2}\right)^{\mu} (\sin(\mu\varphi_0) - \frac{1}{2}b_1)\cos(\mu\varphi_0)\sin(\mu\varphi),$$

$\Gamma(\mu+1)$ – гамма-функция. Член A_{00} является главным и характеризует свойства функции u при $kr \to 0$. Если $r = 0$, то $u = A_{00}$ и получается известный результат Малюжинца для поля на ребре [13]. Следующие два слагаемых описывают поведение производных поля $\partial u/\partial r$ и $\partial u/(r\partial\varphi)$ (т.е. компонент колебательной скорости) при малых kr. Если $\Phi > \pi/2$, то $\mu < 1$ и компоненты колебательной скорости имеют в угловой точке особенность вида $(kr)^{\mu-1}$, которая определяется вторым членом формулы (14). Заметим, что зависимость сингулярного члена от координат r и φ является такой же, как и при условиях Неймана на гранях (импедансные параметры входят только в числовой коэффициент). Данное обстоятельство объясняется тем, что при $kr \to 0$ члены в граничных условиях, содержащие производные, оказываются главными, а члены с импедансами – поправочными, имеющими более высокий порядок малости по kr. При $\Phi < \pi/2$ первые производные поля ограничены на ребре и их поведение описывает слагаемое, пропорциональное $A_{01}(\varphi)$.

Если на одной из сторон угловой области поставлены условия Дирихле, то ряд Мейкснера для функции u отличается от (13) только значениями угловых коэффициентов и множителем $(kr)^{\mu/2}$ перед суммой. При $kr \to 0$ приближенная формула для поля имеет вид

$$u = B_{00}(\varphi)\,(kr)^{\mu/2} + O((kr)^{\delta+\mu/2}), \tag{15}$$

где

$$B_{00}(\varphi) = \frac{2\mu\psi_\Phi^2(\pi/2)}{\Gamma(\mu/2+1)\Psi_{12}(\varphi_0)} \left(\frac{e^{-i\pi/2}}{2}\right)^{\mu/2} \sin(\mu\varphi_0 + \frac{\pi}{2})\sin\left(\frac{\mu}{2}(\Phi+\varphi)\right).$$

В данном случае для описания поля и его производных можно ограничиться одночленной формулой. При $r = 0$ звуковое давление обращается в нуль, а компоненты колебательной скорости равны нулю при $\Phi < \pi/4$ или имеют особенность $(kr)^{-1+\mu/2}$, если $\Phi > \pi/4$. Заметим, что эта особенность является более сильной, чем особенности на ребре в областях того же угла раствора, но с граничными условиями одного типа на обеих сторонах.

До сих пор предполагалось, что угол раствора области удовлетворяет условию: $\Phi \neq \Phi_{nm}$. При нарушении этого условия отдельные коэффициенты в разложениях (7), (10), (13) становятся неограниченными, что является следствием соответствующего поведения коэффициентов в разложении функции Малюжинца (4), (5). Однако суммы в целом остаются конечными, причем в результате предельного перехода $\Phi \to \Phi_{nm}$ в особых членах рядов выделяются производные по Φ. Порядок производных и их количество определяется степенью сингулярности по Φ. Таким образом, при $\Phi = \Phi_{nm}$ аналитическая структура рядов, представляющих решение задачи, меняется: в рядах типа (7), (10) появляются члены, содержащие производные различных порядков функции Бесселя по значку, а в степенных рядах – логарифмические члены. Следует подчеркнуть, что для каждого значения Φ_{nm} аналитическая структура рядов будет своя, отличная от других случаев.

Рассмотрим подробнее аналитический вид степенных разложений для случаев, представляющих наибольший интерес: 1) плоскость со скачком поверхностного импеденса ($\Phi = \pi/2$, n, $m = 1$); 2) импедансная полуплоскость ($\Phi = \pi$, $n = 2$, $m = 1$). Переходя в формуле (13) к пределу $\Phi \to \pi/2$, находим

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} (kr)^p \sum_{m=0}^{p} \tilde{A}_{pm}(\varphi)\ln^m(kr). \tag{16}$$

Аналогом формулы (14) здесь будет представление

$$u = \widetilde{A}_{00} + \widetilde{A}_{11}(\varphi)kr\ln(kr) + O(kr),$$

где $\widetilde{A}_{11}(\varphi) = \dfrac{\psi^4_{\Phi}(\pi/2)}{i\pi\Psi(\varphi_0)}(\sin\theta_+ - \sin\theta_-)\cos\varphi_0\sin\varphi,$

а коэффициент $\widetilde{A}_{00}$ получается, если в выражении для $\widetilde{A}_{00}$ положить $\Phi = \pi/2$. Отметим, что этот случай является единственным, когда первые производные решения имеют не степенную, а логарифмическую сингулярность при $r = 0$.

Для импедансной полуплоскости решение будет описываться рядом

$$u = \sum_{p=0}^{\infty}(kr)^p\sum_{m=0}^{\infty}\ln^m(kr)\,(\widetilde{A}_{2p,m}(\varphi) + (kr)^{1/2}\widetilde{A}_{2p+1,m}(\varphi)) \tag{17}$$

с коэффициентами в старших членах $\widetilde{A}_{00}$ и $\widetilde{A}_{10}(\varphi)$, равными коэффициентам A_{00} и $A_{10}(\varphi)$ из (14) при $\Phi = \pi$. Таким образом, здесь вырождение аналитической структуры не изменяет характера особенности компонент колебательной скорости на ребре.

Если одна из сторон угловой области идеально мягкая ($|\mathrm{Im}\theta_-| = \infty$), то аналитический вид разложений по степеням kr отличается от (16), (17) только множителем $(kr)^{\mu/2}$. Коэффициент $\widetilde{B}_{00}(\varphi)$ в старшем члене получается, если в формуле (15) в выражении для $B_{00}(\varphi)$ положить $\Phi = \pi/2$ или $\Phi = \pi$.

Автор благодарен участникам семинара Д.П. Коузова за заинтересованное обсуждение результатов исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малюжинец Г.Д.* Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн на клине с заданными импедансами граней // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121. № 3. С. 436–439.
2. *Осипов А.В.* Равномерная асимптотическая формула для вычисления акустического поля вблизи грани импедансного клина // Акуст. журн. 1990. Т. 36. Вып. 2. С. 332–337.
3. *Griesser T., Balanis C.A.* Reflections, diffractions, and surface waves for interrior impedance wedge of arbitrary angle // IEEE Trans. AP. 1989. V. 37. №7. P. 927–935.
4. *Hadden W.J., Pierce A.D.* Sound diffraction around screens and wedges for arbitrary source locations // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 69. № 5. P. 1266–1276 (Erratum: 1982. V. 71. №5. P. 1290).
5. *Петрашень Г.И., Николаев Б.Г., Коузов Д.П.* О методе рядов в теории дифракции волн от плоских угловых областей // Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем. 1958. № 246. С. 5–165
6. *Тужилин А.А.* Новые представления дифракционных полей в клиновидных областях с идеальными границами // Акуст. журн. 1963. Т. 9. Вып. 2. С. 209–214.
7. *Бойко А.И., Завадская М.П.* О представлении звукового поля вблизи ребра импедансного клина // Электродинамика и распространение волн. Томск: Изд-во Томского ун.-та, 1980. Вып. 1. С. 61–66.
8. *Будаев Б.В., Петрашень Г.И.* О конструктивных подходах к решению задач на дифракцию волн от двугранных угловых областей // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Наука, 1983. Вып. 23. С. 78–91.
9. *Meixner J.* The behaviour of electromagnetic fields at edges // IEEE Trans. AP. 1972. V. 20. № 4. P. 442–446.
10. *Макаров Г.И., Осипов А.В.* К вопросу о структуре рядов Мейкснера // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 6. С. 714–720.
11. *Бравер И.М., Гарб Х.Л., Фридберг П.Ш., Яковер И.М.* О поведении решения уравнений Максвелла вблизи ребра полуплоскости, на которой заданы двусторонние граничные условия импедансного типа // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 5. С. 1092–1096.
12. *Осипов А.В.* Вычисление функции Малюжинца в комплексной области // Акуст. журн. 1990. Т. 36. Вып. 1. С. 116–121.
13. *Malyughinetz G.D.* Das Sommerfeldshe Integral und die Lösung von Beugungsaufgaben in Winkelgebieten // Ann. d. Phys. 1960. B. 6. S. 107–112.
14. *Сахарова М.П., Филиппов А.Ф.* Решение нестационарной задачи дифракции на импедансном клине с помощью табулированных функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7. № 3. С. 568–579.
15. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

Центральный научно-исследовательский
институт "Морфизприбор"

Поступила в редакцию
1.06.90

A.V. Osipov

ON PLANE WAVE DIFFRACTION IN ANGULAR REGION WITH IMPEDANCE BOUNDARY CONDITIONS

New efficient method for analyzing wave fields in angular regions with impedance boundaries is proposed. The well-known Malyuzhinets solution in the form of the integral in the complex plane is convenient far from the vertex but fails in near and intermediate zones where asymptotical methods can not be used. By expanding the integrand in a sequence of exponential functions and using the Sommerfeld–Sonin's formula, the integral Malyuzhinets solution is exactly transformed into representations in the form of Bessel functions series. In the limit cases of hard or soft boundaries they are shown to coincide with the well-known expressions. Replacing of the Bessel functions by their power series expansions makes it possible to reduce the solution to the power series with respect to the distance from the edge (so called the Meizner's series). First terms of them give simple approximate expressions for description of the field behavior near the vertex. The analytical structure of the series is also examined. It is demonstrated that under certain conditions on the apex angle the Meizner's series contain not only the power but logarithmic terms. The representations proposed appear to be very efficient tool for analitical and numerical investigation of wave fields in near of intermediate zones.