4. *Петров М.П., Степанов С.И., Хоменко А.В.* Фоточувствительные электрооптические среды в голографии и оптической обработке информации. Л.: Наука, 1983. С. 270.
5. *Alig R.C.* Acoustic diffraction and the electrostrictive transducer // J. Appl. Phys. 1975. V. 46. № 9. P. 3731–3737.
6. *Дмитриев В.Н., Кудрявцев В.Н., Пятаков П.А.* Электроакустическое взаимодействие на фоторефрактивной решетке в ниобате лития // Письма в ЖТФ. 1982. Т. 8. С. 502–505.
7. *Мандель А.Е., Шандаров С.М.* Запись фазовой решетки при акустооптическом взаимодействии в кристалле ниобата лития // Письма в ЖТФ. 1978. Т. 4. № 12. С. 737–740.
8. *Oates D.E., Gottschalk P.G., Wright P.V.* Holographic-grating acoustic devices // Appl. Phys. Lett. 1985. V. 46. № 12. P. 1125–1127.
9. *Oates D.E., Pan J.Y.* Bulk-acoustic-wave resonators using holographic reflection gratings in photorefractive materials // Ferroelectrics. 1989. V. 92. P. 253–262.
10. *Berg N.J., Udelson B.J., Lee J.N.* A new acoustophotorefractive effect in lithium niobate // Appl. Phys. Lett. 1977. V. 31. № 9. P. 555–557.
11. *Larson D.A., Black T.D., Green M., Torti R.G., Wang Y.J.* Optical modulation by a travelling surface acoustic wave and a holographic reference grating // J. Opt. Soc. Amer. 1990. V. 7A. № 9. P. 1745–1750.

Акустический ин-т им. Н.Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
28.12.90

УДК 537.874.6

А.Г. Яровой

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНОМ ТЕЛЕ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Применение волновых методов для дистанционного зондирования придонных слоев океана инициировало теоретическое рассмотрение задач дифракции на телах в плоскослоистых средах [1]. Детальное исследование двумерных задач такого рода проведено в частных случаях абсолютно отражающих [2] или однородных [3] объектов, форма которых определяется кривой Ляпунова [4]. Цель данной работы – численное решение двумерной задачи дифракции звуковых волн на теле с достаточно произвольными геометрической формой и строением, погруженном в однородное полупространство.

Введем в двумерном пространстве прямоугольную декартовую систему координат $x0y$. Положим, что верхнее $(y > 0)$ и нижнее $(y < 0)$ полупространства заполнены однородными средами со скоростями звука $c_e\ (\operatorname{Im} c_e = 0)$ и $c_s\ (\operatorname{Im} c_s \geqslant 0)$ соответственно. Пусть сторонние монохроматические $(\sim\exp(-i\omega t))$ источники q создают в описанной регулярной среде поле U_0, удовлетворяющее уравнению

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_0^2 n^2(y))\, U_0(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = (x, y) \tag{1}$$

и условиям излучения на бесконечности; граничные условия на поверхности $y = 0$ считаются встроенными в (1). Здесь $k_0 \equiv \omega/c_e$ – волновое число в верхнем полупространстве; $n(y)$ – показатель преломления, равный 1 при $y > 0$ и $n_s \equiv c_e/c_s$ при $y < 0$.

Рассмотрим рассеяние первичного поля на неоднородности скорости звука (включения), занимающей область S в нижнем полупространстве и характеризуемой показателем преломления $n_p(\mathbf{r})$. Размещение включения, согласно [5], эквивалентно заданию в области S регулярной среды вторичных источников вида

$$q_p(\mathbf{r}) = -k_0^2\,(n_p^2(\mathbf{r}) - n_s^2)\, U(\mathbf{r}). \tag{2}$$

Учитывая конечные размеры области S, с помощью формулы Грина получим интегральное соотношение для полного поля $U(\mathbf{r})$

$$U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}) - k_0^2 \int_S d\mathbf{r}'\, \mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')(n_p^2(\mathbf{r}') - n_s^2)\, U(\mathbf{r}'), \tag{3}$$

справедливое при $-\infty < x,\ y < \infty$. Для $\mathbf{r} \in S$ соотношение (3) представляет собой интегральное уравнение для неизвестного поля внутри включения, а для $\mathbf{r} \in S$ – прямую квадратурную формулу для вычисления поля снаружи включения по считающемуся известным полю внутри последнего.

Скалярная функция Грина $\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, фигурирующая в (3) и учитывающая слоистый характер регулярной среды, удовлетворяет уравнению (1) с правой частью в виде $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ и условиям излучения при $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \to \infty$. Построение функции Грина и ее явный вид рассмотрены в [5]. В частности, показано, что имеет место представление

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (4i)^{-1} H_0^{(1)}(k_0 n_S |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) + h(\mathbf{r}, \mathbf{r}'); \quad y,\ y' < 0, \tag{4}$$

где $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – регулярная функция переменных $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$. Поскольку имеет место соотношение $(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_0^2 n_S^2) H_0^{(1)}(k_0 n_S |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) = 4i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, то уравнение (3) с учетом (4) можно представить в виде

$$n_P^2(\mathbf{r})\, U(r)/n_S^2 - \int_S d\mathbf{r}' \left[(\partial_x^2 + \partial_y^2) H_0^{(1)}(k_0 n_S |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/(4in_S^2) - k_0^2\, h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\right] (n_P^2(\mathbf{r}') - n_S^2)\, U(\mathbf{r}') =$$
$$= U_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S. \tag{5}$$

Для численного решения уравнения (5) используем метод моментов [6]. Мысленно поместим поперечное сечение включения внутрь прямоугольной сетки, состоящей из $m_1 \times m_2$ идентичных прямоугольных элементов со сторонами, параллельными осям $0x$ и $0y$, и размерами Δ_x на Δ_y. Каждой ячейке сопоставим пару индексов (i, p), где $i = 1, \ldots, m_1$ – порядковый номер ячейки вдоль оси $0x$, а $p = 1, \ldots, m_2$ – вдоль оси $0y$. Радиус-вектор центра ячейки обозначим через $\mathbf{r}_{ip}$, а занимаемую ею область – через S_{ip}. Считая размеры ячеек достаточно малыми, заменим функцию $n_P(\mathbf{r})$ внутри каждой ячейки ее величиной в центре ячейки. Применим кусочно-постоянную аппроксимацию неизвестного поля $U(\mathbf{r})$

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{p=1}^{m_2} U(i, p) F_{ip}(\mathbf{r}), \tag{6}$$

где $F_{ip}(\mathbf{r}) = 1$ при $\mathbf{r} \in S_{ip}$; $F_{ip}(\mathbf{r}) = 0$ при $\mathbf{r} \notin S_{ip}$. Применяя метод моментов с весовыми функциями вида $V_{ip}(\mathbf{r}) \equiv \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ip})$ к уравнению (5), получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) II рода для неизвестных величин $U(i, p)$:

$$[1 + \chi(i,p)/n_S^2]\, U(i,p) - \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{q=1}^{m_2} \chi(j,q)\, U(j,q)\, [f(i,p,j,q)/n_S^2 - k_0^2\, h(i,p,j,q)] = U_0(\mathbf{r}_{ip}),$$

$$1 \leqslant i \leqslant m_1, \quad 1 \leqslant p \leqslant m_2; \quad \chi(i,p) \equiv n_P^2(\mathbf{r}_{ip}) - n_S^2, \tag{7}$$

$$f(i,p,j,q) \equiv \int_{S_{jq}} d\mathbf{r}' (\partial_x^2 + \partial_y^2) H_0^1(k_0 n_S |\mathbf{r}_{ip} - \mathbf{r}'|)/(4i),$$

$$h(i,p,j,q) \equiv \int_{S_{jq}} d\mathbf{r}' h(\mathbf{r}_{ip}, \mathbf{r}'). \tag{8}$$

Интеграл по области ячейки в определении f с помощью методов теории обобщенных функций [7] преобразуется к интегралу по контуру ячейки:

$$f(i,p,j,q) = -\frac{k_0 n_S}{4i} \left\{ \int_{y_1}^{y_2} dy' (H(w)(x_{ip} - x')\,|_{x'=x_1}^{x'=x_2}) + \int_{x_1}^{x_2} dx' (H(w)(y_{ip} - y')\,|_{y'=y_1}^{y'=y_2}) \right\}, \tag{9}$$

$$H(w) \equiv H_1^{(1)}(k_0 n_S |\mathbf{r}_{ip} - \mathbf{r}'|)/|\mathbf{r}_{ip} - \mathbf{r}'|, \quad x_{1,2} = x_{jq} \mp \Delta_x/2, \quad y_{1,2} = y_{jq} \mp \Delta_y/2.$$

Интегрирование по $\mathbf{r}'$ в определении h выполняется аналитически с использованием разложения функции $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ в интеграл Фурье [5].

Для решения СЛАУ (7) применим метод сопряженного градиента [8]. Поскольку ядро уравнения (5) является разностным по переменным x, x', то элементы матриц f, h зависят лишь от разности индексов i, j. В связи с этим возникающие в методе сопряженного градиента произведения матриц f, h и матрицы-столбца $X(j, q)$ вычислим по теореме о свертке с использованием быстрого преобразования Фурье по индексам i, j.

Применение метода моментов непосредственно к уравнению (3) приводит к построению алгоритма затрачивающего на вычисление матричных элементов примерно вдвое больше времени по сравнению с рассмотренным выше алгоритмом. Дополнительные затраты времени обусловлены вычислением интегралов от функций Ханкеля по области S_{ip}. Способ приближенного вычисления этих интегралов, предложенный в [9] и основанный на замене прямоугольной ячпйки кругом той же площади, вносит относительную ошибку $\delta \leqslant 0{,}5\%$ при $k_0 \Delta_x = k_0 \Delta_y = 0{,}1$ и $\delta \leqslant 1{,}0\%$ при $k_0 \Delta_x = k_0 \Delta_y = 0{,}3$. Для ячеек с разными длинами сторон Δ_x и Δ_y относительная ошибка растет с увеличением разности $\Delta_x - \Delta_y$. Например, при $k_0 \Delta_x = 0{,}1$, $k_0 \Delta_y = 0{,}3$ $\delta \leqslant 10{,}0\%$.

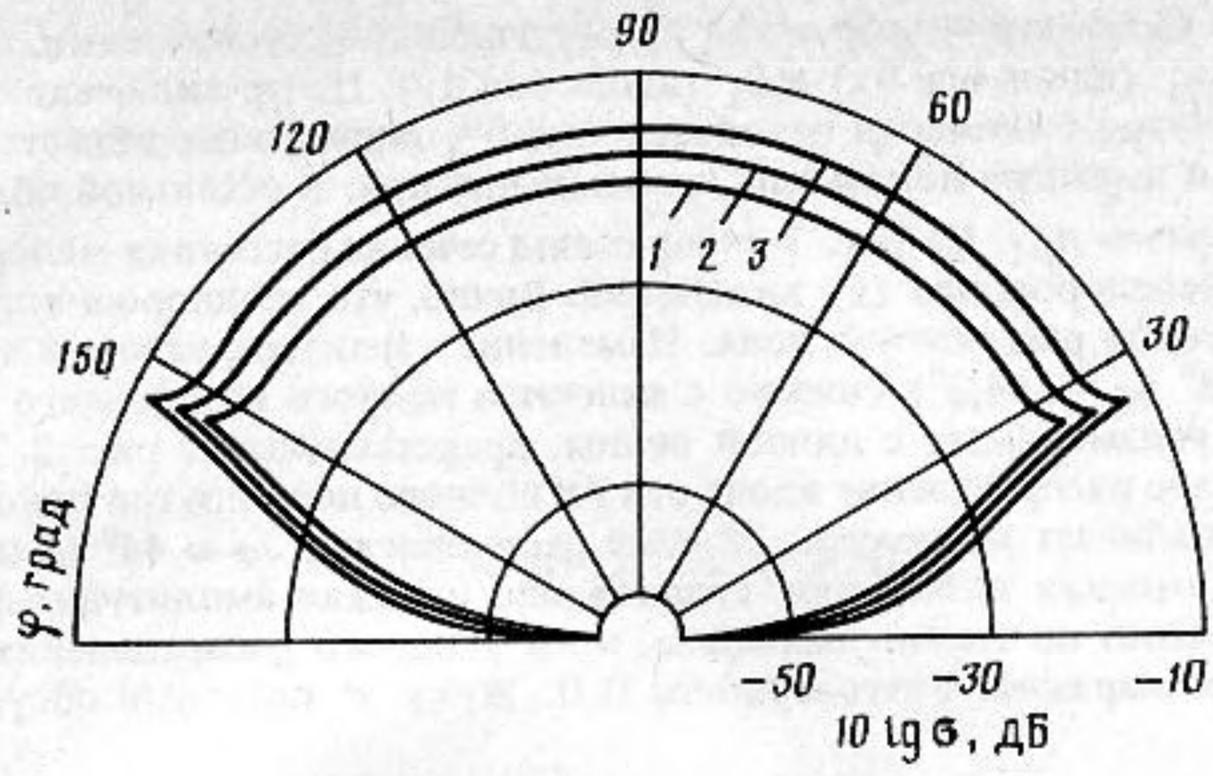

Рис. 1. Сечение рассеяния малоразмерного включения ($k_0 A_1 = 3{,}0$; $k_0 A_2 = 2{,}1$; $k_0 B_1 = 1{,}0$; $k_0 B_2 = 0{,}5$; $k_0 h = 5{,}0$; $n_s = 0{,}9$; $\varphi_0 = 90°$): *1* – $n_{p1} = n_{p2} = 0{,}8$; *2* – $n_{p1} = 0{,}8$; $n_{p2} = 0{,}7$; *3* – $n_{p1} = n_{p2} = 0{,}7$

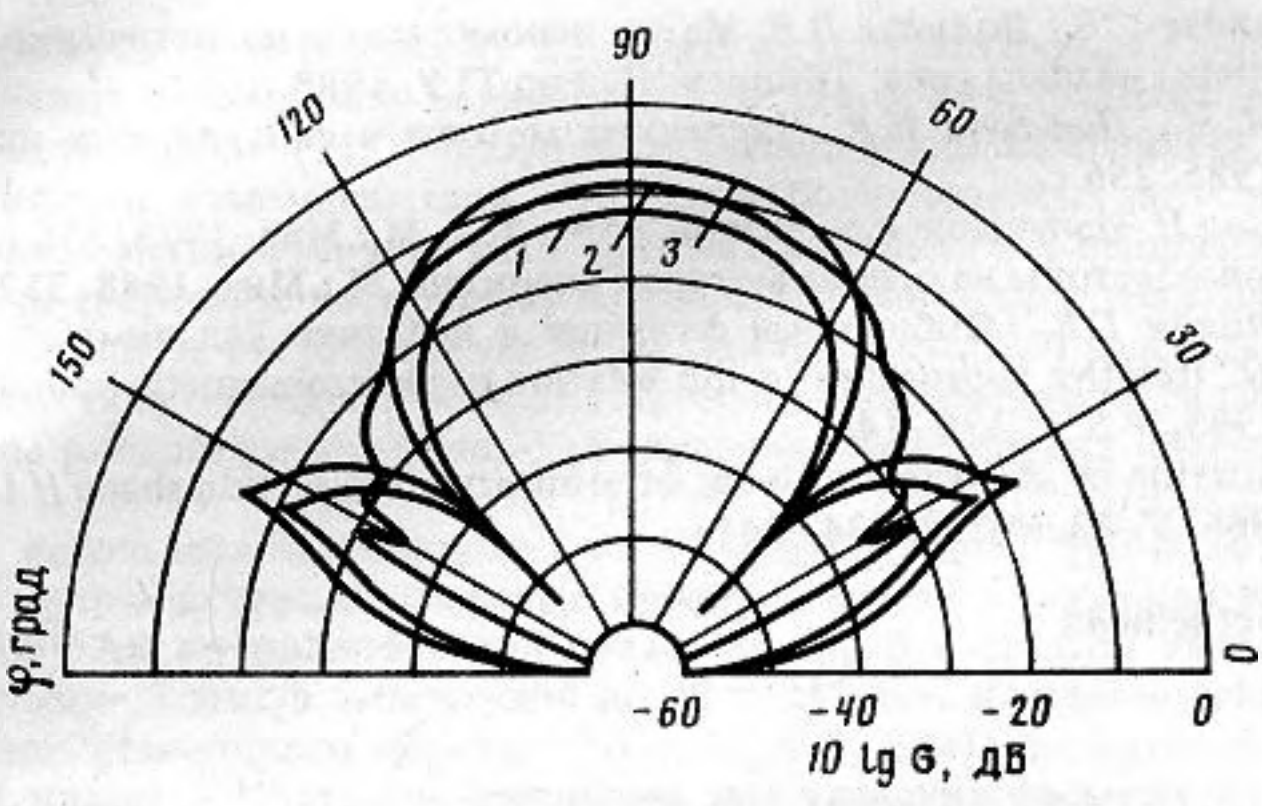

Рис. 2. Сечение рассеяния включения, соизмеримого с длиной волны ($k_0 A_1 = 9{,}0$; $k_0 A_2 = 3{,}0$; $k_0 B_1 = 0{,}9$; $k_0 B_2 = 0{,}9$; $k_0 h = 5{,}0$; $n_s = 0{,}9$; $\varphi_0 = 90°$): *1* – $n_{p1} = n_{p2} = 0{,}8$; *2* – $n_{p1} = 0{,}8$; $n_{p2} = 0{,}7$; *3* – $n_{p1} = n_{p2} = 0{,}7$

После нахождения поля внутри включения рассеянное поле снаружи $U_r(\mathbf{r}) \equiv U(\mathbf{r}) - U_0(\mathbf{r})$ находится по прямой квадратурной формуле (3) с учетом аппроксимации (6). В дальней зоне включения в верхнем полупространстве, используя асимптотику функции Грина при $k_0 L \cos^2\varphi \to \infty$, нетрудно получить выражение для плотности потока энергии рассеянного поля

$$P_S(L,\varphi) \equiv \rho\omega\,|\,\mathrm{Im}(U_r^* \Delta U_r)\,|/2 = (4\pi\rho\omega/L)\,\mathrm{tg}^2\varphi\,(n_s^2 - \cos^2\varphi)^{-2}\cdot$$
$$|\,2\gamma_s/(\gamma_s + k_0\sin\varphi)\,|^2 \sin^2(\kappa_s\Delta_x/2)\,|\,\sin(\gamma_s\Delta_y/2)\,|^2 \times \tag{10}$$
$$\times\,\Big|\sum_{i=1}^{m_1}\sum_{p=1}^{m_2} \chi(i,p)\,U(i,p)\exp(-i\kappa_s(x_{ip}-x_c) - i\gamma_s y_{ip})\,\Big|^2,$$
$$\kappa_s = k_0\cos\varphi,\quad \gamma_s = k_0\sqrt{n_s^2 - \cos^2\varphi}.$$

Здесь L и φ – цилиндрические координаты точки наблюдений относительно точки $\mathbf{r} = (x_c, 0)$; x_c – $0x$-я координата некоторого "центра" включения; угол φ отсчитывается от положительного направления оси $0x$; ρ – плотность среды.

Положим, что первичное поле U_0 есть результат дифракции на полупространстве $y < 0$ плоской волны, приходящей из $y = +\infty$ под углом скольжения φ_0. Угловое распределение рассеянного поля в верхнем полупространстве опишем сечением рассеяния $\sigma(\varphi) = \lim\limits_{L\to\infty} (LP_S(L,\varphi)/P_0)$, где P_0 – плотность потока энергии вышеупомянутой плоской волны при $y = +0$: $P_0 = \omega^2\rho\,|\,U_0\,|^2/(2c_e)$.

Пусть область, занятая включением, имеет вид прямоугольника со сторонами, параллельными осям $0x$ и $0y$, и размерами A_1 (вдоль оси $0x$) и B_1 (вдоль оси $0y$). Центр включения расположен в точке $x = x_c = 0$, $y = -h$. Внутри включения находится "ядро", занимающее область $-A_2/2 < x < A_2/2$, $-B_2/2 < y + h < B_2/2$ и имеющее показатель преломления n_{p2}. В остальной области включения показатель преломления равен n_{p1}. На рис. 1 изображены сечения рассеяния малоразмерных однородных (кривые *1*, *3*) и неоднородного (*2*) включений. Видно, что неоднородность включения приводит к изменению величины рассеянного поля. Изменение характера угловой зависимости сечения рассеяния при $\varphi = 25{,}8°$ ($\varphi = 154{,}2°$) связано с явлением полного внутреннего отражения. Сечения рассеяния включений, соизмеримых с длиной волны, представлены на рис. 2. Близкое к постоянному амплитудно-фазовое распределение вдоль оси $0x$ полного поля внутри однородного включения при $k_0 A_1 = 9$ обусловливает минимумы сечений рассеяния при $\varphi \cong 44°$ ($\varphi \cong 136°$). Неоднородность показателя преломления включения, существенно искажая амплитудно-фазовое распределение, приводит к изменению не только величины, но и углового распределения рассеянного поля.

В заключение автор выражает благодарность Н.П. Жуку за полезные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акустика дна океана: Пер. с англ. / Под ред. Купермана У., Енсена Ф. М.: Мир, 1984. 454 с.
2. *Назарчук З.Т.* Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. Киев: Наук. думка, 1989. 256 с.
3. *Заридзе Р.С., Ломидзе Г.В., Долидзе Л.В.* Метод вспомогательных источников в задачах дифракции на телах у границы раздела сред. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1988. 101 с.
4. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 256 с.
5. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978. 556 с.
6. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.
7. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.
8. *Mittra R., Chan C.H.* Iterative approaches to the solution of electromagnetic boundary value problems // Electromagnetics. 1985. № 5. P. 123–146.
9. *Richmond J.H.* Scattering by dielectric cylinder of arbitrary cross section shape // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1965. V. 13. № 2. P. 334–341.

Харьковский государственный
университет

Поступило в редакцию
26.06.90