АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 5

УДК 537.876
© 1991 г.

Ф.Г. Басс, Н.П. Жук, О.А. Третьяков

ГРАНИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ БЕТЕ–СОЛПИТЕРА И ПЕРЕНОСА ИНТЕНСИВНОСТИ ДЛЯ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЕ НЕПРОНИЦАЕМОЙ ФЛУКТУИРУЮЩЕЙ ГРАНИЦЫ

Построены уравнения для вторых смешанных статистических моментов поля и его нормальной производной на границе с флуктуирующими свойствами. Выведены уравнения для граничных функций Вигнера, свободные от условия квазиоднородности поля в объеме среды, и найдено их асимптотическое решение. Получены строгие уравнения для операторов интенсивности и рассмотрены некоторые приближенные способы отыскания последних.

Содержание данной работы связано с практическими проблемами акустики океана, которые в теоретическом плане сводятся к расчету накапливающихся искажений поля при многократном рассеянии на неровностях дна или волнении свободной поверхности [1]. Ключевым элементом теории многократного рассеяния выступают уравнения относительно статистических моментов звукового поля [2]. Краевая задача для среднего поля в случае слабошероховатой границы построена в работах [3–5]; обобщение методики процитированных выше работ[1] и перенос ее на более сложные модели среды распространения проведены в [6–9].

В данной работе построены уравнения, определяющие второй статистический момент поля при наличии граничных случайных возмущений. Речь идет об уравнениях Бете–Солпитера (6) и вытекающих из них уравнениях переноса интенсивности (10). В отличие от аналогичных результатов теории объемного рассеяния [10–12] и соотношений [2, 13] для задач с граничными возмущениями, уравнения Бете–Солпитера (6) носят не объемный, а граничный характер. Если решение их известно, второй статистический момент поля в любых точках пространства можно рассчитать по прямой квадратурной формуле (4).

Меньшая размерность граничных уравнений Бете–Солпитера является весомым преимуществом с точки зрения численного анализа. Важно и другое – они служат источником более простых по структуре граничных уравнений переноса интенсивности (10), которые справедливы при условии квазиоднородности поля только на границе области. В объеме среды это условие может нарушаться, например, за счет выраженных интерференционных эффектов. В этом преимущество уравнений (10) в сравнении с известными результатами теории объемного рассеяния [10, 12], которые ограничены требованием квазиоднородности поля во всем объеме. При их выводе, в отличие от уравнений переноса для статистически шероховатых волноводов [2, 14], не применялась процедура усреднения второго момента поля в сечении волновода по малому интервалу вдоль направления, параллельного оси волновода.

[1] В формулах (9), (11), (14) и (15) из [7] вместо символов ∇, ∇' должны стоять соответственно ∇_t, ∇'_t – "поверхностные" операторы "набла" на подстилающей границе.

К основным результатам статьи относятся также приближенное решение (11) –(12) уравнений для функций Вигнера и строгая система уравнений (14) для операторов интенсивности. Последняя дает возможность отыскать эти операторы в замкнутом виде, если известны (точно или приближенно) входящие туда вспомогательные операторы. Некоторые из приближений обсуждаются в заключительном разделе статьи.

Отправным пунктом служит задача об отыскании поля из уравнения в трехмерной области V:

$$\hat{L}u \equiv (\mu \operatorname{div} \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} + k^2)u = \mu f \tag{1}$$

и условия на граничной поверхности S

$$\hat{a}_m u_S + \hat{a}_g\,[(\partial u/\partial n)_S] = 0,\ \hat{a}_\alpha = \hat{b}_\alpha - \hat{v}_\alpha . \tag{2}$$

Здесь $f(\mathbf{R})$ – сторонние источники поля, μ и k – кусочно-гладкие функции переменного $\mathbf{R} = (x, y, z)$, описывающие свойства среды в объеме V, $\partial/\partial n$ – производная по направлению внутренней нормали к поверхности S, индекс "S" сопровождает предельное (изнутри V) значение $h_S(\mathbf{R}_S)$ функции $h(\mathbf{R})$ при $\mathbf{R} \to \mathbf{R}_S$, $\mathbf{R}_S$ – радиус-вектор точек S, $\hat{a}_\alpha$ – граничные операторы, которые действуют по $\mathbf{R}_S$ и характеризуют физические свойства границы. Подразумевается, что функции $w(\mathbf{R})$ из области задания W_L оператора $\hat{L}$ подчиняются условию излучения в бесконечности, если область V неограничена, и условию непрерывности величин w, $(1/\mu)\,(\partial w/\partial N)$ на каждой из структурных границ раздела среды ($\partial/\partial N$ – производная по нормали к такой границе). Область задания, коэффициенты и правая часть уравнения (1), а также операторы $\hat{b}_{m,g}$, определяющие свойства границы в регулярном состоянии, считаются детерминированными, а операторы граничных возмущений $\hat{v}_{m,g}$ – случайными. Допускается ситуация, когда некоторые из операторов $\hat{b}_{m,g}$, $v_{m,g}$ равны нулю. Описанная постановка охватывает широкий круг практически важных задач акустики жидких и газообразных сред [1, 11].

В работе [9] применительно к задаче (1), (2) изложена "алгебраическая" методика вывода эквивалентных граничных условий для среднего поля $\langle u(\mathbf{R})\rangle$ (угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций), обобщающая известные результаты [1–6]. Цель данной работы – построить соотношения, которые управляют распространением второго статистического момента поля

$$\psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \equiv \langle u(\mathbf{R}_1) u^*(\mathbf{R}_2)\rangle (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \in V \times V$$

($*$ – комплексное сопряжение).

Располагая произвольным детерминированным решением уравнения (1) для точечного стороннего источника, величину $u(\mathbf{R})$ с помощью формулы Грина можно выразить через предельные значения u и $\partial u/\partial n$ на поверхности S. Из линейности указанной связи следует, что среднее от произведения $u(\mathbf{R}_1)\,u^*(\mathbf{R}_2)$ должно выражаться линейным образом через $\psi_{\alpha\beta}(R_{S1}, R_{S2})$ – вторые смешанные статистические моменты поля и его нормальной производной на $S(\alpha, \beta = m, g)$:

$$\psi_{mm} = \langle u(\mathbf{R}_{S1}) u^*(\mathbf{R}_{S2})\rangle,\ \ \psi_{gg} = \langle \partial u(\mathbf{R}_{S1})/\partial n_1\, \partial u^*(\mathbf{R}_{S2})/\partial n_2\rangle , \tag{3}$$

$$\psi_{mg} = \langle u(\mathbf{R}_{S1})\, \partial u^*(\mathbf{R}_{S2})/\partial n_2\rangle,\ \ \psi_{gm} = \langle \partial u(\mathbf{R}_{S1})/\partial n_1\, u(\mathbf{R}_{S2})\rangle ,$$

$$\partial/\partial n_j = \partial/\partial n(\mathbf{R}_{Sj}),\quad (j = 1, 2) .$$

Не умаляя общности, обсуждаемое выражение для $\psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ можно постулировать в виде

$$\psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \psi^{coh}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) + \int \prod_{j=1}^{2} d\mathbf{R}'_{Sj}\, d\mathbf{R}''_{Sj}$$

$$\bar{G}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}''_{S1})\bar{G}^*(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}''_{S2}) \sum_{\substack{\alpha,\beta = \\ m,g}} K_{\alpha\beta}(\mathbf{R}''_{S1}, \mathbf{R}''_{S2} \mid \mathbf{R}'_{S1}, \mathbf{R}'_{S2})\, \psi_{\alpha\beta}(\mathbf{R}'_{S1}, \mathbf{R}'_{S2}) . \tag{4}$$

В этой формуле $\psi^{coh}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \langle u(\mathbf{R}_1)\rangle\langle u^*(\mathbf{R}_2)\rangle$, $d\mathbf{R}'^{,''}_{Sj}$ – элемент поверхности S, $K_{\alpha\beta}$ – некоторые детерминированные функции $(\alpha, \beta = m, g)$, которые не зависят от решения задачи (1), (2) и далее считаются известными, $\bar{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}'_S)$ – функция Грина второго рода задачи для среднего поля. Она задана как решение уравнения $\hat{L}\bar{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}'_S) = 0$ в области V, удовлетворяющее неоднородному условию на поверхности S:

$$\hat{a}^{э}_m \bar{s}_m(\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S) + \hat{a}^{э}_g \bar{s}_g(\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S) = \delta_S(\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S),$$

$$\bar{s}_m = (\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S) \equiv \lim \bar{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}'_S), \quad \bar{s}_g(\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S) \equiv \tag{5}$$

$$\equiv \lim \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{R}_S)} \bar{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}'_S), \quad (\mathbf{R} \to \mathbf{R}_S).$$

Здесь $\hat{a}^{э}_{m,g}$ – операторы эффективных нерегулярностей из [9], которые действуют по $\mathbf{R}_S$ и характеризуют свойства границы S по отношению к среднему полю, δ_S – поверхностная дельта-функция, определенная тождеством относительно произвольной пробной функции

$$\lambda(\mathbf{R}_S): \int d\mathbf{R}'_S \delta_S(\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S)\lambda(\mathbf{R}'_S) \equiv \lambda(\mathbf{R}_S).$$

Подчеркнем, что переменная $\mathbf{R}'_S$ действию операторов $\hat{a}^{э}_{m,g}$ в (5) не подвергается.

Соотношение (4) сходно с уравнением Бете–Солпитера теории объемного рассеяния [11, 12] и отличается от последнего тем, что области определения функций ψ и $\psi_{\alpha\beta}$ не совпадают. Следовательно, в отличие от цитированных результатов [11, 12], соотношение (4) не является уравнением, а представляет собой квадратурную формулу, которая позволяет найти $\psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$, если известны величины $\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{R}_{S1}, \mathbf{R}_{S2})$, $(\alpha, \beta = m, g)$.

Применим поочередно к обеим частям равенства (4) операции $\partial/\partial n_1$, $\partial/\partial n_2$, $\partial^2/\partial n_1 \partial n_2$, а затем совершим в результирующих соотношениях предельный переход $\mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_{S1}$, $\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_{S2}$. В итоге получаем замкнутую систему четырех граничных уравнений на множестве $S \times S$ относительно четырех неизвестных функций $\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{R}_{S1}, \mathbf{R}_{S2})$:

$$\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{R}_{S1}, \mathbf{R}_{S2}) = \psi^{coh}_{\alpha\beta}(\mathbf{R}_{S1}, \mathbf{R}_{S2}) + \int \prod_{j=1}^{2} d\mathbf{R}'_{Sj} d\mathbf{R}''_{Sj}$$

$$\bar{s}_\alpha(\mathbf{R}_{S1}, \mathbf{R}''_{S1})\bar{s}^*_\beta(\mathbf{R}_{S2}, \mathbf{R}''_{S2}) \sum_{\substack{\gamma,\delta = \\ m,g}} K_{\gamma\delta}(\mathbf{R}''_{S1}, \mathbf{R}''_{S2} | \mathbf{R}'_{S1}, \mathbf{R}'_{S2}) \tag{6}$$

$$\psi_{\gamma\delta}(\mathbf{R}'_{S1}, \mathbf{R}'_{S2}), \quad (\alpha, \beta = m, g).$$

Определение функций $\psi^{coh}_{\alpha\beta}$ следует из выражений (3) для $\psi_{\alpha\beta}$, если среднее от произведения заменить там произведением усредненных величин. По аналогии с известными результатами теории объемного рассеяния, соотношения (6) правомерно назвать граничными уравнениями Бете–Солпитера. Они позволяют, по крайней мере, в принципе, отыскать граничные статистические моменты (3).

Уравнения (6) можно заменить равносильными соотношениями, избрав в качестве новых неизвестных коэффициенты разложения функций $\psi_{\alpha\beta}$ по подходящей системе базисных функций. При некоторых предположениях они могут служить источником более простых по структуре уравнений типа переноса интенсивности [10]. Следуя [12], продемонстрируем эту возможность в случае, когда выполнены условия: (а) поверхность S совпадает с некоторой плоскостью, а область V – с полупространством, ограниченным плоскостью S, или с плоским слоем между S и некоторой другой детерминированной и однородной по своим физическим свойствам плоскостью, параллельной S; (б) среда в области V плоскослоистая, т.е. ее свойства, определяемые коэффициентами уравнения (1), изменяются только в направлении, перпендикулярном S, (в) ядра $b_\alpha(\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S) = \hat{b}_\alpha \delta_S(\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S)$ разностные: $b_\alpha(\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S) \equiv b_\alpha(\mathbf{R}_S - \mathbf{R}'_S)$, что означает однородность свойств границы S в регулярном состоянии: (г) случайные функ-

ции $v_\alpha(\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S) = \hat{v}_\alpha \delta_S(\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S)$ статистически однородные (и однородно связанные), т.е. граничные возмущения однородны в статистическом смысле. В этих условиях функции $\overline{s}_{m,g}$ оказываются разностными: $\overline{s}_\alpha(\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S) \equiv \overline{s}_\alpha(\mathbf{R}_S - \mathbf{R}'_S)$, а функции $K_{\alpha\beta}$ допускают представление $K_{\alpha\beta}(\mathbf{R}_{S1}, \mathbf{R}_{S2} | \mathbf{R}'_{S1}, \mathbf{R}'_{S2}) \equiv K_{\alpha\beta}(\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_{S'}, \rho_S, \rho'_S)$, где фигурируют переменные $2\mathbf{R}_S = \mathbf{R}_{S1} + \mathbf{R}_{S2}$, $\rho_S = \mathbf{R}_{S1} - \mathbf{R}_{S2}$ (определение переменных $\mathbf{R}'_S$, ρ'_S аналогично). Для четырех функций Вигнера [12] $J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{R}_S)$, которые определяют разложение функций $\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{R}_{S1}, \mathbf{R}_{S2})$ в двумерный интеграл Фурье:

$$\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{R}_{S1}, \mathbf{R}_{S2}) = \int d\kappa \exp(i\kappa \boldsymbol{\rho}_S) J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{R}_S), \tag{7}$$

из (6) получается эквивалентная система четырех уравнений $(\alpha, \beta = m, g)$:

$$J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{R}_S) = J^{\mathrm{coh}}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{R}_S) + \int d\boldsymbol{\kappa}' d\boldsymbol{\kappa}'' d\mathbf{R}'_S \times$$
$$\times \overline{s}_\alpha(\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\kappa}''/2) \overline{s}^*_\beta(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}''/2) \sum_{\substack{\gamma,\delta = \\ m,g}} K_{\gamma\delta}(\boldsymbol{\kappa}'', \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}') \tag{8}$$
$$J^*_{\gamma\delta}(\boldsymbol{\kappa}', \mathbf{R}'_S) \exp[i\boldsymbol{\kappa}'' \cdot (\mathbf{R}_S - \mathbf{R}'_S)].$$

Здесь $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\kappa}'$, $\boldsymbol{\kappa}''$ – двумерные векторы, компланарные плоскости S, интегрирование по ним в (7), (8) ведется в бесконечных пределах. Мы обозначили: $J^{coh}_{\alpha\beta}$ – "когерентная" составляющая функции Вигнера $J_{\alpha\beta}$, определяющая разложение величины $\psi^{coh}_{\alpha\beta}(\mathbf{R}_{S1}, \mathbf{R}_{S2})$ в интеграл вида (7):

$$\overline{s}_\alpha(\boldsymbol{\kappa}) = \int d\mathbf{R}_S \exp[-i\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_{S'})]\, \overline{s}_\alpha(\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_{S'}),$$
$$K_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\kappa}'', \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}') = \int d\boldsymbol{\rho}_S d\boldsymbol{\rho}'_S d\mathbf{R}_S K_{\alpha\beta}(\mathbf{R}_S, \boldsymbol{\rho}_S, \boldsymbol{\rho}'_S) \times \tag{9}$$
$$\times \exp[i(\boldsymbol{\kappa}'\boldsymbol{\rho}'_S - \boldsymbol{\kappa}\rho_S - \boldsymbol{\kappa}''\mathbf{R}_S)].$$

Интегрирование по всем переменным в (9) ведется в пределах всей плоскости S.

Сделаем ключевое предположение о том, что в плоскости S звуковое поле является квазиоднородным, т.е. медленно зависящим от $\mathbf{R}_S$: $\nabla_{\mathbf{R}_S} J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{R}_S) \sim \epsilon$. Здесь ϵ – некоторый малый параметр, $\nabla_{\mathbf{R}_S}$ – оператор "набла" по переменной $\mathbf{R}_S$. Разложим функцию $J_{\gamma\delta}(\boldsymbol{\kappa}', \mathbf{R}'_S)$ из (9) в ряд по степеням $\mathbf{R}'_S - \mathbf{R}_S$ и ограничимся в силу квазиоднородности поля двумя низшими членами ряда. В итоге приходим к приближенной системе четырех уравнений переноса интенсивности в плоскости $S(\alpha, \beta = m, g)$:

$$J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{R}_S) = J^{coh}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{R}_S) + (2\pi)^{-2} \int d\boldsymbol{\kappa}' \sum_{\substack{\gamma,\delta = \\ m,g}}$$
$$[\overline{s}_\alpha(\boldsymbol{\kappa}) \overline{s}^*_\beta(\boldsymbol{\kappa}) K_{\gamma\delta}(0, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}') - i \nabla_{\kappa''} \nabla_{\mathbf{R}_S} \overline{s}_\alpha(\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\kappa}''|2) \times \tag{10}$$
$$\times \overline{s}^*_\beta(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}''|2) K_{\gamma\delta}(\boldsymbol{\kappa}'', \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}')|_{\kappa''=0}]\, J_{\gamma\delta}(\boldsymbol{\kappa}', \mathbf{R}_S).$$

В этих соотношениях $\nabla_{\kappa''}$ – оператор "набла" по переменной κ''. Подчеркнем, что в отличие от сходных результатов теории объемного рассеяния [10, 12], для справедливости уравнений (10) не требуется квазиоднородность поля в объеме V.

Поиск решения уравнений (9), (10) в общем случае требует привлечения численных средств. Приведем пример, когда оно находится в явном виде. Допустим, что выполняется условие квазиоднородности поля в плоскости S, причем функции $K_{\alpha\beta}$ по порядку величины $\sim \varepsilon$ функции Вигнера ищем в виде асимптотического разложения [12]

$$J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{R}_S) = \sum_{p=0}^{+\infty} J^{(p)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{R}_S), \quad J^{(p)}_{\alpha\beta} \sim \epsilon^p. \tag{11}$$

Подставим это разложение в (9) и приравняем члены одинакового порядка малости. В результате получаем цепочку прямых формул:

$$J_{\alpha\beta}^{(0)}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{R}_S) = J_{\alpha\beta}^{\mathrm{coh}(0)}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{R}_S),$$

$$J_{\alpha\beta}^{(p)}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{R}_S) = J_{\alpha\beta}^{\mathrm{coh}(p)}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{R}_S) + \sum_{q=0}^{p-1} \frac{1}{(q-p-1)!} \int \frac{d\boldsymbol{\kappa}'}{(2\pi)^2}$$

$$(-i\Delta_{\kappa''} \cdot \Delta_{\mathbf{R}_S})^{p-q-1} \sum_{\substack{\gamma,\delta = \\ m,g}} [\overline{s}_\alpha(\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\kappa}''|2)\overline{s}_\beta^*(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}''|2) \tag{12}$$

$$K_{\gamma\delta}(\boldsymbol{\kappa}'', \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}')|_{\boldsymbol{\kappa}''=0}]\, J_{\gamma\delta}^{(q)}(\boldsymbol{\kappa}', \mathbf{R}_S), \quad (p = 1, 2 \ldots).$$

Здесь $J_{\alpha\beta}^{coh(p)} \sim \epsilon^p$ – слагаемое в разложении величины $J_{\alpha\beta}^{coh}$ по степеням малого параметра вида (11).

Возвратившись к общей постановке задачи (1), (2), рассмотрим вопрос об отыскании функций $K_{\alpha\beta}$, или, что то же, о построении операторов интенсивности [2, 12] $K_{\alpha\beta}$. Последние действуют по совокупности переменных $\mathbf{R}_{S1}$, $\mathbf{R}_{S2}$ и определены тождеством

$$\hat{K}_{\alpha\beta}\lambda(\mathbf{R}_{S1}, \mathbf{R}_{S2}) \equiv \int d\mathbf{R}'_{S1}\, d\mathbf{R}'_{S2}\, K_{\alpha\beta}(\mathbf{R}_{S1}, \mathbf{R}_{S2}|\mathbf{R}'_{S1}, \mathbf{R}'_{S2})\lambda(\mathbf{R}'_{S1}, \mathbf{R}'_{S2}),$$

где λ – произвольная пробная функция, $\alpha, \beta = m, g$. Далее нам понадобятся вспомогательные операторы, области определения и значений которых образованы функциями переменного $\mathbf{R}_S$:

$$\hat{t}_\alpha = \langle (1 - \hat{\chi})^{-1}\hat{v}_\alpha \rangle, \quad \hat{\chi} = \hat{v}_m \hat{s}_m + \hat{v}_g \hat{s}_g,$$

$$\hat{\chi}^э = \hat{g}_m \hat{s}_m + \hat{q}_g \hat{s}_g. \tag{13}$$

Здесь, как и в [9], $\hat{q}_\alpha$ – массовые операторы, $\hat{t}_\alpha$ – операторы перехода. Операторы $\hat{s}_\alpha = \int d\mathbf{R}'_S s_\alpha(\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S)\ldots$ определены ядрами $s_\alpha(\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S)$, которые получаются из формул (5) для $\overline{s}_\alpha(\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S)$ заменой $\overline{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}'_S)$ на $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}'_S)$ – функцию Грина второго рода регулярной задачи. Эта функция подчиняется уравнению $\hat{L}G(\mathbf{R}, \mathbf{R}'_S) = 0$ и граничному условию на S:

$$\hat{a}_m s_m(\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S) + \hat{a}_g s_g(\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S) = \delta(\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S).$$

Будем трактовать соотношения (6) как тождества относительно функций $\psi_{\alpha\beta}$. Эти тождества согласуются с результатом усреднения произведения двух поверхностных уравнений Липпмана–Швингера из [9] – для матрицы-строки $\|u(\mathbf{R}_{S1}), \partial u(\mathbf{R}_{S1})|\partial n_1\|$ и матрицы-столбца $\mathrm{col}\,\|u^*(\mathbf{R}_{S2}), \partial u^*(\mathbf{R}_{S2})|\partial n_2\|$, если операторы $K_{\alpha\beta}$ подчиняются уравнениям

$$\hat{K}_{\alpha\beta} = (1 - \hat{\chi}_1^э)(1 - \hat{\chi}_2^{э*})\hat{t}_{\alpha\beta} - \hat{q}_{\alpha 1}\hat{q}_{\beta 2}^* -$$
$$- (\hat{K}_{m\beta}\hat{s}_{m1} + \hat{K}_{g\beta}\hat{s}_{g1})\hat{t}_{\alpha 1} - (\hat{K}_{\alpha m}\hat{s}_{m2}^* +$$
$$+ \hat{K}_{\alpha g}\hat{s}_{g2}^*)\hat{t}_{\beta 2}^* - \sum_{\substack{\gamma,\delta = \\ m,g}} \hat{K}_{\gamma\delta}\hat{s}_{\gamma 1}\hat{s}_{\delta 2}^*\hat{t}_{\alpha\beta},$$

$$(\alpha, \beta = m, g). \tag{14}$$

Нижний индекс $j = 1, 2$ при операторе $\hat{l}$ указывает, что объектом действия оператора $\hat{l}_j$ является переменная $\mathbf{R}_{Sj}$; оператор $\hat{l}^*$, комплексно-сопряженный к данному, определен тождеством $\hat{l}^*\lambda(\mathbf{R}_S) \equiv [\hat{l}\lambda^*(\mathbf{R}_S)]^*$; оператор $\hat{t}_{\alpha\beta}$ действует по совокупности переменных $(\mathbf{R}_{S1}, \mathbf{R}_{S2})$ и задан выражением

$$\hat{t}_{\alpha\beta} = \langle (1 - \hat{\chi}_1)^{-1}(1 - \hat{\chi}_2^*)^{-1}\hat{v}_{\alpha 1}\hat{v}_{\beta 2}^* \rangle. \tag{15}$$

Рассмотрим следствия из уравнений (14) в случае $\hat{v}_g = 0$. Согласно формул (13), (15), имеем $\hat{t}_g = 0$, $\hat{\chi} = \hat{v}_m \hat{s}_m$, $\hat{t}_{mg} = \hat{t}_{gm} = \hat{t}_{gg} = 0$. Из уравнения (3) работы [9] для

этого случая получаем $\hat{q}_g = 0$, так что $\hat{\chi}^э = \hat{q}_m \hat{s}_m$. Система (14) сводится к одному уравнению для оператора $\hat{K}_{mm}$:

$$\hat{K}_{mm} = (1 - \hat{q}_{m1}\hat{s}_{m1})(1 - \hat{q}^*_{m2}\hat{s}^*_{m2})\hat{t}_{mm} - \hat{q}_{m1}\hat{q}^*_{m2} -$$
$$- \hat{K}_{mm}(\hat{s}_{m1}t_{m1} + \hat{s}^*_{m2}\hat{t}^*_{m2} + \hat{s}_{m1}\hat{s}^*_{m2}\hat{t}_{mm}) . \qquad (16)$$

а операторы $\hat{K}_{mg}$, $\hat{K}_{gm}$, $\hat{K}_{gg}$ равны 0. В каждой из систем (6), (8), (10) к числу уравнений принадлежат только соотношения для ψ_{mm}, J_{mm}:

$$\psi_{mm}(\mathbf{R}_{S1}, \mathbf{R}_{S2}) = \psi^{coh}_{mm}(\mathbf{R}_{S1}, \mathbf{R}_{S2}) +$$
$$+ \hat{\bar{s}}_{m1}\hat{\bar{s}}^*_{m2}\hat{K}_{mm}\psi_{mm}(\mathbf{R}_{S1}, \mathbf{R}_{S2})$$

(уравнения для J_{mm} нами опущены). Здесь $\hat{\bar{s}}_m = \int d\mathbf{R}'_S\, s_m(\mathbf{R}_S, \mathbf{R}'_S)\ldots$ – оператор, действующий по $\mathbf{R}_S$. Остальные соотношения в (6), (8), (10) представляют собой прямые формулы. Подчеркнем, что даваемые ими величины при расчете функции $\psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ не используются, так как последняя, согласно (4), выражается через ψ_{mm}:

$$\psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \psi_{mm}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) + \hat{\bar{G}}_1\hat{\bar{G}}^*_2\hat{K}_{mm}\psi_{mm}(\mathbf{R}_{S1}, \mathbf{R}_{S2})$$

(смысл операции $\hat{G}_1\hat{G}^*_2$ очевиден). Выводы и надлежащие выражения для случая $\hat{v}m = 0$ получаются из приведенных выше для случая $\hat{v}g = 0$ заменой всюду индексов $m \longleftrightarrow g$.

Система из четырех уравнений (14) является точной и позволяет, по крайней мере, в принципе, найти операторы интенсивности в замкнутой форме. На деле реализация этой возможности упирается в построение операторов $\hat{q}_\alpha, \hat{t}_\alpha, \hat{t}_{\alpha\beta}$. Следуя [13], опишем два приближения для операторов перехода. Первое характеризуется формулой $\hat{t}^{app}_\alpha = \sum_{n=0}^{N} \langle \hat{\chi}^n \hat{v}_\alpha \rangle$ и учитывает вклад статистических моментов возмущения вплоть до $(N + 1)$ – включительно. Оно справедливо, в частности, для достаточно малых возмущений. Второе получается из точных разложений оператора перехода по степеням при использовании приближенной формулы расцепления корреляций:

$$\langle \hat{\chi}^n \hat{v}_\alpha \rangle \simeq \langle \hat{\chi} \langle \hat{\chi}^{n-1} \rangle \hat{v}_\alpha \rangle .$$

Результирующее приближение $\hat{t}^{app}_{m,g}$ служит решением системы двух уравнений ($\alpha = m, g$):

$$\hat{t}^{app}_\alpha = \langle \hat{v}_\alpha \rangle + \langle \hat{\chi}\hat{v}_\alpha \rangle + \langle \hat{\chi}(\hat{t}^{app}_m \hat{s}_m + \hat{t}^{app}_g \hat{s}_g)\hat{v}_\alpha \rangle .$$

Это приближение предполагает, что для каждой последовательности актов рассеяния на нерегулярностях границы поле в процессе распространения между начальным и конечным актами рассеяния усредняется либо теряет статистическую связь с возмущениями в начальном и конечном актах рассеяния. Оно пригодно для описания сильных искажений поля в случае короткокоррелированных граничных возмущений. Располагая выражениями $\hat{t}^{app}_{m,g}$ операторов перехода, из уравнения (3) работы [9] находим (приближенно) массовые операторы $q^{app}_{m,g}$. Сходные приближения можно развить и для операторов $\hat{t}_{\alpha\beta}$, в результате чего становится возможным использование уравнений (14).

Решение упомянутых уравнений можно искать также в виде ряда по степеням операторов $\hat{v}_{m,g}$. Для этого нужно располагать соответственными разложениями операторов $\hat{q}_\alpha$, $\hat{t}_\alpha$, $\hat{t}_{\alpha\beta}$. На этом пути приходим к представлению $\hat{K}_{\alpha\beta}$ в виде разложения по корреляционным группам [12] возмущений, низшие члены которого образуют "лестничное" приближение

$$\hat{K}^{app}_{\alpha\beta} = \langle \hat{v}_{\alpha 1}\hat{v}^*_{\beta 2} \rangle - \langle \hat{v}_{\alpha 1} \rangle \langle \hat{v}^*_{\beta 2} \rangle .$$

Отметим очевидное обстоятельство, что оператор $\hat{L}$ из (1) зависит от круговой частоты ω: $\hat{L} \equiv \hat{L}(\omega)$, которая входит в локальное волновое число среды, а также (при наличии частотной дисперсии) и в материальные параметры последней. Пусть $u(R, \omega)$ – решение уравнения (1) на частоте ω, $\psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \langle u(\mathbf{R}_1, \omega_1) u^*(\mathbf{R}_2, \omega_2) \rangle$. Приведенные выше уравнения для $\psi_{\alpha\beta}$, $J_{\alpha\beta}$, их решения и прямая формула (4) справедливы и в случае нового определения второго момента поля, данного выше, если изменить понимание следующих величин: а) в определении функций $\psi_{\alpha\beta}$, $\psi_{\alpha\beta}^{\mathrm{coh}}$, ψ^{coh} заменить $u(\mathbf{R}_j) \to u(\mathbf{R}_j, \omega_j)$; б) функции $\overline{G}$, $\overline{s}_\alpha$ и $\overline{G}^*$, $\overline{s}_\beta$ из (4), (6), (10), (12) считать зависящими от параметров ω_1 и ω_2 соответственно; в) операторы, снабженные в (14) и далее индексом $j = 1, 2$, взять на частоте ω_j.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акустика океана / Под ред. Дж.Де Санто. М.: Мир, 1982.
2. *Басс Ф.Г., Фукс И.М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972.
3. *Фейнберг Е.Л.* Распространение радиоволн вдоль реальной поверхности // Исследования по распространению радиоволн. Вып. 2. М.–Л.: Изд. АН СССР, 1948. С. 97–216.
4. *Лысанов Ю.П.* О среднем коэффициенте отражения от неровной поверхности, ограничивающей неоднородную среду // Акуст. журн. 1969. Т. 15. № 13. С. 393.
5. *Алехин Ю.К., Урусовский И.А.* Прохождение звука через неровную границу раздела воздух – вода // Тр. АКИН. 1969. Вып. 5. С. 252.
6. *Фрейлихер В.Д., Фукс И.М.* Метод функций Грина для уравнения Гельмгольца с возмущенными граничными условиями // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13. № 1. С. 98.
7. *Жук Н.П., Третьяков О.А.* Двусторонние граничные условия для среднего скалярного поля в случае шероховатой поверхности // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 2. С. 207.
8. *Попов Ю.Ю.* Рассеяние звука на цилиндрической поверхности со случайными неровностями // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 6. С. 827.
9. *Жук Н.П.* Статистическая теория возмущений для звукового поля в среде с нерегулярной границей // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 5. С. 865.
10. *Барабаненков Ю.Н.* Уравнение переноса излучения в модели изотропных точечных рассеивателей // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 1. С. 53–55.
11. *Татарский В.И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967.
12. *Апресян Л.А., Кравцов Ю.А.* Теория переноса излучения. М.: Наука, 1983.
13. *Chitanvis S.M., Lax M.* Scattering of waves from rough surfaces // Progr. Theor. Phys. Suppl. 1984. № 80. P. 40.
14. *Басс Ф.Г., Фрейлихер В.Д., Фукс И.М.* Уравнение переноса излучения в волноводе со статистически неровными стенками // Укр. физ. журн. 1969. Т. 14. № 9. С. 1548–1551.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию 12.12.90

F.G. Bass, N.P. Zhuck, O.A. Tret'yakov

THE BETHE–SALPETER AND INTENSITY TRANSFER SURFACE EQUATIONS FOR AN ACOUSTIC FIELD IN THE CASE OF IMPENETRABLE FLUCTUATING BOUNDARY

This work was motivated primarily by practical problems of ocean acoustics reducing in theoretical aspect to calculations of acoustic field distortion due to multiple scattering on the bottom or free surface roughness. Equations for statistical moments of random acoustic field constitute the basic element of multiple scattering theory. In this article equations governing the behaviour of second statistical moment are obtained. New versions of the Bethe–Sapleter and intensity transfer equations are presented, rigorous

relations for determining intensity operations are proposed and some ways of solving approximately the transfer equations and the problem for intensity operators are discussed. The main virtue of these equations for second statistical moments lies in the fact that they are posed on some regular surface in contrast to three–dimensional relations of similar physical background known earlier. This renders them more tractable from the numerical point of view than the previous results. Apart from this, the surface character of the problems obtained enables one to derive the intensity transfer equations under fairly looserestrictions. In particular, the latter can be validated even in case of strong interferention phenomena in the bulk of medium. Analogical equations known earlier are limited by the demand that these phenomena can be neglected.