АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 5

УДК 539.3
© 1991 г.

А.М. Гомилко, Н.С. Городецкая, В.В. Мелешко

КРАЕВОЙ РЕЗОНАНС ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПОЛУПОЛОСЫ

Рассмотрены особенности краевого резонанса при вынужденных гармонических колебаниях антисимметрично деформированной полуполосы. Показано, что при определенном согласовании форм нагрузки на торце полуполосы и краевой моды можно значительно увеличить интенсивность возбуждения краевого резонанса.

Имеется значительное число публикаций, раскрывающих особенности поведения волн Лэмба в упругой изотропной полубесконечной полосе и посвященных изучению краевого резонанса [1–7]. Его суть заключается в сильной локализации движения вблизи торца волновода и резком уменьшении смещений при удалении от торца. Экспериментально краевой резонанс впервые наблюдали Шоу и Оливер [1, 2], а Газис и Миндлин [3] дали теоретическое объяснение этого явления, связав его с резонансом на неоднородных волнах. В большинстве работ исследование краевого резонанса проводилось при симметричной деформации полуполосы (см. [1, 3–6]). При этом изучалась специфика возбуждения неоднородных волн при различных способах возбуждения волновода как при падении на торец первой нормальной волны, приходящей из бесконечности [4, 6], так и при задании на торце фиксированной силовой нагрузки [5]. В обоих случаях краевой резонанс проявлялся в диапазоне существования одной распространяющейся волны. При антисимметричных изгибных колебаниях полуполосы краевой резонанс также существует, однако уже в области частот двух распространяющихся волн [6]. При этом амплитуда смещений на торце волновода и интенсивность возбуждения краевой моды значительно меньше, чем при продольных колебаниях. В данной работе рассмотрены особенности краевого резонанса при вынужденных колебаниях антисимметрично деформированной полуполосы. Показано, что при определенном согласовании форм нагрузки и краевой моды можно значительно увеличить интенсивность возбуждения краевого резонанса.

Рассмотрим плоскую задачу о распространении изгибных волн Лэмба в полубесконечном изотропном упругом слое $|Y| \leqslant h$, $Z \geqslant 0$ со свободными от напряжений поверхностями $Y = \pm h$ при воздействии нормальной силовой гармонической нагрузки на торце $Z = 0$ (временной множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опускается):

$$\sigma_y(\pm 1, z) = \tau_{yz}(\pm 1, z) = 0, \tag{1}$$
$$\tau_{zy}(y, 0) = 0,\ \sigma_z(y, 0) = f(y),\ f(y) = \sin(3/2\pi y),$$

где $y = Y/h$, $z = Z/h$ — безразмерные координаты. Материал слоя характеризуется модулем сдвига G, коэффициентом Пуассона ν и скоростями c_1, c_2 соответственно продольных и поперечных волн. Определим безразмерные частоты колебаний $\Omega_1 = \omega h/c_1$, $\Omega_2 = \omega h/c_2$.

В соответствии со схемой метода однородных решений [4–6] волновое поле в полуполосе $|y| \leqslant 1$, $z \geqslant 0$ представим в виде бесконечной суммы распространяющихся и неоднородных волн. Тогда выражение для вектора смещений имеет вид

$$\mathbf{u}(y, z) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \mathbf{u}_j(y) \exp(i\zeta_j z), \tag{2}$$

где $\mathbf{u}_j = \left\{ u_y^{(j)},\ u_z^{(j)} \right\}$ и

$$u_y^{(j)} = -i\zeta_j \left[\cos\beta_j y - \frac{(\zeta_j^2 - \beta_j^2)\cos\beta_j}{2\zeta_j^2 \cos\alpha_j} \cos\alpha_j y\right],$$

$$u_z^{(j)} = -\left[\beta_j \sin\beta_j y + \frac{(\zeta_j^2 - \beta_j^2)\cos\beta_j}{2\alpha_j \cos\alpha_j} \sin\alpha_j y\right], \tag{3}$$

$$\alpha_j^2 = \Omega_1^2 - \zeta_j^2,\ \ \beta_j^2 = \Omega_2^2 - \zeta_j^2,$$

причем $\mathrm{Im}\zeta_j \geqslant 0$ и ζ_j являются корнями дисперсионного уравнения ($\mathrm{Re}\zeta_j > 0$ при $\mathrm{Im}\zeta_j = 0$)

$$\Delta(\zeta) \equiv (2\zeta - \Omega_2^2)^2 \sin\alpha\cos\beta + 4\alpha\beta\sin\beta\cos\alpha = 0. \tag{4}$$

Вектор-функция $\mathbf{u}_j(y)\exp(i\zeta_j z)$ удовлетворяет однородным уравнениям движения Ламе и для соответствующих ей напряжений $\sigma_y^{(j)}(\pm 1)\exp(i\zeta_j z) = \tau_{yz}^{(j)}(\pm 1)\exp(i\zeta_j z) = 0$. Таким образом, граничные условия на торце полуполосы удовлетворяются соответствующим подбором коэффициентов A_j, исходя из уравнения

$$\sum_{j=1}^{N} A_j \tau_{zy}^{(j)}(y) = 0, \quad \sum_{j=1}^{N} A_j \sigma_z^{(j)}(y) = f(y).$$

Для нахождения A_j использовались традиционные подходы, число N коэффициентов A_j выбиралось таким образом, чтобы обеспечить требуемую точность выполнения граничных условий. Так, при $N = 12$ (учитывалось пять пар неоднородных волн) была достигнута точность выполнения граничных условий на торце до 2% $\max|f(y)|$. При увеличении числа нормальных волн, привлекаемых для описания волнового поля в полуполосе, точность выполнения граничных условий возрастала, а значения коэффициентов A_j практически не менялись.

Другим критерием правильности полученных численных результатов является контроль за выполнением закона сохранения энергии, в соответствии с которым энергия, потребляемая системой, должна быть равна энергии, переносимой бегущими волнами. Энергия, подводимая за период к единице ширины полосы при выполнении (1), определяется выражением

$$E_1 = -\mathrm{Im} \sum_{j=1}^{N} \int_{-1}^{1} f(y)\, u_z^{(j)}(y)\, dy. \tag{5}$$

Кроме того, средний по времени поток энергии, переносимый нормальными волнами, связан только с распространяющимися волнами [7] и вычисляется по формуле

$$E_2 = \sum_{j=1}^{L} W_j,\ \ W_j = -2i\omega \int_{-1}^{1} (\sigma_z^{(j)} u_z^{(j)} - \tau_{yz}^{(j)} u_y^{(j)})\, dy, \tag{6}$$

где L – число бегущих волн на частоте вынужденной силы. Выражение для W_j из (6) может быть преобразовано к виду

$$\frac{W_j}{G\omega} = -\frac{\cos\beta_j}{4\alpha_j \zeta_j^2 \cos\alpha_j} \frac{\Omega^2}{2} \Delta'(\zeta_j)\, |A_j|^2. \tag{7}$$

Во всем рассмотренном частотном диапазоне погрешность выполнения закона сохранения энергии $E_1 = E_2$ не превышала 1% от E_1.

Перейдем к анализу количественных данных, описывающих волновой процесс в полуполосе, полученных в процессе реализации указанной выше схемы. Численные расчеты выполнены для значения $\nu = 0{,}3$. Рассматривался диапазон частот, в котором су-

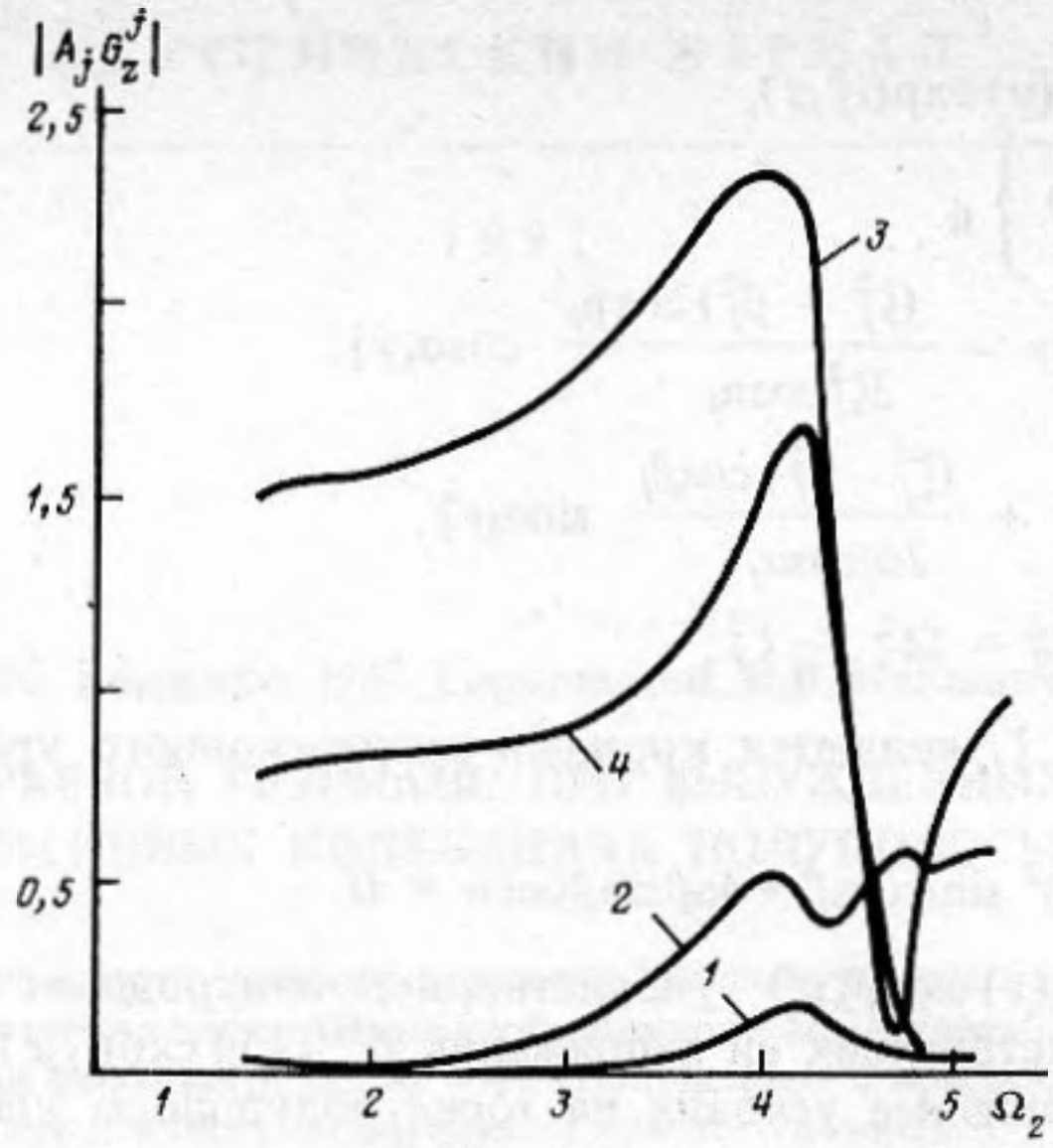

Рис. 1

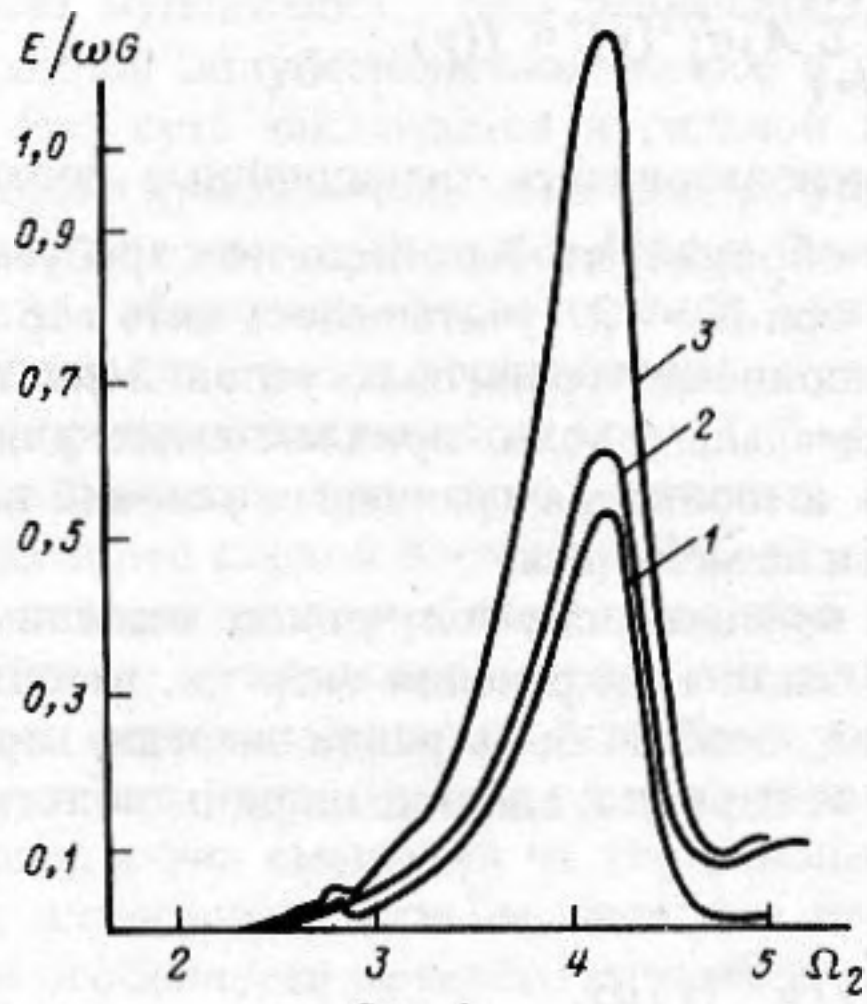

Рис. 2

Рис. 1. Модули нормированных коэффициентов A_j, $j = 1-4$

Рис. 2. Частотная зависимость энергии, поглощаемой волноводом (*3*) и ее распределение между первой (*1*) и второй (*2*) бегущими волнами

ществует не более двух распространяющихся волн. Полученные значения коэффициентов A_j умножались на величину нормального напряжения соответствующей моды в фиксированной точке. Такая нормировка позволяет определить вклад каждой нормальной моды при формировании волнового поля на торцевой поверхности. Модули этих нормированных коэффициентов показаны на рис. 1. Здесь кривые *1* и *2* описывают соответственно первую и вторую бегущие волны. Кривые *3* и *4* определяют вклады нормальных мод с первым и вторым комплексными волновыми числами. Из рассмотрения рис. 1 следует, что на частоте $\Omega_2 = 4{,}19$ наблюдается резкое увеличение нормированной амплитуды первой неоднородной волны (кривая *3*). На этой же частоте достигают максимального значения амплитуда второй неоднородной моды (кривая *4*) и амплитуды неоднородных волн высших порядков. Наиболее сильно возбуждается

первая неоднородная волна, которая является определяющей при формировании волнового поля на торце полуполосы. Следует отметить, что неоднородные волны значительно сильнее влияют на структуру волнового поля вблизи торца полуполосы, чем распространяющиеся на данной частоте. Так, первая неоднородная волна возбуждается в 12 раз сильнее первой распространяющейся и в 5 раз сильнее второй распространяющейся волны. На частоте $\Omega_2 = 4{,}19$ резко меняется фаза коэффициента возбуждения первой бегущей волны. Описанные особенности являются общими для краевого резонанса независимо от способа возбуждения полуполосы [4, 5] и от вида деформации [6]. Из рис. 1 видно, что на частоте краевого резонанса амплитуда первой бегущей волны достигает своего максимального значения. Такое поведение этой моды является отличительной чертой краевого резонанса при вынужденных колебаниях по сравнению с возбуждением полуполосы первой нормальной волной, приходящей из бесконечности [4, 6]. При вынужденных колебаниях в случае симметричной деформации волновода на частоте краевого резонанса также имел место резонанс на единственной распространяющейся волне [5]. В рассматриваемом случае ситуация более сложная, так как существуют две распространяющихся волны. В рассмотренной частотной области вторая мода ведет себя сложнее и имеет два пика нормированной амплитуды, причем первый максимум достигается на частоте краевого резонанса. Таким образом, здесь, как и при вынужденных продольных колебаниях полуполосы [5], в дальнем поле на частоте краевого резонанса наблюдается резонанс на распространяющихся волнах. При этом вторая бегущая волна возбуждается в 3 раза сильнее первой и является доминирующей в дальнем поле.

Таким образом, краевой резонанс при вынужденных колебаниях полуполосы проявляется не только в сильной локализации движения вблизи торца волновода, но и в резонансе на распространяющихся волнах в дальнем поле.

Анализируя резонансные явления при вынужденных колебаниях, важно следить за энергией, поглощаемой волноводом в зависимости от частоты. На рис. 2 представлена частотная зависимость нормированной величины энергии $E/G\omega$, поглощаемой волноводом (кривая *3*), а также зависимость распределения этой энергии между различными нормальными модами: кривая *1* описывает первую бегущую волну, а кривая *2* – вторую. В рассматриваемом случае общая поглощаемая энергия возрастает вплоть до частоты $\Omega_2 = 4{,}19$, а с дальнейшим увеличением частоты она уменьшается. В диапазоне существования двух распространяющихся волн вторая бегущая волна является более энергетически выраженной, чем первая. Однако это отличие незначительно, так как на частоте $\Omega_2 = 4{,}19$ вторая мода переносит 53% энергии, потребляемой полуполосой, а первая соответственно 47%. Увеличение общей потребляемой энергии в окрестности частоты краевого резонанса отмечалось в [5, 8]. Процентное распределение подводимой энергии между различными бегущими волнами оказалось существенно зависимым от вида нагрузки на торце. В работе [8] при возбуждении изгибных колебаний полуполосы нагрузкой вида $f(y) = y/2$ в окрестности частоты краевого резонанса вторая распространяющаяся волна является доминирующей, при этом первая бегущая мода теряет свою интенсивность и на частоте краевого резонанса имеет минимальную величину. В работе [6] установлено, что в этом же частотном диапазоне при возбуждении изгибных колебаний в полуполосе первой нормальной волной, приходящей из бесконечности, наиболее энергоемкой является первая бегущая волна. Таким образом, энергетическая насыщенность различных бегущих волн существенно зависит не только от частоты и вида деформации, но и от способа возбуждения волновода.

Для более полной характеристики исследуемого явления при изгибных колебаниях полуполосы необходимо проанализировать отвечающую ему форму колебаний. Представление о форме колебаний можно составить по данным рис. 3, где показано равновесное состояние полуполосы (штриховая линия) и смещения на резонансной частоте (сплошная линия, кривая *1*). Кривая *1* получена при графическом построении в каждой точке $(y, 0)$ $y \in [0, 1]$ торца полуполосы вектора $(\mathrm{Re}\, u_z\ (y, 0), \mathrm{Re}\, u_y\ (y, 0))$; одинако-

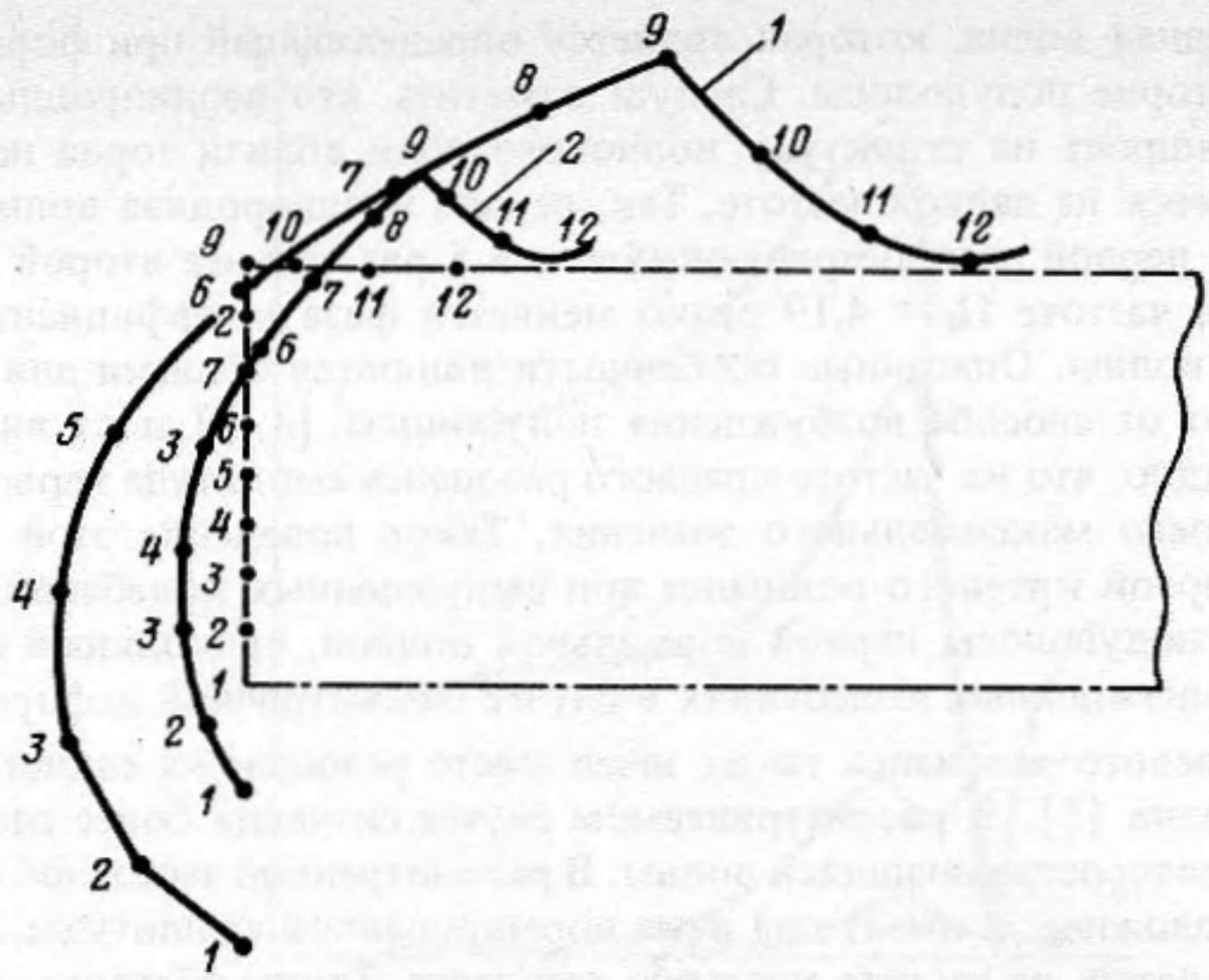

Рис. 3. Форма колебаний полуполосы на частоте краевого резонанса: *1* – возбуждение нагрузкой на торце, *2* – возбуждение падающей волной из бесконечности

выми цифрами отмечены положения соответствующих точек границы в указанных случаях. С изменением частоты максимальное отклонение колебаний частиц волновода от состояния равновесия уменьшается. Для оценки интенсивности возбуждения краевой моды в зависимости от способа возбуждения на рис. 3 представлена также форма колебаний на частоте краевого резонанса при падении на торец первой нормальной волны, приходящей из бесконечности (кривая *2*). При сравнении кривых *1* и *2* на рис. 3 можно заметить, что если энергия, потребляемая волноводом, одинакова, то при возбуждении полуполосы нагрузкой на торце вида $f(y) = \sin(3/2\pi y)$ краевая мода проявляется значительно сильнее, чем при падении на торец первой нормальной волны. При этом вид нагрузки $f(y) = \sin(3/2\pi y)$ был выбран на основании анализа формы краевой моды при изгибных колебаниях [6] таким образом, чтобы формы нагрузки и краевой моды хорошо согласовывались.

Проведенный количественный анализ вынужденных изгибных колебаний полуполосы позволил выявить отличительные особенности краевого резонанса в этом случае: на частоте краевого резонанса наблюдается резкое увеличение энергии, потребляемой волноводом; существуют две бегущие волны, которые обуславливают резонанс в дальнем поле. В окрестности частоты краевого резонанса амплитуда коэффициента возбуждения только первой бегущей волны резко меняет свою фазу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shaw E.A.G.* On the resonant vibration of thick barium titanate disks // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28. N 1. P. 38–50.
2. *Oliver J.* Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by a wide-band, short-duration pulse-techique // J. Acoust. Soc. Amer. 1957. V. 29. N 2. P. 189–194.
3. *Gasis D.C., Mindlin R.D.* Extensional of vibrations and waves in a circular disk and semiinfinite plate // J. Appl. Mech. 1960. V. 27. N 3. P. 541–547.
4. *Torvic P.J.* Reflection of wave trainsin semiinfinite plates // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. V. 41. N 2. P. 346–353.
5. *Torvic P.J., McClatchey J.J.* Response of an elastic plate to a cycle longitudinal force // J. Acoust. Soc. Amer. 1968. V. 44. N 1. P. 59–64.
6. *Гринченко В.Т., Городецкая Н.С.* Краевой резонанс при изгибных колебаниях полуполосы // Докл. АН УССР. Сер. А. 1985. № 4. С. 20–23.

7. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
8. *Мелешко В.В., Татуян В.Б.* Возбуждение гармонических волн Лэмба в полубесконечном упругом слое // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 5. С. 919–926.

Институт гидромеханики
Академии наук УССР

Поступила в редакцию
04.07.90

A.M. Gomilko, N.S. Gorodetskaya, V.V. Meleshko

THE END RESONANCE UNDER THE FORCED FLEXURAL VIBRATIONS OF SEMIINFINITE STRIP

The two-dimensional problem of excitation of the steady flexural Lamb modes in a semiinfinite plate of homogeneous isotropic, linearly elastic material which occupies as the region $|Y \leqslant 1|$, $Z| \geqslant 0$ is studied. The faces $|Y| = 1$ are free of tractions, the end $Z = 0$ is loaded normally. The problem of determination of the excited propagating and non-propagating Lamb modes is solved by method of homogeneous solutions. The special attention is paid to the study of edge resonance phenomena for flexure case. It is found that this resonance has a pecularity – in the far field considerable increasing of the two amplitudes of propagating modes is observed, the second mode is dominated in this frequency range. It is shown that the energy supplied to the edge of the plate is shared between propagating modes. Near the edge resonance frequency the energy is shared approximately on equal parts between two modes. It is shown that under special relation between forms of load and the edge mode on the face of the semiinfinite strip the intensity of exsitation of end resonance may be significantly increased.