АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 5

УДК 534.22:532.529.6
© 1991 г.

С.Т. Завтрак, Е.В. Коробко

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ЖИДКИХ ДИЭЛЕКТРИКАХ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА В ПРИСУТСТВИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Показано, что воздействие внешних электрических полей на жидкие диэлектрики с пузырьками газа приводит к изменению упругих свойств таких сред, монопольным осцилляциям пузырьков и гидродинамическому взаимодействию между ними. При этом может наблюдаться анизотропия скорости распространения звуковых волн.

Влияние электрического поля на упругие свойства жидкостей с фазовыми включениями вызывает давний интерес (см., например, [1–4]). В настоящей работе теоретически исследовано изменение упругих свойств жидких диэлектриков с газовыми пузырьками, на которые воздействуют как постоянные, так и переменные электрические поля. В качестве жидких диэлектриков могут рассматриваться различные виды масел, а также обыкновенная дистиллированная вода, обладающая, как известно, большой диэлектрической проницаемостью. Своеобразие рассматриваемой системы заключается в том, что между пузырьками возникает взаимодействие как электрического, так и гидродинамического типов. Первый тип обусловлен тем, что внешнее электрическое поле наводит на пузырьки дипольные моменты, значения которых зависят от объемов пузырьков. Второй связан с тем, что пузырьки рассеивают звук, изменяясь при этом в размерах как за счет внешней звуковой волны, так и за счет волн, перерассеянных соседними пузырьками. Причем если первый тип взаимодействия распространяется в диэлектрике со скоростью света, т.е. практически мгновенно, то второй – со скоростью звука c_{ac}. Пульсации объемов пузырьков за счет взаимодействия 2-го типа, в свою очередь, порождают изменения их дипольных электрических моментов. В результате, претерпевает также изменение и взаимодействие 1-го типа. При этом могут возникать перекрестные эффекты, приводящие к анизотропии скорости распространения звуковых волн.

Рассмотрим вначале одиночный сферический газовый пузырек, помещенный в поле с постоянной напряженностью $\mathbf{E}_0$. Решение задачи о распределении поля хорошо известно [5]:

$$\mathbf{E}_{in} = \frac{3\epsilon_l}{2\epsilon_l + \epsilon_g}\,\mathbf{E}_0, \tag{1}$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{out}} = \mathbf{E}_0 - \frac{(\epsilon_g - \epsilon_l)}{(2\epsilon_l + \epsilon_g)}\,\frac{R_0^3}{r^3}\,(\mathbf{E}_0 - 3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot E_0)). \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{E}_{in}$ и $\mathbf{E}_{\mathrm{out}}$ – напряженности электрического поля внутри и вне пузырька соответственно, ϵ_l и ϵ_g – диэлектрические проницаемости жидкости и газа, R_0 – радиус пузырька, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки в жидкости, начало которого совпадает с центром пузырька, единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

Воздействие электрического поля изменяет свободную энергию изучаемой системы. Это изменение определяется хорошо известным выражением [5]

$$F = F_0 = -\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}_0(\mathbf{D}_{in} - \epsilon_l \mathbf{E}_{in})dV, \tag{3}$$

где $\mathbf{D}_{in} = \epsilon_g \mathbf{E}_{in}$ – вектор электрической индукции. Интегрирование в формуле (3) ведется только по объему, занимаемому пузырьком. В результате из (3) получается

$$F - F_0 = -\frac{E_0^2 R_0^3 \epsilon_l(\epsilon_g - \epsilon_l)}{2(2\epsilon_l + \epsilon_g)}. \tag{4}$$

Вычисляя производную от выражения (4) по объему пузырька $V_0 = \frac{4\pi}{3} R_0^3$, находим величину эффективного давления, деформирующего пузырек [5]

$$\Delta P_0 = -\frac{\partial(\Delta F)}{\partial V_0} = \frac{3}{8\pi}\frac{\epsilon_l E_0^2(\epsilon_g - \epsilon_l)}{(2\epsilon_l + \epsilon_g)}. \tag{5}$$

Равновесный радиус пузырька становится равным

$$\tilde{R}_0 = R\left(1 + \frac{\Delta P_0}{P_0}\right)^{-1/3}, \tag{6}$$

где P_0 – статическое давление в отсутствие поля.

Соответственно изменяется и резонансная круговая частота пузырька

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0\left(1 + \frac{\Delta P_0}{P_0}\right)^{5/6}, \tag{7}$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_l R_0^2}}$, γ – постоянная адиабаты газа, содержащегося в пузырьке, ρ_l – плотность жидкости.

Теперь рассмотрим пару пузырьков. Вычислим энергию их электрического взаимодействия. Изменение свободной энергии пузырьков по-прежнему определяется интегралом (3), но в данном случае интегрирование ведется по объемам двух пузырьков. На каждый из них, кроме внешнего поля, воздействует также и поле, создаваемое наведенным дипольным моментом соседа, т.е., например, поле внутри 1-го пузырька есть

$$\mathbf{E}_{in}^{(1)} = \frac{3\epsilon_l}{2\epsilon_l + \epsilon_g}\left\{\mathbf{E}_0 - \frac{(\epsilon_g - \epsilon_l)}{(2\epsilon_l + \epsilon_g)}\frac{R_2^3}{l^3}(\mathbf{E}_0 - 3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_0))\right\}, \tag{8}$$

где R_1 и R_2 – радиусы 1-го и 2-го пузырьков, l – радиус-вектор их относительного расстояния, $\mathbf{n} = \mathbf{l}/l$. В результате вычисления интеграла (3) в случае пары пузырьков получаем

$$F - F_0 = -\frac{E_0^2 R_1^3 \epsilon_l(\epsilon_g - \epsilon_l)}{2(2\epsilon_l + \epsilon_g)} - \frac{E_0^2 R_2^3 \epsilon_l(\epsilon_g - \epsilon_l)}{2(2\epsilon_l + \epsilon_g)} + \frac{R_1^3 R_2^3 \epsilon_l(\epsilon_g - \epsilon_l)^2}{(2\epsilon_l + \epsilon_g)^2 l^3}(E_0^2 - 3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_0)^2). \tag{9}$$

Первые два члена в (9) описывают изменения свободных энергий изолированных пузырьков, а последний член представляет собой энергию их электрического взаимодействия типа диполь-диполь [5, 6]:

$$W_{int} = \frac{R_1^3 R_2^3 \epsilon_l(\epsilon_g - \epsilon_l)^2}{(2\epsilon_l + \epsilon_g)^2 l^3}(E_0^2 - 3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_0)^2). \tag{10}$$

Избыточное давление, действующее на 1-й пузырек за счет электрического поля

$$\Delta P_1 = -\frac{\partial(\Delta F)}{\partial V_1} = \frac{3E_0^2\epsilon_l(\epsilon_g-\epsilon_l)}{8\pi(2\epsilon_l+\epsilon_g)} - \left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 \frac{V_2\epsilon_l(\epsilon_g-\epsilon_l)^2}{(2\epsilon_l+\epsilon_g)^2 l^3}\,(E_0^2 - 3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_0)^2). \tag{11}$$

Здесь $V_{1,2} = \frac{4\pi}{3} R_{1,2}^3$ – объемы пузырьков.

Теперь рассмотрим звуковую волну, распространяющуюся сквозь облако газовых пузырьков в жидкости, помещенной в постоянное электрическое поле. Результирующее давление, действующее на i-й пузырек, расположенный в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}_i$, есть сумма давлений внешней звуковой волны $P_{ext}(\mathbf{r}_i, t)$ и волн, рассеянных соседними пузырьками [7]

$$P'(\mathbf{r}_i, t) = \sum_{j\neq i} f_{1j}\frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} P(\mathbf{r}_j, t), \tag{12}$$

где

$$f_{1j} = \frac{R_j}{\omega_j^2/\omega^2 - 1 + i\delta_j} \tag{13}$$

– амплитуда рассеяния звуковой волны на j-м пузырьке, R_j – равновесный радиус j-го пузырька, ω_j – его резонансная круговая частота, δ_j – постоянная затухания, $k = \omega/c_{ac}$ – волновое число.

В результирующее давление, действующее на i-й пузырек, необходимо также включить и дополнительные вклады, обусловленные электрическим взаимодействием пузырьков (см. формулу (11)):

$$P''(\mathbf{r}_i, t) = -\left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 \frac{\epsilon_l(\epsilon_g-\epsilon_l)^2}{(2\epsilon_l+\epsilon_g)^2} \sum_{j\neq j} \frac{(V_{0j}+\Delta V_j(t))}{r_{ij}^3}\,(E_0^2 - 3(\mathbf{n}_{ij}\cdot\mathbf{E}_0)^2), \tag{14}$$

где $\mathbf{n}_{ij} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)/r_{ij}$, V_{0j} – равновесный объем пузырька, $\Delta V_j(t)$ – изменение его объема. Обратим внимание на то, что под знаком суммы в (14) не содержатся фазовые множители типа $\exp(ikr_{ij})$, входящие в (12). Это, как отмечалось выше, связано с тем, что электрическое взаимодействие распространяется практически мгновенно. В результате имеем

$$P(\mathbf{r}_i, t) = \frac{3E_0^2\epsilon_l(\epsilon_g-\epsilon_l)}{8\pi(2\epsilon_l+\epsilon_g)} - \left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 \frac{\epsilon_l(\epsilon_g-\epsilon_l)^2}{(2\epsilon_l+\epsilon_g)^2} \sum_{j\neq i} \frac{V_{0j}}{r_{ij}^3}\,(E_0^2 - 3(\mathbf{n}_{ij}\cdot\mathbf{E}_0)^2) +$$
$$+ \sum_{j\neq i} f_{1j}\frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} P(\mathbf{r}_j, t) - \left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 \frac{\epsilon_l(\epsilon_g-\epsilon_l)}{(2\epsilon_l+\epsilon_g)^2} \sum_{j\neq i} \frac{\Delta V_j(t)}{r_{ij}^3}\,(E_0^2 - 3(\mathbf{n}_{ij}\cdot\mathbf{E}_0)^2). \tag{15}$$

Первые два члена в правой части (15) – статические вклады, а два последних периодически зависят от времени (в дальнейшем предполагаем, что эта зависимость определяется экспоненциальным множителем $\exp(-i\omega t)$).

Для простоты ограничимся случаем пузырьков одинаковых радиусов R_0 и введем функцию пространственного распределения пузырьков $n(\mathbf{r})$, равную их числу в единице объема жидкости вблизи точки с радиус-вектором r. Полагая, что длина звуковой волны в микронеоднородной среде намного превосходит характерное расстояние между пузырьками, перейдем от (15) к уравнению самосогласованного поля в интегральной форме [7]

$$P(\mathbf{r}, t) = \Delta P_0 + \left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 \frac{\epsilon_l(\epsilon_g-\epsilon_l)^2 V_0}{(2\epsilon_l+\epsilon_g)^2} \int n(\mathbf{r}')\,(\mathbf{E}_0\cdot\Delta_{r'})^2 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' +$$

$$+ f_1 \int \frac{e^{ik|r-r'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} n(\mathbf{r}')P(\mathbf{r}', t)dV' - \frac{9 f_1 \epsilon_l(\epsilon_g - \epsilon_l)^2}{4\pi\rho_l\omega^2(2\epsilon_l + \epsilon_g)^2} \times$$

$$\times \int n(\mathbf{r}')P(\mathbf{r}', t)\,(\mathbf{E}_0 \cdot \Delta_{r'})^2 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'. \tag{16}$$

Здесь, во-первых, учтено, что изменение объема пузырька связано с амплитудой рассеяния соотношением

$$\Delta V(t) = -\frac{4\pi f_1}{\rho_l\omega^2}\,\Delta P(t), \tag{17}$$

где $\Delta P(t)$ – волна давления, действующая на пузырек. Действительно, подставляя (17) в известную формулу для излучаемой монополем волны, имеем

$$P' = \rho_l \frac{\Delta\ddot{V}(t)}{4\pi r} e^{ikr} = \frac{f_1 e^{ikr}}{r}\,\Delta P(t),$$

что соответствует определению величины f_1 [7].

Считая, что внутри диэлектрика $n(\mathbf{r})$ = const, т.е. пузырьки распределены равномерно, проинтегрируем вклады, входящие в правую часть уравнения (16) и содержащие под интегралом оператор $(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla_{r'})$ по частям. В результате второй член обращается в нуль, а в последнем указанный оператор действует на функцию $P(\mathbf{r}', t)$.

Влияние статического вклада ΔP_0 сводится к перенормировке радиуса $R_0 \to \tilde{R}_0$, круговой частоты $\omega_0 \to \tilde{\omega}_0$ и амплитуды рассеяния $f_1 \to \tilde{f}_1$, определяемым соответственно формулам (6), (7) и (13). Поэтому этот вклад можно опустить в правой части уравнения (16), но при этом произвести замену $f_1 - \tilde{f}_1$.

Для дальнейшего оказывается удобнее перейти от интегральной формы уравнения (16) к дифференциальной. Для этого подействуем, как обычно (см., например, [7]), на обе части уравнения (16) оператором $(\Delta + k^2)$. Имеем

$$(\Delta + k^2 + 4\pi n\tilde{f}_1)P(\mathbf{r}, t) = -\frac{9\tilde{f}_1\epsilon_l(\epsilon_g - \epsilon_l)^2}{4\pi\rho_l\omega^2(2\epsilon_l + \epsilon_g)^2}\,(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla)^2\left\{k^2\psi(\mathbf{r}, t) - 4\pi n P(\mathbf{r}, t)\right\}, \tag{18}$$

где введена функция

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int n(\mathbf{r}')P(\mathbf{r}', t)\,\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dU', \tag{19}$$

удовлетворяющая уравнению

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = -4\pi n P(\mathbf{r}, t). \tag{20}$$

Если электрическое поле $\mathbf{E}_0 = 0$, то уравнение (18) можно рассматривать как аналог уравнения Гельмгольца с эффективным волновым числом [7]

$$k_{\text{eff}}^{(0)^2} = k^2 + 4\pi n f_1. \tag{21}$$

Для того чтобы выяснить влияние постоянного электрического поля, рассмотрим случай плоской бегущей низкочастотной $(\omega \ll \omega_0)$ звуковой волны. В этом пределе

$$\tilde{f}_1 = \frac{\tilde{R}_0\omega^2}{\tilde{\omega}_0^2} = f_1\left(1 + \frac{\Delta P_0}{P_0}\right)^{-2}. \tag{22}$$

Решение системы уравнений (18) и (20) будем искать в виде $P = P_0 \exp(i\mathbf{k}_{\text{eff}}\mathbf{r} - i\omega t)$ и $\psi = \psi_0 \exp(i\mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$. В результате приходим к дисперсионному уравнению

$$k_{\text{eff}}^2 = k^2 + 4\pi n\tilde{f}_1 - \frac{9n\tilde{f}_1\epsilon_l(\epsilon_g - \epsilon_l)^2}{\rho_l\omega^2(2\epsilon_l + \epsilon_g)^2}\,(\mathbf{k}_{\text{eff}}\mathbf{E}_0)^2\left(\frac{k^2}{k_{\text{eff}}^2} - 1\right). \tag{23}$$

Считая диэлектрическое поле малым, имеем из (23) приближенно, с точностью до линейных по ΔP_0 (квадратичных по E_0) членов:

$$k_{\text{eff}}^2 \approx k_{\text{eff}}^{(0)^2} - 2\,\frac{\Delta P_0}{P_0}\,(k_{\text{eff}}^{(0)^2} - k^2) +$$

$$+\,\frac{6(\epsilon_g - \epsilon_l)}{(2\epsilon_l + \epsilon_g)}\,\frac{\Delta P_0}{\rho_l \omega^2}\,k_{\text{eff}}^{(0)^4}\,\left(\frac{k^2}{k_{\text{eff}}^{(0)^2}} - 1\right)^2 \cos^2\varphi, \tag{24}$$

где φ – угол между векторами $\mathbf{k}_{\text{eff}}$ и $\mathbf{E}_0$. Таким образом, в присутствии постоянного электрического поля имеет место анизотропия скорости звука.

Если объемная концентрация газа $\tau = nV_0$ достаточно велика, то $k_{\text{eff}}^{(0)} \gg k$. Так, для пузырьков воздуха в воде при обычных условиях уже при $\tau \gtrsim 10^{-3}$ можно считать, что указанное неравенство справедливо [7]. При этом скорость звука в микронеоднородной среде определяется формулой Мэллока [8]

$$c_{\text{eff}}^{(0)} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_l \tau}} \ll c_{ac}. \tag{25}$$

Учитывая сказанное, формулу (24) можно упростить и представить ее в виде отношения изменения скорости звука (при включении электрического поля) к скорости звука в микронеоднородной среде $c_{\text{eff}}^{(0)}$ в отсутствие поля

$$\frac{\Delta c_{\text{eff}}^{(0)}}{c_{\text{eff}}^{(0)}} \approx \frac{\Delta P_0}{P_0} - \frac{3(\epsilon_g - \epsilon_l)}{(2\epsilon_l + \epsilon_g)}\,\frac{\Delta P_0}{P_0}\,\frac{\tau}{\gamma}\,\cos^2\varphi. \tag{26}$$

Для воздушных пузырьков в воде ($\epsilon_g \approx 1$, $\epsilon_l \approx 81$) при напряженности поля $E_0 = 10$ кВ/см величина $\Delta P_0 = 540$ Па. Соответствующий малый параметр, входящий в формулу (26), $\epsilon = \Delta P_0/P_0 = 0{,}54\%$. Из этой формулы видно, что пространственная анизотропия скорости звука мала и определяется еще меньшим параметром $\epsilon_1 = \epsilon\tau$. Тем не менее она существует и может хорошо наблюдаться в диэлектриках с большими значениями ϵ_l, в которых избыточное статическое давление $\Delta P_0 \sim \epsilon_l E_0^2$ может достигать значительных величин.

Отметим также, что экспериментально пространственная анизотропия скорости звука уже наблюдалась в работе [4], но не на газовых пузырьках, а на твердых частицах. В этой работе исследовалось влияние электрического поля на упругие свойства электрореологической суспензии на основе трансформаторного масла с добавками мелкодисперсного порошка диатомита.

Таким образом, изменение скорости звука в жидких диэлектриках определяется в основном изотропным вкладом:

$$\Delta c_{\text{eff}}^{(0)}/c_{\text{eff}}^{(0)} \approx \Delta P_0/P_0.$$

В заключение кратко остановимся на влиянии переменных электрических полей. Пусть теперь внешнее электрическое поле зависит от времени, например $\mathbf{E} = \sqrt{2}\,\mathbf{E}_0 \cos\Omega t$. Тогда эффективное избыточное давление, деформирующее пузырек, может быть представлено в виде суммы $(\Delta P_0 + \Delta P_0 \cos 2\Omega t)$, где ΔP_0 определяется формулой (5).

Таким образом, во-первых, включение внешнего переменного поля приводит к сдвигу статического уровня давления ΔP_0. Во-вторых, воздействие этого поля на пузырек эквивалентно воздействию на него акустической волны давления с той же амплитудой ΔP_0, но удвоенной частотой. Полученный результат позволяет использовать электрические поля в качестве эффективных возбудителей колебаний пузырьков с целью исследования различного рода нелинейных эффектов, связанных с прохождением звука сквозь такие среды [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nolle A.W.* Electric-field modulation of ultrasonic signals in liquids // J. Appl. Phys. 1949. V. 20. № 6. P. 589–592.
2. *Bonetti A.* Velocita degli ultrasuoni in campo electrico e influenza della temperature // La Ricerca Scientifica. 1948. V. 18. №7. P. 777–780.
3. Электрореологический эффект / Под ред. А.В. Лыкова. Минск: Наука и техника. 1972. 176 с.
4. *Коробко Е.В., Чернобай И.А.* Исследование влияния внешнего электрического поля на распространение ультразвука в электрореологических суспензиях // Инж. физ. журнал. 1985. Т. 48. № 2. С. 219–224.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
7. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.
8. *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.* Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики, 1983. 238 с.
9. *Заболотская Е.А.* Нелинейные волны в жидкости с пузырьками газа // Тр. ИОФАН (нелинейные волновые процессы). 1989. Т. 18. С. 121–165.

Белорусский государственный
университет им. В.И. Ленина

Институт тепло- и массообмена
им. А.В. Лыкова
Академии наук БССР

Поступила в редакцию
04.01.91

S.T. Zavtrak, E.V. Korobko

SOUND WAVE PROPAGATION IN THE LIQUID DIELECTRICS WITH GAS BUBBLES IN THE PRESENCE OF AN ELECTRIC FIELD

It is shown that the action of the external electric fields at the liquid dielectric with the gas bubbles results in the change of its elasticity, monopole oscillations of the gas bubbles and hydrodynamical interaction between them. The theory predicate the elastic anisotropy of such gas–liquid mixture.