АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 5

УДК 534.222.1
© 1991 г.

А.Г. Костерин, Д.В. Шолин

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АМПЛИТУД МОД В ВОЛНОВОДАХ С ОБЪЕМНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В работе исследованы средние значения и функции корреляции амплитуд мод в многомодовом волноводе с объемными случайными неоднородностями показателя преломления в случае, когда распределение поля на источнике описывается одной из собственных функций регулярного волновода. Приведены результаты расчетов для модели подводного звукового канала с каноническим профилем показателя преломления при наличии случайного поля внутренних волн.

В тех случаях, когда для описания волнового поля в многомодовых волноводах со случайными крупномасштабными неоднородностями среды используется модовое представление, важную роль играет решение волнового уравнения, полученное при условии, что распределение поля на источнике задается одной из собственных функций волновода (их совокупность для всех собственных функций образует фундаментальную систему решений). Волновое поле источника с любым другим распределением описывается линейной комбинацией этих решений. Примечательно то, что фундаментальная система решений характеризуется прежде всего свойствами волновода и описывает "в чистом виде" процесс рассеяния на неоднородностях отдельных мод, свойства же источника определяют вклады этих решений в общее волновое поле и коллективные эффекты, связанные с рассеянием в общем случае большого числа возбужденных источником мод. Этим объясняется интерес к изучению фундаментальной системы решений.

В настоящей работе анализируются статистические характеристики фундаментальной системы решений, а также приводятся результаты их расчетов для конкретной модели подводного звукового канала. Для этих целей используется приближенное решение, полученное в работах [1, 2].

Введем в плоскослоистом многомодовом волноводе декартову систему координат (x, y, z) таким образом, чтобы ось z совпадала с направлением изменения регулярной компоненты $n(z)$ показателя преломления среды. Считаем, что зависимость $n(z)$ имеет единственный максимум на оси волновода при $z = 0$ $(n(0) = 1)$. Флуктуационную часть квадрата показателя преломления среды обозначим через $U(x, y, z)$. Распределение поля монохроматического источника частоты ω, расположенного на оси z, будем описывать функцией $f(z)$. Полагая неоднородности $U(x, y, z)$ крупномасштабными, волновое поле $p(x, y, z)$ в плоскости $y = 0$ в малоугловом приближении представим в виде

$$p(x, y = 0, z) = \sum_m \frac{N_m}{\sqrt{x}} A_m(x) \varphi_m(z) e^{ik_m x}. \tag{1}$$

Здесь $A_m(x)$ – амплитуды мод, $\varphi_m(z)$ и k_m – ортонормированные собственные функции и собственные значения регулярной краевой задачи, N_m – нормировочные константы. За счет рассеяния на неоднородностях среды $U(x, y, z)$ амплитуды мод $A_m(x)$ слу-

чайным образом меняются вдоль волновода. При произвольном распределении поля на источнике $f(z)$ их можно рассчитать по формуле

$$A_m(x) = \sum_l f_l A_m^l(x), \tag{2}$$

где $f_l = \int dz f(z)\varphi_l(z)$; $A_m^l(x)$ – решение системы уравнений для амплитуд мод с начальным условием $A_m^l(0) = \delta_{ml}$ (δ_{ml} – символ Кронекера). Физический смысл функции $A_m^l(x)$ заключается в том, что она описывает поведение амплитуды m-й моды для одной из реализаций случайного поля неоднородностей $U(x, y, z)$ при условии, что источник возбуждает только одну моду с номером l.

Статистические моменты поля $p(x, 0, z)$ и амплитуд мод $A_m(x)$ первого и второго порядка выражаются в соответствии с формулами (1), (2) через средние значения $\langle A_m^l(x)\rangle$ и функции корреляции $\langle A_{m_1}^{l_1}(x) A_{m_2}^{*l_2}(x)\rangle$, полученные путем усреднения фундаментальной системы решений $A_m^l(x)$ по ансамблю реализаций неоднородностей $U(x, y, z)$. В настоящей работе мы ограничимся анализом только средних значений $\langle A_m^l(x)\rangle$ и функций корреляции частного вида $\langle A_m^l A_n^{*l}\rangle$ $(l_1 = l_2 = l)$.

Для количественных оценок и численных расчетов ниже будет использована модель подводного звукового канала с каноническим профилем показателя преломления (профиль Манка) [3]

$$n(z) = 1 - \epsilon[\exp(2z/B) - 2z/B - 1],$$

где $\epsilon = 5{,}7 \cdot 10^{-3}$, $B = 10^3$ м. При этом будем считать, что неоднородности среды обусловлены влиянием внутренних волн, статистика которых описывается спектром Гарретта–Манка [3]. Выражение для пространственного спектра неоднородностей $F(\mathbf{q}, z)$ имеет вид

$$F(\mathbf{q}, z) = \frac{\omega_i}{\pi^3} \frac{\langle U^2(z)\rangle}{2N(z)} \frac{q_z^* |q_z| \sqrt{q_x^2 + q_y^2}}{[q_z^2 + (q_z^*)^2][q_x^2 + q_y^2 + (\frac{\omega_i}{N(z)} q_z)^2]^2}, \tag{3}$$

где $\mathbf{q} = \{q_x, q_y, q_z\}$ – волновой вектор, ω_i – инерционная частота, $N(z) = N_0 \exp\{(z - z_п)/B\}$ – частота плавучести, $\langle U^2(z)\rangle = \langle U_0^2\rangle (N(z)/N_0)^3$ – дисперсия неоднородностей, $z_п$ – координата поверхности моря, $q_z^* = j_* \pi N(z)/(BN_0)$. При расчетах использованы следующие значения констант: $\omega_i = 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$, $N_0 = 5{,}3 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$, $\langle U_0^2\rangle = 10^{-6}$, $z_п = 1000$ м, $j_* = 3$. Во всех рассмотренных ниже примерах будем считать, что источник на частоте 300 Гц ($k = 1{,}26$ м) возбуждает единственную моду с номером $l = 170$. Точки заворота этой моды лежат на горизонтах $\underline{z}_m = -2084$ м, $\overline{z}_m = 893$ м. Согласно [3], при указанных значениях параметров задачи на трассах до 300 км описание рассеяния на внутренних волнах можно проводить в рамках приближения геометрической оптики.

В работах [1, 2] показано, что в области применимости геометрической оптики функция $A_m^l(x)$ приближенно равна

$$A_m^l(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} d\nu \exp\{i\beta_l(x, \nu) + i\pi(m - l)\nu\}, \tag{4}$$

где

$$\beta_l(x, \nu) = \frac{k^2}{2k_l} \int_0^x dx' U(x', 0, z_l(x' - \frac{D_l}{2}\nu)) \tag{5}$$

– случайный набег фазы на неоднородностях среды $U(x, y, z)$, рассчитанный вдоль траектории модового луча l-й моды $z = z_l(x - D_l\nu/2)$, D_l – длина цикла осцилляций этого луча, k – волновое число на оси волновода. Модовый луч $z = z_l(x)$ удовлетворяет

закону Снеллиуса $n[z_l(x)]\cos\theta_l(x) = k_l/k$ ($\theta_l(x)$ – угол скольжения луча) и совершает в плоскости $y = 0$ осцилляции между теми же горизонтами заворота, что и l-я мода. При $\nu = 0$ он выходит из верхней точки заворота, при изменении переменной интегрирования ν в (4) луч смещается вдоль оси x как единое целое на расстояние $\Delta x = D_l\nu/2$.

В предположении гауссовой статистики флуктуаций фазы $\beta_l(x, \nu)$ на основании (4), (5) получим следующее выражение для среднего значения $\langle A_m^l(x)\rangle$:

$$\langle A_m^l(x)\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\nu \exp\left\{-\frac{1}{2}d_l(x,\nu) + i\pi(m-l)\nu\right\}. \tag{6}$$

Здесь $d_l(x, \nu) = \langle\beta_l^2(x, \nu)\rangle$ – дисперсия случайной фазы $\beta_l(x, \nu)$. Будем считать, что флуктуации показателя преломления $U(x, y, z)$ статистически однородны вдоль волновода. В этом случае дисперсия $d_l(x, \nu)$ обладает следующим свойством:

$$d_l(x,\nu) = d_l(x - ND_l, \nu) + Nd_l, \quad ND_l < x \leqslant (N+1)D_l, \quad N = 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Здесь d_l – дисперсия фазы на длине цикла D_l (от ν не зависит). В соответствии с (7) среднее значение $\langle A_m^l(x)\rangle$ при любом $x > D_l$ связано со средним значением $\langle A_m^l(x - ND_l)\rangle$, рассчитанным в пределах первого цикла D_l, соотношением

$$\langle A_m^l(x)\rangle = \langle A_m^l(x - ND_l)\rangle \exp\left\{-Nd_l/2\right\}, \tag{8}$$

из которого следует, что форма зависимости $\langle A_m^l(x)\rangle$ от длины трассы x и номера m повторяется на каждом цикле, а абсолютная величина средних $\langle A_m^l(x)\rangle$ уменьшается от цикла к циклу в $\exp\left\{d_l/2\right\}$ раз.

Влияние неоднородностей на поведение средних значений $\langle A_m^l(x)\rangle$ проявляется двояко. Во-первых, средние значения экспоненциально затухают за счет перекачки энергии упорядоченной компоненты решения $A_m^l(x)$ в его неупорядоченную (флуктуационную) часть. Масштаб затухания (длина экстинкции) примерно равен $L = 2D_l d_l^{-1}$. Во-вторых, на некоторых участках трассы могут в общем случае появляться ненулевые средние значения у тех амплитуд мод, которые не были первоначально возбуждены источником (аналогичное явление наблюдается и при возбуждении мод точечным источником [4]). Появление упомянутых ненулевых средних обязано зависимости дисперсий $d_l(x, \nu)$ от положения на оси x модового луча, вдоль которого она рассчитана (т.е. от переменной ν), и обусловлено неравномерным затуханием когерентных компонент двух волн Бриллюэна, образующих при $x = 0$ l-ю моду и прошедших через неоднородности с различающимися статистическими свойствами.

Ясно, что среднее значение $\langle A_m^l(x)\rangle$ при $m \neq l$ будет сравнимо с $\langle A_l^l(x)\rangle$, если только максимальная разность дисперсий $|d_l(x, \nu_1) - d_l(x, \nu_2)|$ для ν_1 и ν_2 из интервала $[-1;\ 1]$ больше единицы. Только в этом случае появление средних $\langle A_m^l(x)\rangle$ ($m \neq l$) необходимо принимать во внимание. Для определения числа мод с ненулевым средним значением можно воспользоваться формулой

$$\Delta m_{\text{ср}} = \frac{\sum\limits_m |\langle A_m^l(x)\rangle|^2}{|\langle A_l^l(x)\rangle|^2} = 2\,\frac{\int\limits_{-1}^{1} d\nu e^{-d_\nu(x,\nu)}}{\left[\int\limits_{-1}^{1} d\nu e^{-d_l(x,\nu)/2}\right]^2}. \tag{9}$$

Величина $\Delta m_{\text{ср}}$ меняется периодически по трассе от единицы (на расстояниях $x = ND_l$, кратных длине цикла D_l, поскольку на этих расстояниях $d_l(ND_l, \nu) = Nd_l = \text{const}$, до некоторого максимального значения $\Delta m_{\text{ср}}^{\max}$.

Оценим $\Delta m_{\text{ср}}^{\max}$ для описанной выше модели подводного звукового канала. На рис.1 представлен график зависимости дисперсии $d_l(x, \nu)$ от переменной ν для различных

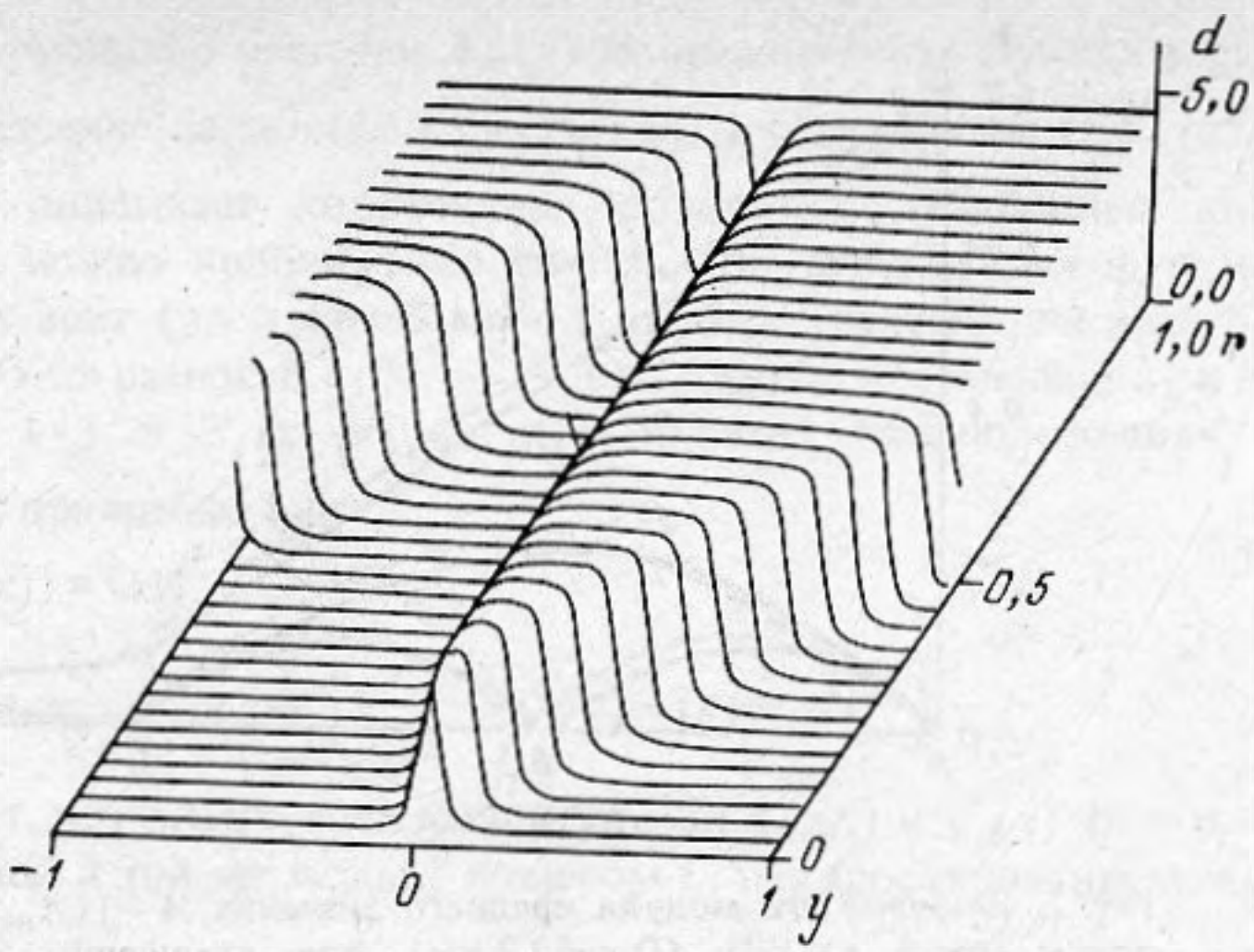

Рис. 1. Зависимость дисперсии $d = d_l(x, \nu)$ от переменной ν и длины трассы $r = x/D_l$ ($D_l = 52{,}2$ км)

дистанций из интервала $0 < x < D_l$. Значения дисперсий при $x > D_l$ можно получить, используя свойство (7). Наибольший вклад в дисперсию дают неоднородности показателя преломления $U(x, y, z)$, расположенные в окрестности верхних точек заворота модовых лучей, поскольку там неоднородности особенно сильны [3, 4]. Это приводит к зависимости дисперсии от переменной ν, причем диапазон изменения дисперсии при фиксированном x больше единицы. Оценка величины $\Delta m_{\text{ср}}^{\max}$ с помощью формулы (9) дает $\Delta m_{\text{ср}}^{\max} = 7$. Представленные на рис. 1 результаты использованы для вычисления средних значений $\langle A_m^l(x)\rangle$ по формуле (6). На рис. 2 сплошной линией изображены зависимости $|\langle A_m^l(x)\rangle|$ от расстояния x для $|m - l| = 0, 1, 2$. Как видим, величина средних $|\langle A_m^l(x)\rangle|$ при $m \neq l$ осциллирует не только от цикла к циклу, но и в пределах одного цикла. В нашем примере, учитывая скачкообразный характер поведения дисперсии и описывая ее на этом основании ступенчатой функцией, удается получить приближенное аналитическое выражение для средних значений $\langle A_m^l(x)\rangle$:

$$\langle A_m^l(x)\rangle = (A_l)^N \left[(1 - A_l)\eta \frac{\sin \pi(m - l)\eta}{\pi(m - l)\eta} e^{i\pi(m-l)\eta} + A_l \delta_{ml}\right], \tag{10}$$

где $A_l = \langle A_l^l(D_l)\rangle = e^{-d_l/2}$, $\eta = 1 - (x - ND_l)/D_l$. Приближенная формула (10) достаточно точно описывает поведение значений $\langle A_m^l(x)\rangle$ для номеров m, близких к l (см. рис. 2, пунктирная линия).

Перейдем к анализу корреляционной функции $\langle A_m^l(x) A_n^{*l}(x)\rangle$

$$\langle A_m^l A_n^{*l}\rangle = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int d\nu_1 d\nu_2 \exp\left\{-\frac{1}{2} S_l(x, \nu_1, \nu_2) + i\pi(m - l)\nu_1 - i\pi(n - l)\nu_2\right\}, \tag{11}$$

где $S_l(x, \nu_1, \nu_2) = \langle(\beta_l(x, \nu_1) - \beta_l(x, \nu_2))^2\rangle$ – структурная функция флуктуаций фазы. Физический смысл функции $\langle A_m^l(x) A_n^{*l}(x)\rangle$ заключается в том, что она описывает корреляцию амплитуд мод с номерами m и n в случае, когда источник возбуждает только одну моду с номером l, при этом функция $\langle |A_n^l(x)|^2\rangle$ характеризует распределение энергии по модам. Так как в общем случае источник может возбуждать не одну моду, в дальнейшем это распределение будем называть парциальным энергетическим спект-

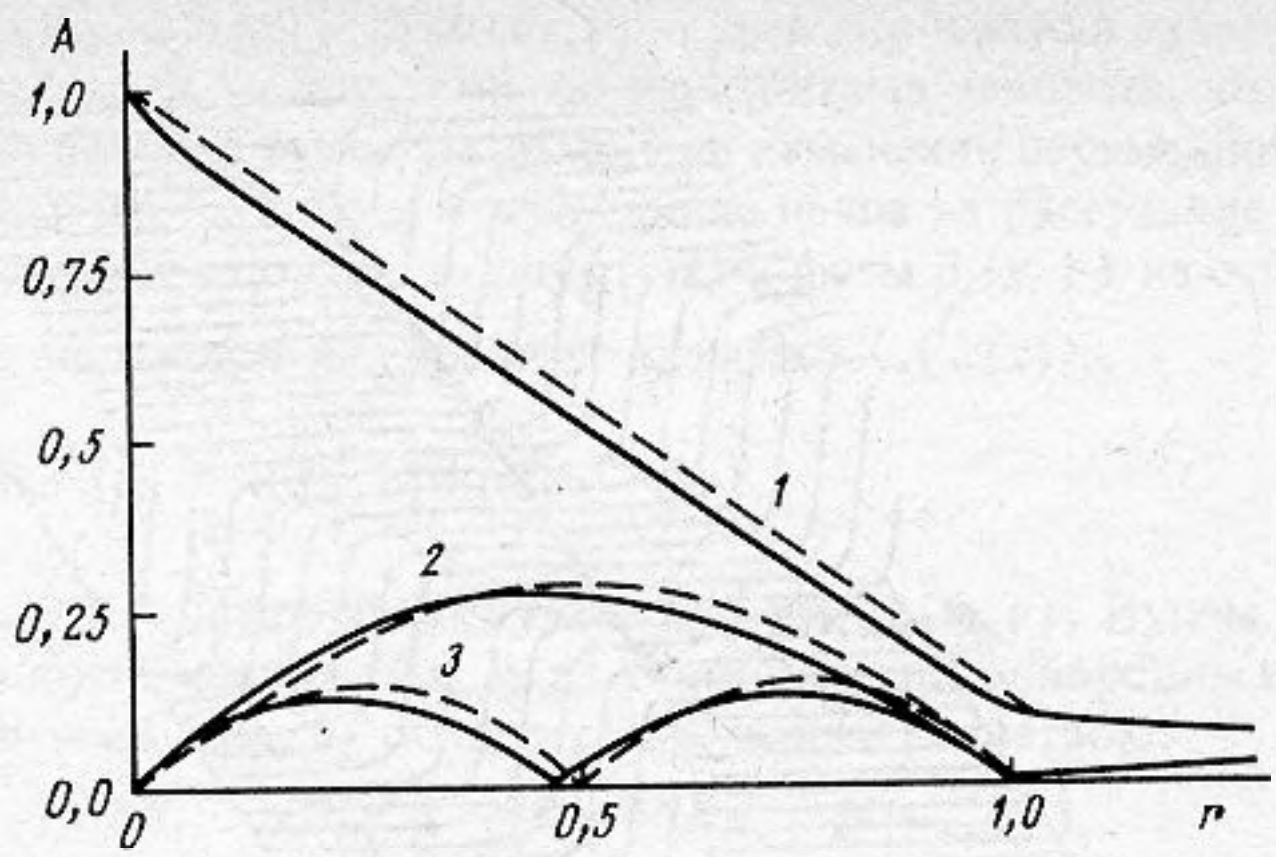

Рис. 2. Зависимость модуля среднего значения $A = |\langle A_m^l(x)\rangle|$ от длины трассы $r = x/D_l$ ($D_l = 52{,}2$ км) для следующих номеров мод: $1 - m = 170$, $2 - m = 171$, $3 - m = 172$, $l = 170$. Сплошной линией показаны результаты расчетов по формуле (6), пунктиром – по формуле (10)

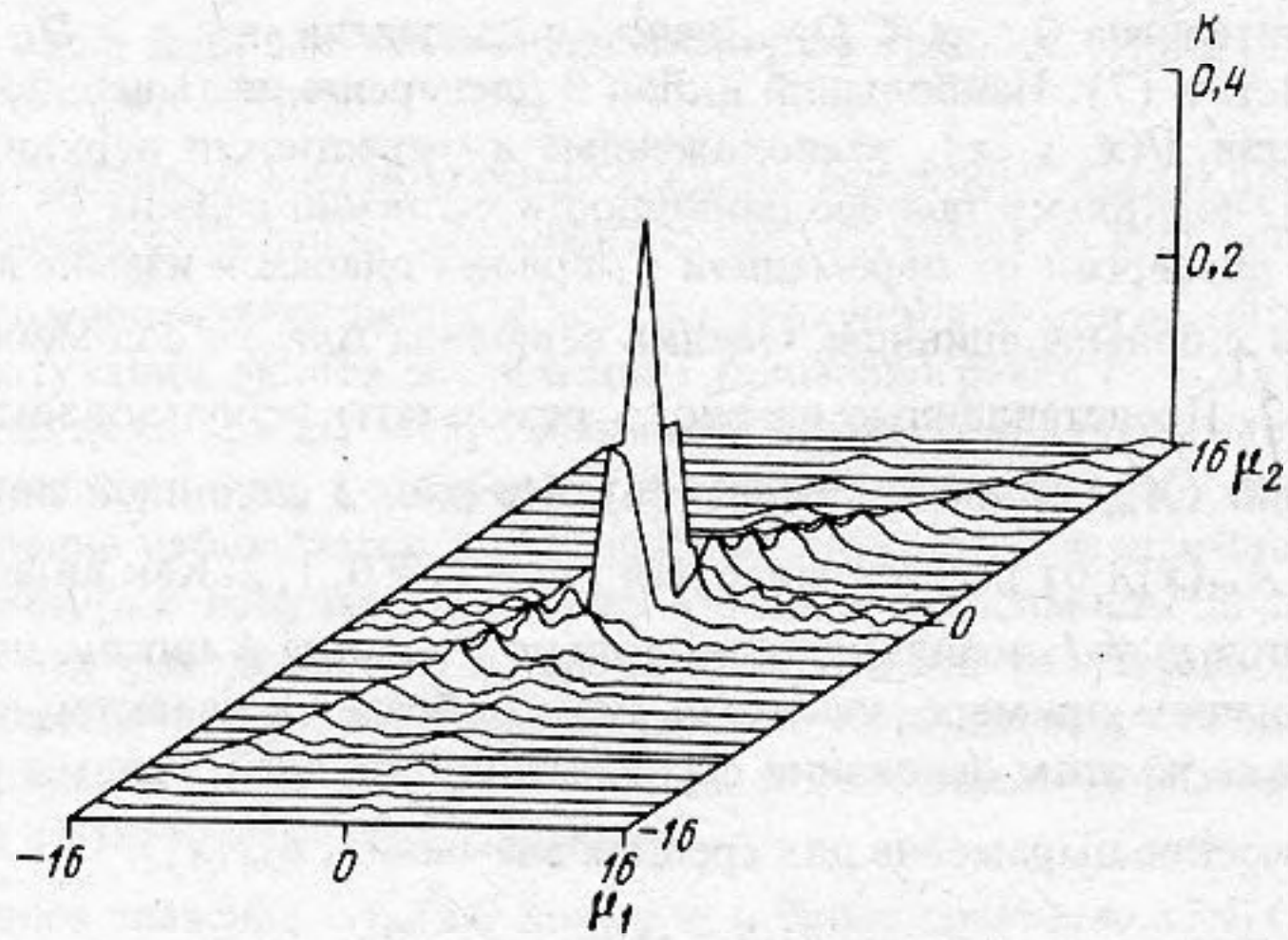

Рис. 3. Зависимость корреляционной матрицы $K = |\langle A_m^l(x) A_n^{*l}(x)\rangle|$ от номеров мод $\mu_1 = m - l$, $\mu_2 = n - l$ на дистанции $x = D_l/2$ ($D_l = 52{,}2$ км)

ром, в отличие от полного энергетического спектра $\langle |A_m(x)|^2\rangle$, где функция $A_m(x)$ определена соотношением (2).

Рассмотрим корреляционную функцию $\langle A_m^l(x) A_n^{*l}(x)\rangle$ в двух предельных случаях. Наиболее сложный вид функция $\langle A_m^l(x) A_n^{*l}(x)\rangle$ имеет на расстояниях $x \lesssim L$, когда каждое решение $A_m^l(x)$ содержит как регулярную $\langle A_m^l(x)\rangle$, так и флуктуационную $A_m^l(x) - \langle A_m^l(x)\rangle$ компоненты. Общий анализ в этом случае затруднен, поэтому здесь мы приведем лишь результаты расчетов функции $\langle A_m^l(x) A_n^{*l}(x)\rangle$ для конкретной модели подводного звукового канала (см. рис. 3). Отметим, что основные особенности в поведении корреляционной функции связаны с наличием ненулевых средних значений $\langle A_m^l(x)\rangle$, анализ которых проведен выше.

Новую информацию о решении $A_m^l(x)$ корреляционная функция дает на расстояниях $x > L$, когда решение полностью перестает быть регулярным ($\langle A_m^l(x)\rangle = 0$) и функция $\langle A_m^l(x) A_n^{*l}(x)\rangle$ описывает корреляцию только флуктуационных компонент $A_m^l(x)$. В этом случае можно приближенно считать, что структурная функция $S_l(x, \nu_1, \nu_2)$ существенно зависит (по крайней мере в наиболее важной для интегрирования в (11) области) только от разности $\nu_1 - \nu_2$, а не от каждой переменной ν_1 и ν_2 в отдельности, т.е. $S_l(x, \nu_1, \nu_2) = S_l(x, \nu_1 - \nu_2)$. В этих предположениях выражение для $\langle A_m^l(x) A_n^{*l}(x)\rangle$ принимает вид

$$\langle A_m^l(x) A_n^{*l}(x)\rangle = \langle |A_m^l(x)|^2\rangle \delta_{mn},$$
$$\langle |A_m^l(x)|^2\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\nu \exp\left\{-\frac{1}{2} S_l(x, \nu) + i\pi(m - l)\nu\right\}. \tag{12}$$

Из (12) следует, что флуктуации амплитуд мод $A_m^l(x)$ и $A_n^l(x)$ $(n \neq m)$, обусловленные рассеянием одной и той же моды с номером l, некоррелированы между собой. Анализ корреляционной функции $\langle A_m^l(x) A_n^{*l}(x)\rangle$ сводится теперь к изучению парциального энергетического спектра $\langle |A_m^l(x)|^2\rangle$.

Для количественного описания процесса энергообмена между модами на основе парциального энергетического спектра $\langle |A_m^l(x)|^2\rangle$ введем безразмерный параметр $\Delta\nu$, который определим с помощью равенства $S_l(x, \Delta\nu) = 2$. В принятых нами предположениях $(x > L)$ параметр $\Delta\nu$ меньше единицы и по существу задает область интегрирования в (12). Смысл параметра $\Delta\nu$ в том, что он определяет энергию исходной l-й моды. Действительно, энергия $\langle |A_l^l(x)|^2\rangle$ l-й моды равна (при $x = 0$ $\langle |A_l^l(0)|^2\rangle = 1$)

$$\langle |A_l^l(x)|^2\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\nu e^{-S_l(x,\nu)/2} \simeq \Delta\nu(x). \tag{13}$$

Из закона сохранения энергии и формулы (13) следует, что энергия, переносимая всеми остальными модами, равна $\sum_{m \neq l} \langle |A_m^l(x)|^2\rangle = 1 - \Delta\nu(x)$. Число таких мод ΔM также характеризуется параметром $\Delta\nu$. Определяя величину ΔM из энергетических соображений, получим

$$\Delta M(x) = \frac{\sum_m \langle |A_m^l(x)|^2\rangle}{\langle |A_l^l(x)|^2\rangle} = \Delta\nu^{-1}(x).$$

Таким образом, величина $\Delta\nu$ задает основные параметры парциального энергетического спектра $\langle |A_m^l(x)|^2\rangle$. Форма парциального энергетического спектра и зависимость параметра $\Delta\nu$ от длины трассы x определяется конкретным видом структурной функции фазы. При этом следует иметь в виду, что все три зависимости (а именно $S_l(x, \nu)$ от ν, $\Delta\nu$ от x, $\langle |A_m^l(x)|^2\rangle$ от $m - l$) жестко связаны между собой. Поясним это утверждение. Поскольку усредненное на длине цикла D_l расстояние между модовыми лучами с различными параметрами ν_1 и ν_2 не меняется вдоль трассы, то при большой величине дисперсии $d_l(x, \nu) \gg 1$ структурную функцию можно представить в виде $S_l(x, \nu) \simeq$ $\simeq (x/D_l) S_l(D_l, \nu) = (x/D_l) s(\nu)$, где $s(\nu) = S_l(D_l, \nu)$. Вид зависимости $s(\nu)$, согласно (12), определяет форму парциального энергетического спектра. Эта форма остается неизменной по трассе. В соответствии с определением параметра $\Delta\nu$ имеем $\Delta\nu(x) =$ $= s^{-1}(2D_l/x)$, где $s^{-1}(\ )$ – функция обратная к $s(\ )$. Таким образом, вид структурной функции $S_l(x, \nu)$, форма парциального энергетического спектра, а также зависимость от длины трассы параметра $\Delta\nu$ (а значит, энергия l-й моды $\langle |A_l^l(x)|^2\rangle = \Delta\nu$ и ширина

парциального энергетического спектра $\Delta M(x) = \Delta\nu^{-1}(x)$) определяются одной функцией $s(\nu)$.

Предположим, что на расстоянии $x > L$ структурная функция в области $\nu < \Delta\nu$ квадратична, т.е. $S_l(x, \nu) = (x/D_l)\, s''\nu^2/2$ $(s'' = (d^2 s(\nu)/d\nu^2)|_{\nu=0})$. Тогда выражение для парциального энергетического спектра имеет вид

$$\langle |A_m^l(x)|^2 \rangle = \langle |A_l^l(x)|^2 \rangle \exp\left\{-\frac{(m-l)^2}{\Delta m^2(x)}\right\}, \tag{14}$$

где

$$\langle |A_l^l(x)|^2 \rangle = [\pi D_l/(xs'')]^{1/2}, \tag{14а}$$

$$\Delta m^2(x) = xs''/(\pi^2 D_l), \qquad \Delta m^2(x) = \frac{4}{\pi^2}\Delta M^2(x). \tag{14б}$$

Поскольку в этом примере $s(\nu) \sim \nu^2$, то с увеличением длины трассы x энергия l-й моды $\langle |A_l^l(x)|^2 \rangle$ убывает как $x^{-1/2}$, а ширина парциального энергетического спектра Δm растет по закону $\sqrt{x}$. Энергия фиксированной m-й моды $(m \neq l)$ вначале растет, на расстоянии $x^* = 2\pi^2(m-l)^2 D_l/s''$ достигает своего максимума, а затем убывает за счет перекачки энергии в более удаленные от l-й моды.

Для структурной функции $S_l(x, \nu) = (x/D_l)s''\nu^2/2$ выражение (14б) для ширины парциального энергетического спектра имеет простую интерпретацию. Можно показать, что величина Δm с точностью до постоянного множителя равна среднеквадратичному значению флуктуаций углов прихода волн Бриллюэна l-й моды, найденному в приближении геометрической оптики [3, 5, 6].

В ряде работ [7, 8] для расчета энергетических спектров мод эффективно используется уравнение переноса излучения в диффузионном приближении, которое для нашей задачи можно записать в виде

$$\frac{\partial \langle |A_m^l|^2 \rangle}{\partial x} = \sigma_l \frac{\partial^2 \langle |A_m^l|^2 \rangle}{\partial m^2}, \tag{15}$$

где σ_l – коэффициент диффузии, который связан, как нетрудно показать, со структурной функцией соотношением $\sigma_l = s''/(4\pi^2 D_l)$. Очевидно, для рассмотренной квадратичной модели структурной функции выражение (14) является точным решением диффузионного уравнения (15), при этом $\Delta m^2(x) = 4\sigma_l x$, $\langle |A_l^l(x)|^2 \rangle = (4\pi\sigma_l x)^{-1/2}$. Однако при иной структурной функции энергетический спектр, рассчитанный по формуле (12), будет отличаться от энергетического спектра, полученного в диффузионном приближении с помощью уравнения (15). Дело в том, что диффузионное приближение, использованное при выводе уравнения (15), по существу эквивалентно замене в выражении (12) истинной структурной функции $s(\nu)$ одним квадратичным членом $s''\nu^2/2$ в ее разложении в ряд Тейлора.

Обсудим на примере выбранной модели подводного звукового канала, к чему приводит такая замена структурной функции. Для неоднородностей, описываемых спектром (3), структурная функция $s(\nu)$ в области малых ν имеет вид $s(\nu) = s_0\nu^2[c - \ln\nu]$ [3], где c и s_0 – некоторые константы. Особенность этой структурной функции заключается в том, что величина s'' (а следовательно, и коэффициент диффузии σ_l) обращается в бесконечность вследствие медленного (степенного) убывания спектра (3) в области больших волновых чисел. Поэтому для того, чтобы сделать возможным применение диффузионного приближения, спектр внутренних волн (3) необходимо каким-то образом "подправить". В работах [3, 7, 9], например, спектр обрезают в области больших волновых чисел $q_z > q_z^{\max} = 870 q_z^*$ (см. также [8]). Отметим, что обрезание спектра на столь высоких пространственных частотах сильно влияет на значение производной s'', но практически не сказывается на значении самой структурной функции. В итоге коэффициент диффузии принимает ко-

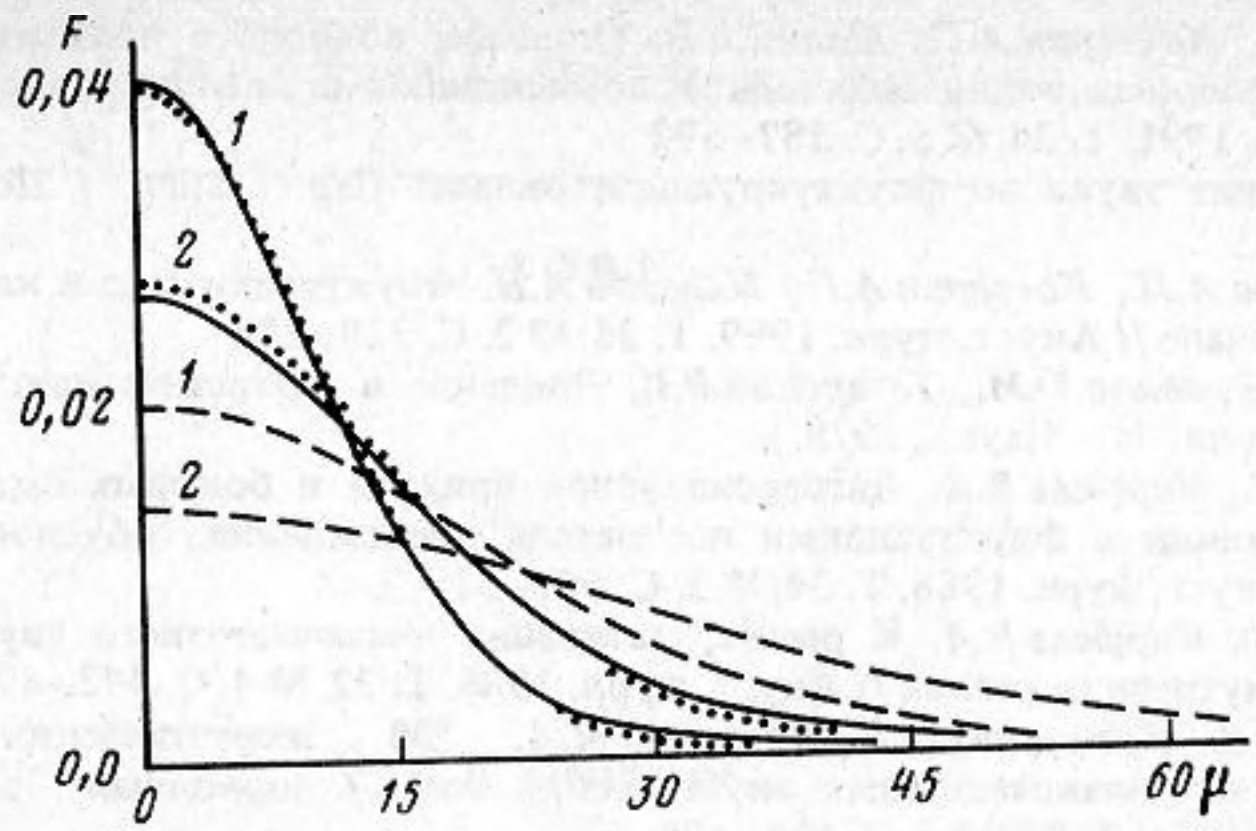

Рис. 4. Парциальные энергетические спектры $F = \langle |A_m^l(x)|^2 \rangle$ $\mu = m - l$, рассчитанные по формуле (12), – сплошная линия, по формуле (14) с коэффициентом диффузии $\sigma_l = 1{,}67 \cdot 10^{-3}\,\text{м}^{-1}$ – пунктирная линия, по формуле (14) с коэффициентом диффузии $\sigma_l = 0{,}46 \cdot 10^{-4}\,\text{м}^{-1}$ – точки. Кривые *1* рассчитаны для дистанции $2D_l$, кривые *2* – $4D_l$ ($D_l = 52{,}2$ км)

нечное значение (см. [7]), равное $\sigma_l = 1{,}67 \cdot 10^{-3}\,\text{м}^{-1}$ (как и раньше $l = 170$). Это значение σ_l использовалось при вычислении энергетических спектров в диффузионном приближении по формуле (14). Результаты расчета для двух дистанций x: $x = 2D_l$, $4D_l$ ($D_l = 52{,}2$ км) изображены на рис. 4 пунктиром. На том же рисунке сплошной линией показаны графики энергетических спектров, найденные по формуле (12). Структурная функция $S_l(x, \nu)$ рассчитывалась численно с помощью формул, приведенных в работах [4, 10]. Сравнение этих графиков свидетельствует о том, что диффузионное приближение дает завышенное (примерно в 2 раза) значение ширины энергетического спектра и заниженное – спектра в нуле $\langle |A_l^l(x)|^2 \rangle$. Таким образом, обрезание спектра (3) в области больших пространственных частот хотя формально и делает возможным применение диффузионного приближения, но приводит к значительным ошибкам. Следует иметь в виду, что вопрос о точности диффузионного приближения требует особого рассмотрения во всех случаях, когда спектр неоднородностей имеет степенной характер.

В заключение попытаемся все же описать энергетический спектр формулой (14), подбирая при этом соответствующим образом значения параметров $\langle |A_l^l(x)|^2 \rangle$ и $\Delta m^2(x)$. Для этого аппроксимируем рассчитанную структурную функцию $s(\nu)$ параболой $a\nu^2/2$, а коэффициент a выберем из условия максимальной близости $s(\nu)$ и $a\nu^2/2$ в интервале ν, где $s(\nu) < 2D/x$. Подставляя в (14) полученное таким образом значение a вместо s'', получим энергетические спектры, графики которых показаны на рис. 4 точками. Видно, что истинные энергетические спектры имеют форму, близкую к гауссовой, но с более медленным законом спадания спектра при больших разнесениях $|m - l|$. Физически этот медленный спад связан с рассеянием на большие углы на неоднородностях с малыми масштабами, влияние которых при степенном виде спектра оказывается существенным. Отметим, что близость значений a и s'', по-видимому, может служить одним из критериев применимости диффузионного приближения.

Авторы благодарны А.Н. Малахову за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вировлянский А.Л., Костерин А.Г., Шолин Д.В.* Лучевой подход при описании флуктуаций мод в случайно-неоднородных волноводах // Волны и дифракция-90. М.: Физическое общество СССР, 1990. С. 377–380.

2. *Малахов А.Н., Костерин А.Г., Шолин Д.В.* Описание волнового поля распределенного источника в многомодовых волноводах с крупномасштабными неоднородностями // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. № 5. С. 587–592
3. Распространение звука во флуктуирующем океане: Пер. с англ. / Под ред. Флатте С.М. М.: Мир, 1982.
4. *Вировлянский А.Л., Костерин А.Г., Малахов А.Н.* Флуктуации мод в каноническом подводном звуковом канале // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 2. С. 229–235.
5. *Рытов С.М., Кравцов Ю.М., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978.
6. *Сазонтов А.Г., Фарфель В.А.* Дисперсия углов прихода и боковых смещений лучей в океаническом волноводе с флуктуациями показателя преломления, обусловленными внутренними волнами // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 3. С. 507–515.
7. *Сазонтов А.Г., Фарфель В.А.* К расчету затухания низкочастотного звука в океане при рассеянии на внутренних волнах // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 4. С. 492–498.
8. *Артельный В.В., Кукушкин В.Д., Раевский М.А.* Об энергетических и корреляционных характеристиках низкочастотных акустических волн в подводных звуковых каналах // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 4. С. 492–498.
9. *Garrett C., Munk W.H.* Space-time scales of internal waves: a progress report // J. Geophys. Res. 1975. V. 80. P. 291–296.
10. *Esswein R., Flatte S.* Calculation of the phase-structure function density from oceanic internal waves // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 70. № 5. P. 1387–1396.

Нижегородский госуниверситет
им. Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию
14.01.91

A.B. Kosterin, D.V. Sholin

ANALYSIS AND CALCULATION OF STATISTICAL CHARACTERISTICS OF MODE AMPLITUDES IN WAVEGUIDES WITH VOLUME RANDOM INHOMOGENEITIES

Average values and correlation functions of mode amplitudes in multimode waveguides with volume random inhomogeneities of refractive index are investigated. The case of single regular eigen function distribution on the source is considered. The common properties of the range dependence of average mode amplitudes are investigated. The spacial statistical inhomogeneity is shown to result in appearance at some distances nonzero average amplitudes of those modes, which have not been excited by the source. It is established that the correlation of fluctuation components of the mode amplitudes (in case of one excited mode) is negligibly small. At the distance over attenuation length of average value of mode amplitudes the energy spectrum is studied. The connection between energy spectrum shape, spectrum main characteristics and phase structure function calculated on the basis of data about inhomogeneities along mode rays is established. Computation results for average values and correlation function of mode amplitudes for underwater sound channel model with Munk porfile of refractive index and with random internal waves field are given. The possibility of using of the diffusive approach for calculation of the energy spectra of amplitudes of modes scattered on the medium inhomogeneities with the power spacial spectrum is discussed.