

УДК 534.2

© 1991 г.

В.И. Павлов, О.А. Харин, С.В. Холодова

**ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН
ИСТОЧНИКОМ, ДВИЖУЩИМСЯ ВБЛИЗИ ЛОКАЛЬНО РЕАГИРУЮЩЕЙ
ПОВЕРХНОСТИ**

Изучен спектральный состав интенсивности переходного излучения акустических волн источником, движущимся вблизи локально реагирующей поверхности. Оценен интегральный выход в зависимости от скорости движения источника.

Цель настоящей работы — получить количественные характеристики излучения акустических волн, возникающего при движении массового (или теплового) источника в однородной среде вблизи локально реагирующей поверхности, характеризуемой импедансом $Z(x)$.

Будем интересоваться дозвуковым режимом движения источника. Излучение Вавилова—Черенкова тогда отсутствует, и зависимость от координаты импеданса является в этом случае единственной причиной возникновения излучения. Рассматриваемая задача относится к кругу задач о переходном излучении [1].

Геометрия задачи изображена на рис. 1: ось Oz направлена вертикально вверх от поверхности, в плоскости которой расположены оси xOy . Источник движется с постоянной скоростью $v = Mc$ (c — скорость звука) вдоль оси Ox на высоте H .

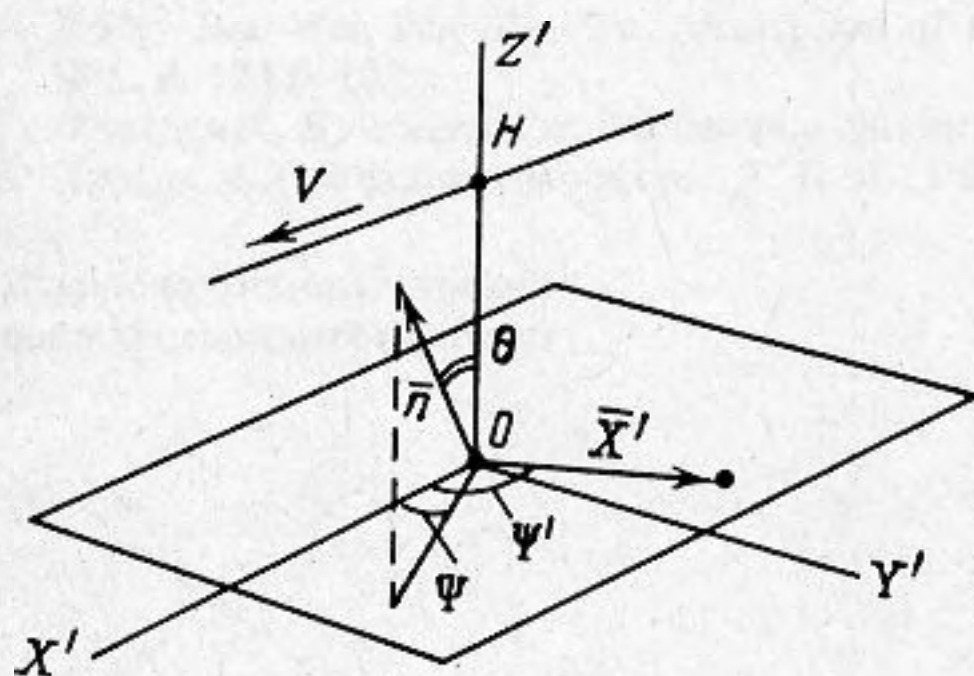


Рис. 1. Геометрия задачи. Источник движется с постоянной скоростью вдоль оси Ox над локально-реагирующей поверхностью, расположенной в плоскости xOy

Система уравнений, описывающих движение среды в линейном приближении, может быть приведена к уравнению для фурье-компоненты потенциала скоростей Φ

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = \frac{Q}{v} \delta^{(1)}(y) \delta^{(1)}(z - H) \exp\left\{-i \frac{k}{M} x\right\} \quad (1)$$

с граничным условием

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} + i \frac{k}{Z(x)} \Phi \Big|_{z=0} = 0. \quad (2)$$

Здесь $Q = \frac{Q_1}{\rho_0}$, Q_1 — секундный расход массы, ρ_0 — равновесная плотность среды, $k = \frac{\omega}{c}$.

Решение уравнения (1) с граничным условием (2) будем искать, представив Φ в виде разложения по некоторому малому параметру, пропорциональному Z^{-1} : $\Phi = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \dots$, где $\Phi^{(n)} \sim Z^{-n}$, $|Z| \gg 1$.

В приближении, соответствующем жесткой поверхности ($Z^{-1} = 0$), имеем следующий результат:

$$\Phi^{(0)} = \frac{Q}{2\pi v} \exp\left\{-i \frac{kx}{M}\right\} [K_0(q \sqrt{y^2 + (z-H)^2}) + K_0(q \sqrt{y^2 + (z+H)^2})].$$

Здесь K_0 — функция Макдональда нулевого порядка, $M = \frac{v}{c} < 1$, $q = k(1/M^2 - 1)^{1/2}$.

В рассматриваемом случае ($Imq = 0$) при $\eta \gg 1$ функция $K_0(\eta) \sim \left(\frac{\pi}{2\eta}\right) \exp\{-\eta\}$, т.е.

возмущения среды, не носят волновой характер.

Излучение возникает в следующем порядке и обуславливается отличием от нуля параметра $Z^{-1}(x)$

$$\Delta \Phi^{(1)} + k^2 \Phi^{(1)} = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= -\frac{ik}{Z(x)} \Phi^{(0)} \Big|_{z=0} = \\ &= -\frac{ik}{\pi v} \frac{Q}{Z(x)} \exp\left\{-i \frac{k}{M} x\right\} K_0(q \sqrt{y^2 + H^2}). \end{aligned} \quad (4)$$

Решение системы (4) легко выписывается с помощью функции Грина второй краевой задачи, а именно

$$\Phi^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} d\sigma' \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z'} \Big|_{z'=0} \frac{\exp\{-ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (5)$$

где интегрирование ведется по плоскому xOy .

Если L_1 — характерный размер области, где $\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z'} \Big|_{z'=0}$ отлична от нуля, то в волновой зоне ($|\mathbf{x}| \gg L_1, |\mathbf{x}| \gg kL_1^2$) можно записать приближенно

$$\Phi^{(1)} \simeq \frac{\exp -ik|\mathbf{x}|}{|\dot{\mathbf{x}}|} \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} d\sigma' \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z'} \Big|_{z=0} \exp\{ik \mathbf{n} \mathbf{x}\}. \quad (6)$$

Здесь \mathbf{n} — единичный вектор в направлении наблюдения.

Воспользовавшись выражением (4), получаем для амплитуды излучения следующую формулу:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{n}) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int d\Sigma' \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z'} \Big|_{z'=0} \exp\{ik \mathbf{n} \mathbf{x}'\} = \\ &= -\frac{ikQ}{2\pi^2 v} \int dx' dy' \frac{1}{Z(\mathbf{x}')} K_0[q \sqrt{(y')^2 + H^2}] \times \\ &\times \exp\left\{ik \mathbf{n} \mathbf{x}' - i \frac{k}{M} x'\right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Запишем $x' = e_1 x + e_2 y'$, где $e_i, i = 1, 2$, — единичные векторы, ориентированные вдоль осей системы координат. Тогда

$$n x' = (n e_1) x' + (n e_2) y'.$$

Рассмотрим случай, когда импеданс $Z(x)$ зависит только от одной координаты x' . Это модельное приближение позволяет оценить интеграл (7). Поскольку переменные x' и y' в этом случае разделяются, то получаем

$$F = - \frac{ikQ}{2\pi^2 v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{Z(x')} \exp \left\{ ik \left[(n e_1) - \frac{1}{M} \right] x' \right\} \cdot 2 \int_0^{\infty} dy' K_0 \left(q \sqrt{(y')^2 + H^2} \cos(n e_2) y' \right).$$

Интеграл по y' является табличным [2] и амплитуда излучения тогда равна

$$F = - \frac{ikQ}{2\pi v} \frac{\exp H \{ \sqrt{q^2 + k^2 (n e_2)^2} \}}{\sqrt{q^2 + k^2 (n e_2)^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{Z(x')} \exp \left\{ ik \left[(n e_1) - \frac{1}{M} \right] x' \right\}. \quad (8)$$

Интеграл, стоящий в правой части соотношения (8), обозначим через \mathcal{L} . Этот параметр, имеющий размерность длины, определяет длину формирования излучения [1]. Его конкретное значение может быть определено лишь после задания распределения $Z^{-1}(x)$.

Можно показать [1], что угловое распределение спектральной плотности энергии излучения однозначно определяется величиной F , т.е.

$$\epsilon_{n, \omega} = \frac{1}{\pi} \omega^2 \frac{\rho_0}{c} |F|^2, \quad (9)$$

причем полная излучаемая энергия определяется интегралом

$$\epsilon_{n, \omega} = \int_0^{\infty} d\omega \int d\Omega \epsilon_{n, \omega}.$$

Подставляя в (9) соотношение (8), получаем

$$\epsilon_{n, \omega} = \frac{\rho_0 Q^2}{4\pi^3} \frac{1}{c^3} \frac{\omega^2}{M^2} \times \frac{\exp \{-2kH \sqrt{(1/M^2 - 1) + (n e_3)^2}\}}{|(1/M^2 - 1) + (n e_2)^2|} |\mathcal{L}|^2. \quad (10)$$

Напомним, что размерность величины $[Q] = L^3 T^{-1}$. Удобно ввести обозначения

$$\beta_1^2 = \frac{1}{M^2} - 1 + \sin^2 \theta \sin^2 \Psi, \quad \beta_2 = \frac{1}{M} - \sin \Theta \cos \Psi.$$

Тогда

$$\epsilon_{n, \omega} = \frac{\rho_0 Q^2}{4\pi^3 c^3} \frac{\omega^2}{M^2} \frac{\exp\{-2kH \beta_1\}}{\beta_1^2} |\mathcal{L}(-k\beta_2)|^2. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь случай, когда источник движется над поверхностью, импеданс которой является случайной функцией, определяемой условием

$$\langle Z^{-1}(x') Z^{-1}(x'') \rangle = \sigma^2 \hat{R}(x' - x''), \quad \hat{R}(0) = 1, \quad (12)$$

где σ^2 — дисперсия. Тогда, усредняя (11), получаем

$$\langle \epsilon_{n, \omega} \rangle = \epsilon_0 \frac{\omega^2 \exp\{-2kH\beta_1\}}{M^2 \beta_1^2} \sigma^2 \int dx' dx'' \cdot R(x' - x'') \exp -ik\beta_2(x' - x''), \quad (13)$$

$$\epsilon_0 \equiv \rho_0 Q^2 / 4\pi^3 c^3.$$

Вводя новые переменные: $x' - x'' = r$, $(x' + x'')/2 = R$ и учитывая, что источник движется с постоянной скоростью v , для спектральной плотности излучения в направлении n имеем следующий результат:

$$\langle \dot{\epsilon}_{n, \omega} \rangle = \dot{\epsilon}_0 \frac{k^2 \exp\{-2kH\beta_1\}}{M \beta_1^2} \Sigma^2 \hat{R}(k\beta_2), \quad (14)$$

где $\dot{\epsilon}_0 = \frac{\rho_0 Q^2}{4\pi^3}$, $\hat{R}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \hat{R}(\xi) e^{-i\mu\xi}$ — действительная функция, если $\hat{R}(\xi) = \hat{R}(-\xi)$.

Основные свойства диаграммы направленности излучения видны из рис. 2.

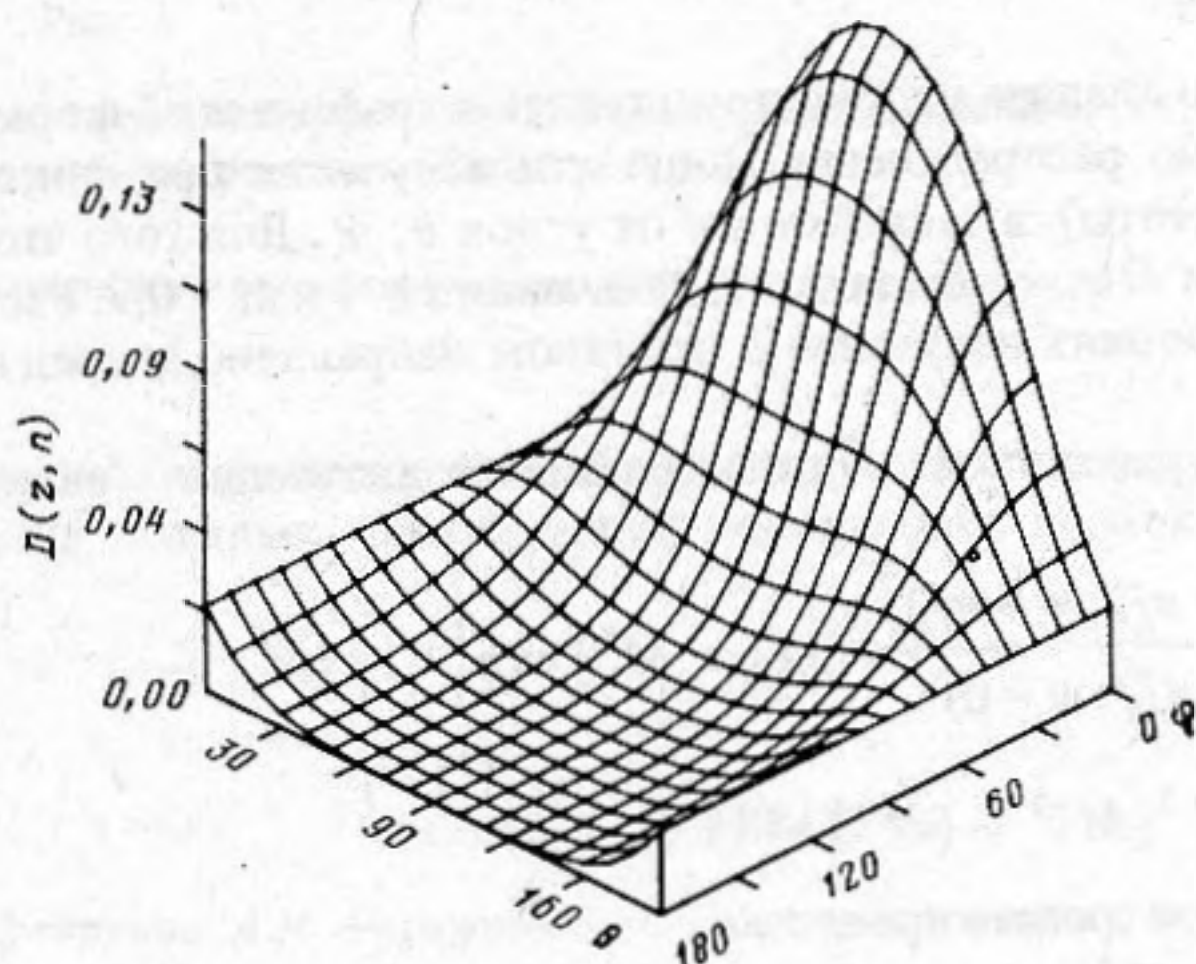


Рис. 2. Распределение мощности излучения. Представлено распределение функции $D(z, n)$ в зависимости от углов θ, ψ при фиксированном значении частоты ($z = 1, M = 0,7$)

Нетрудно заметить, что эффективная генерация излучения будет иметь место тогда, когда параметр $\beta_1 \rightarrow 0$. Этот режим реализуется при $M \rightarrow 1$. Излучения в этом случае в основном направлено вперед по направлению движения источника. Следует, однако, иметь в виду, что при этом в основном излучаются низкочастотные компоненты, удовлетворяющие критерию $kl \left(\frac{1}{M} - \sin \theta \cos \psi \right) \ll 1$, где l — длина корреляции.

Пусть характерная длина корреляции равна l , т.е. $\hat{R}(\xi) \equiv \hat{R}\left(\frac{\xi}{l}\right)$. Переходя к безразмерным переменным $\xi = lx$ и учитывая четность коэффициента корреляции, находим

$$R(\mu) = 2l \int_0^{\infty} dx \hat{R}(x) \cos(\mu lx) \equiv 2l \hat{R}(\mu l).$$

Далее, вводя новую переменную $k = \frac{1}{H} z$, имеем

$$\langle \dot{\epsilon} \rangle = \dot{\epsilon}_0 \int d\Omega \int_0^\infty dz D(z, \mathbf{n}), \quad (15)$$

где

$$\dot{\epsilon}_0 \equiv \frac{\rho_0 Q^2 c}{2\pi^3} \frac{\sigma^2}{H^2}, \quad [\dot{\epsilon}_0] = ML^2 T^{-3},$$

$$D(z, \mathbf{n}) = \left(\frac{1}{H}\right) \frac{z^2 \exp\{-2z\beta_1\}}{M\beta_1^2} R\left(\frac{l}{H} z\beta_2\right) \quad (16)$$

— функция, характеризующая спектральное и угловое распределение излучения.

Из (15) видно, что интегральная мощность излучения, как и следовало ожидать, зависит от M и отношения $l/H \equiv N$.

Для того чтобы качественно оценить эффективность излучения, аппроксимируем \hat{R} гауссовой функцией. Положив тогда $\hat{R}(m) = \exp\{-m^2\}$, имеем

$$D(z, \mathbf{n}) = \frac{\exp(-2z \sqrt{M^2 - 1 + \sin^2 \theta \sin^2 \Psi} - z^2 N^2 (M^{-1} - \sin \theta \cos \Psi)^2)}{N^{-2} z^{-2} M [M^2 - 1 + \sin^2 \theta \sin^2 \Psi]}$$

Результат численного анализа удобно представить в графической форме.

На рис. 2 изображено распределение мощности излучения при фиксированном значении параметра z (частоты) в зависимости от углов θ, Ψ . Для того чтобы представить распределение функции $D(z, \mathbf{n})$, были взяты значения $z = 1$ и $M = 0,7$. Расчет показывает, что при выбранных условиях излучение в основном направлено вперед по направлению движения источника.

Существенно информативной характеристикой излучения является величина $A(M, N, z)$:

$$A(M, N, z) = \frac{D_\perp(\theta = \pi/2; \Psi = \pi/2)}{D_\parallel(\theta = \pi/2; \Psi = 0)} = (1 - M^2) \exp\left\{-2z [M^{-1} - \sqrt{M^2 - 1}] - z^2 N^2 [M^{-2} - (M^{-1} - 1)^2]\right\},$$

которая определяет анизотропию процесса.

На рис. 3 приведен график зависимости параметра A от переменных z и M . Линии постоянного уровня функции $A(M, z)$ при $N = 1$ изображены на рис. 4.

Интегральная по частотам мощность излучения описывается функцией

$$D(\mathbf{n}) = \int_0^\infty dz D(z, \mathbf{n}).$$

Расчет показывает, что

$$D(\mathbf{n}) = \frac{2^{1/4}}{4} \frac{1}{N^3 \beta_2^3} \exp\left\{\frac{\beta_1^2}{2N^2 \beta_2^2}\right\} W_{-5/4, -1/4}\left(\frac{\beta_1^2}{N^2 \beta_2^2}\right),$$

$W_{\lambda\mu}$ — функция Уиттекера (см. [2]). При $M \rightarrow 1$ $W_{\lambda\mu}$ — расходящаяся функция. В этом случае открывается канал Черенковского излучения.

В заключение отметим, что проведенное модельное исследование может помочь уяснению картины явления, оценке эффекта по порядку величины. Оно также позволяет понять физическую картину излучения акустических волн движущимися источни-

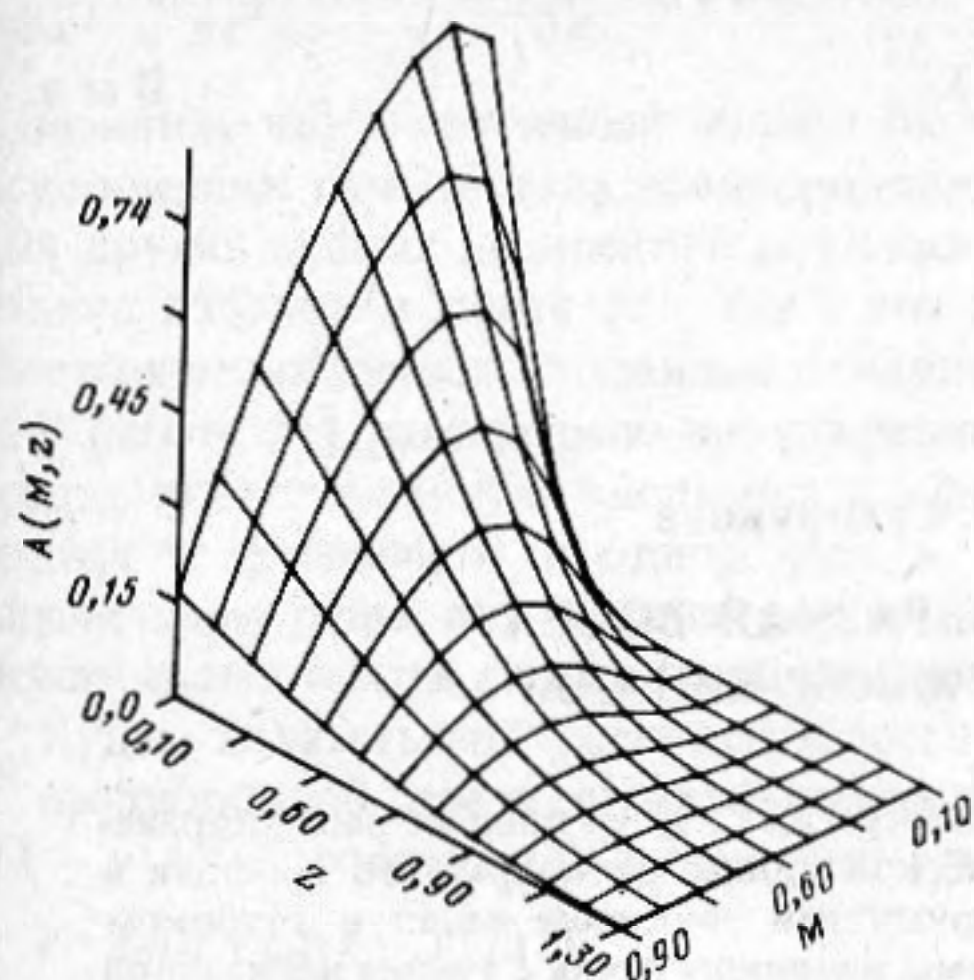


Рис. 3

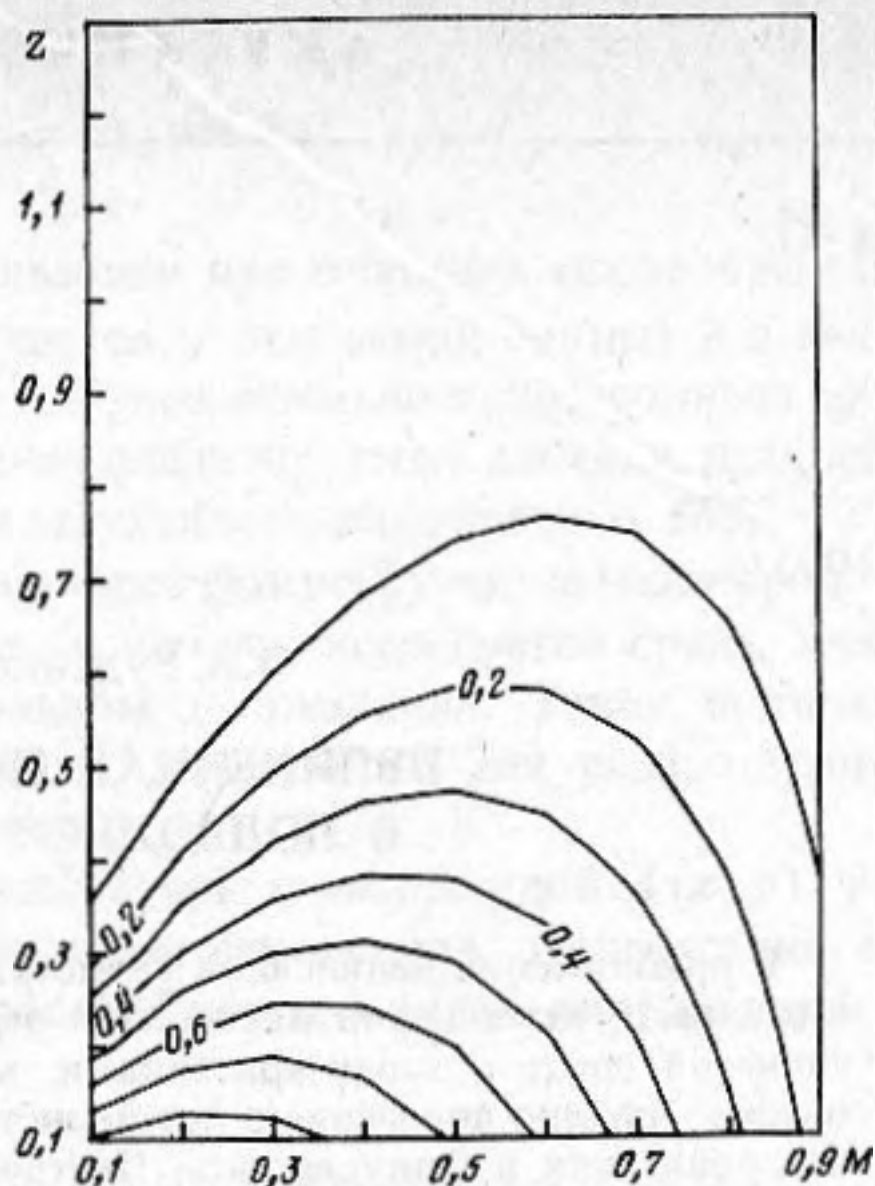


Рис. 4

Рис. 3. Характеристика анизотропии процесса излучения в зависимости от безразмерной частоты z и числа M при фиксированном значении параметра N

Рис. 4. Линии постоянного уровня функции $A(M, z)$ при заданном N

ками вблизи шероховатых поверхностей. Для широкого класса задач указанного типа модельное понятие локально реагирующей поверхности позволяет получить простые оценки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павлов В.И., Сухоруков А.И. Переходное излучение акустических волн // УФН. 1985. Т. 147. Вып. 1. С. 83.
2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
19.11.90

V.I. Pavlov, O.A. Kharin, S.V. Holodova

TRANSITION RADIATION OF ACOUSTIC WAVES BY A MOVING SOURCE NEAR A LOCALLY REACTING IMPEDANCE SURFACE

The transition radiation arisen while physical objects without own frequencies are moving with a constant velocity in a inhomogeneous or near inhomogeneous media is considered. Subsonic regime of moving mass source is investigated. Radiation results from the impedance coordinates dependence. Equation for wave component of speed potential is obtained. Analytical representation of the acoustic power is established for the model of the ground which is characterized by the specific normal impedance.

Radiation patterns are given. Radiation effective generation is shown to take place when $M \rightarrow 1$. In this case the source radiates mainly in the forward direction. The results of numerical analysis are given in graphic form.