АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 38 1992 Вып. 3

УДК 535.4

© 1992 г. И.Д. Дружинина, М.А. Сумбатян

КОРОТКОВОЛНОВАЯ ДИФРАКЦИЯ НА ТЕЛАХ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Работа посвящена перенесению геометрической и физической теорий дифракции, широко применяемых для выпуклых объектов, на случай произвольного гладкого препятствия. Основной трудностью при построении геометрической (лучевой) теории является учет вклада лучей, многократно переотраженных от границы объекта. Физическая теория дифракции для невыпуклых тел сводится к вычислению повторных интегралов по вогнутым частям границы.

Известно [1], что для гладких выпуклых препятствий физическая (ФТД) и геометрическая (ГТД) теории дифракции не являются в строгом смысле асимптотическими в коротковолновой области. Это связано с тем, что существуют области (например, граница света и тени), где результаты ни одной из этих теорий не совпадают с главным членом асимптотики. Тем не менее в области света обе эти теории корректны. Особенно хорошее совпадение с точными результатами они дают в направлении обратного рассеяния (эхо-режим), что является наиболее важным для практических целей в радиолокации, в ультразвуковой медицинской диагностике и в ультразвуковом неразрушающем контроле. Цель настоящей работы – построение ГТД и ФТД для объектов с произвольной (невыпуклой) гладкой границей. При этом дифрагированное поле исследуется в области света.

Для выпуклых областей вклад в ГТД определяется лишь одной точкой зеркального отражения. В рассматриваемой проблеме для построения ГТД необходим учет вклада как от точек простого зеркального отражения, так и от лучей, многократно переотразившихся от границы.

Известна формула для амплитуды луча, один раз отраженного от границы [1]:

$$p = \frac{e^{ik}(L_0 + L_1)}{\sqrt{L_0 + L_1 + \dfrac{2L_0L_1}{|\rho|\cos\theta}}}, \qquad (1)$$

где L_0 и L_1 – соответственно расстояния от точечного излучателя и от точечного приемника до точки отражения, ρ – радиус кривизны кривой в точке отражения, θ – угол падения (равен углу отражения). Можно предположить, что амплитуда луча, многократно переотраженного от точек границы, будет равна произведению вкладов вида (1) от всех точек отражения, где ρ и θ каждый раз выбираются для соответствующей точки отражения. Однако такой подход ошибочен, поскольку он не учитывает вклада лучей, бесконечно близких к основному.

Для получения истинного выражения рассмотрим вначале случай двукратного отражения (рис. 1). Пусть в точке x_0 расположен точечный излучатель. При этом основной вклад в дифрагированное поле в точке x_3 вносит луч $x_0 - y_1 - y_2 - x_3$ и близкие к нему. Давление $p(x_3)$ в точке приема в асимптотическом смысле определяется интегралом Кирхгофа по малой окрестности l_2 второй точки отражения

$$p(x_3) = \int_{l_2} 2p(y_2)\frac{\partial \Phi}{\partial n_2}\, ds_2. \qquad (2)$$

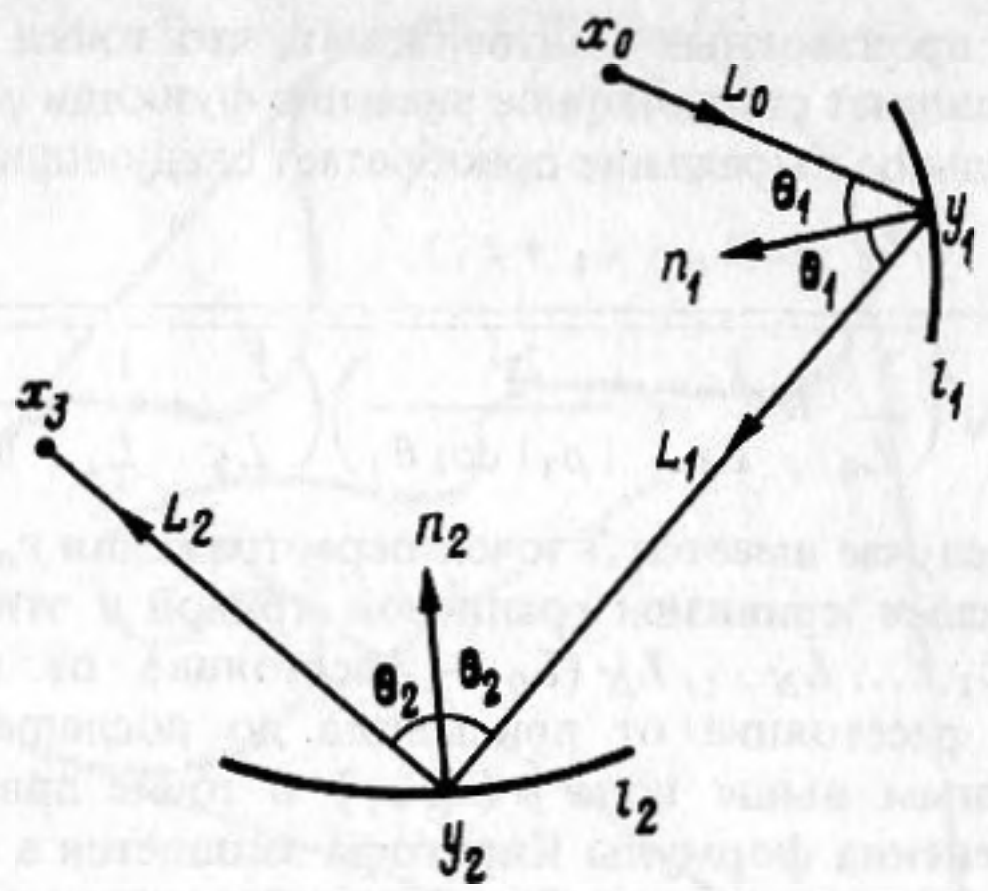

Рис. 1. К выводу формулы ГТД для двукратного переотражения

Здесь для определенности рассматривается препятствие с абсолютно твердой границей. Такой подход является естественным, поскольку формула (1) для однократного отражения может быть получена из интеграла Кирхгофа по малой окрестности точки отражения (в духе § 10 [2]). В формуле (2) Φ связана с функцией Ханкеля $H_0^{(1)}$ и асимптотически

$$2\frac{\partial \Phi}{\partial n_2} = -e^{3\pi i/4}\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\ \frac{e^{ik|x_3-y_2|}}{\sqrt{|x_3-y_2|}}\cos\theta_2. \tag{3}$$

В свою очередь

$$p(y_2) = -e^{3\pi i/4}\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\cos\theta_1 \int\limits_{l_1} p(y_1)\frac{e^{ik|y_2-y_1|}}{\sqrt{|y_2-y_1|}}ds_1. \tag{4}$$

В то же время поскольку в точке x_0 расположен точечный источник, то

$$p(y_1) = \frac{e^{ik|x_0-y_1|}}{\sqrt{|x_0-y_1|}}. \tag{5}$$

Подставляя (3)–(5) в формулу (2) и вынося медленно меняющиеся функции за знак интеграла, получаем

$$p(x_3) = -i\frac{k}{2\pi}\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{\sqrt{L_0L_1L_2}}\int\limits_{l_1}\int\limits_{l_2} e^{ik\varphi}ds_1ds_2, \tag{6}$$

где фаза $\varphi = |x_0-y_1| + |y_2-y_1| + |x_3-y_3|$. Формула, соответствующая ГТД, получится, если в (6) оценить интеграл методом двумерной стационарной фазы [3]. Опуская детали, выпишем основные соотношения:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s_1} = 0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial s_2} = 0,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial s_1\partial s_2} = \frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{L_1}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s_1^2} = \cos^2\theta_1\left(\frac{1}{L_0}+\frac{1}{L_1}\right)+\frac{2\cos\theta_1}{|\rho_1|},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s_2^2}\ \cos^2\theta_2\left(\frac{1}{L_2}+\frac{1}{L_1}\right)+\frac{2\cos\theta_2}{|\rho_2|}.$$

Равенство нулю первых производных подтверждает, что точки двукратного зеркального переотражения доставляют стационарное значение функции φ.

С учетом (7) окончательное выражение приобретает следующий вид:

$$p(x_3) = \frac{1}{\sqrt{L_0 L_1 L_2}} \frac{e^{ik(L_0 + L_1 + L_2)}}{\sqrt{\left(\frac{1}{L_0} + \frac{1}{L_1} + \frac{2}{|\rho_1| \cos\theta_1}\right)\left(\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_1} + \frac{2}{|\rho_2| \cos\theta_2}\right) - \frac{1}{L_1^2}}} \quad (8)$$

Пусть теперь в общем случае имеется N точек переотражения y_n ($n = 1, \ldots, N$) с углами отражения θ_n, радиусами кривизны граничной кривой в этих точках ρ_n и расстояниями между ними $L_0, L_1, \ldots, L_{N-1}, L_N$ (L_0 – расстояние от источника до первой точки отражения, L_N – расстояние от приемника до последней точки отражения). По аналогии с изложенным выше поле $p(x_{N+1})$ в точке приема x_{N+1} в результате последовательного применения формулы Кирхгофа запишется в виде N-кратного интеграла, каждый из которых берется по малой окрестности соответствующей точки переотражения. Выражение, соответствующее лучевому приближению, получается из этого интеграла после применения к нему метода N-мерной стационарной фазы. Выпишем окончательный результат:

$$p(x_{N+1}) = \frac{1}{\sqrt{\prod_{n=0}^{N} L_n}} \frac{\exp\left(ik \sum_{n=0}^{N} L_n\right)}{\sqrt{|\det(D_N)|}},$$

$$D_N = (d_{nk}), \quad d_{nk} = d_{kn}, \quad n, k = 1, \ldots, N, \quad (9)$$

$$d_{nn} = \frac{1}{L_{n-1}} + \frac{1}{L_n} + \frac{2}{|\rho_n| \cos\theta_n},$$

$$d_{nk} = \frac{1}{L_k}, \quad n = k+1; \quad d_{nn} = 0, \quad n \neq k, \quad n \neq k+1.$$

При $N = 1$ и $N = 2$ получаем формулы (1) и (8).

Следует заметить, что формула (9) может быть проверена на одном частном случае, когда все отражатели локально являются плоскими зеркалами. В этом случае $\rho_n = \infty$, $n = 1, \ldots, N$. Исходя из простых оптических представлений результат должен иметь следующий вид:

$$p(x_{N+1}) = \frac{\exp\left(ik \sum_{n=0}^{N} L_n\right)}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N} L_n}}. \quad (10)$$

Справедливость перехода в рассматриваемом случае выражения (9) в (10) может быть доказана методом математической индукции с учетом того, что для $N = 1$ и 2 этот переход является очевидным.

Таким образом, ГТД для невыпуклых тел сводится к суммированию вкладов вида (9) от всех лучей, многократно переотразившихся от препятствия и пришедших в точку приема. При этом основной сложностью является необходимость прослеживания траектории каждого луча.

Заметим, что для акустически мягкого контура результат будет отличаться от (9) лишь множителем $(-1)^N$, поскольку при каждом отражении фаза волны в отличие от твердого препятствия изменяется скачком на 180° [2].

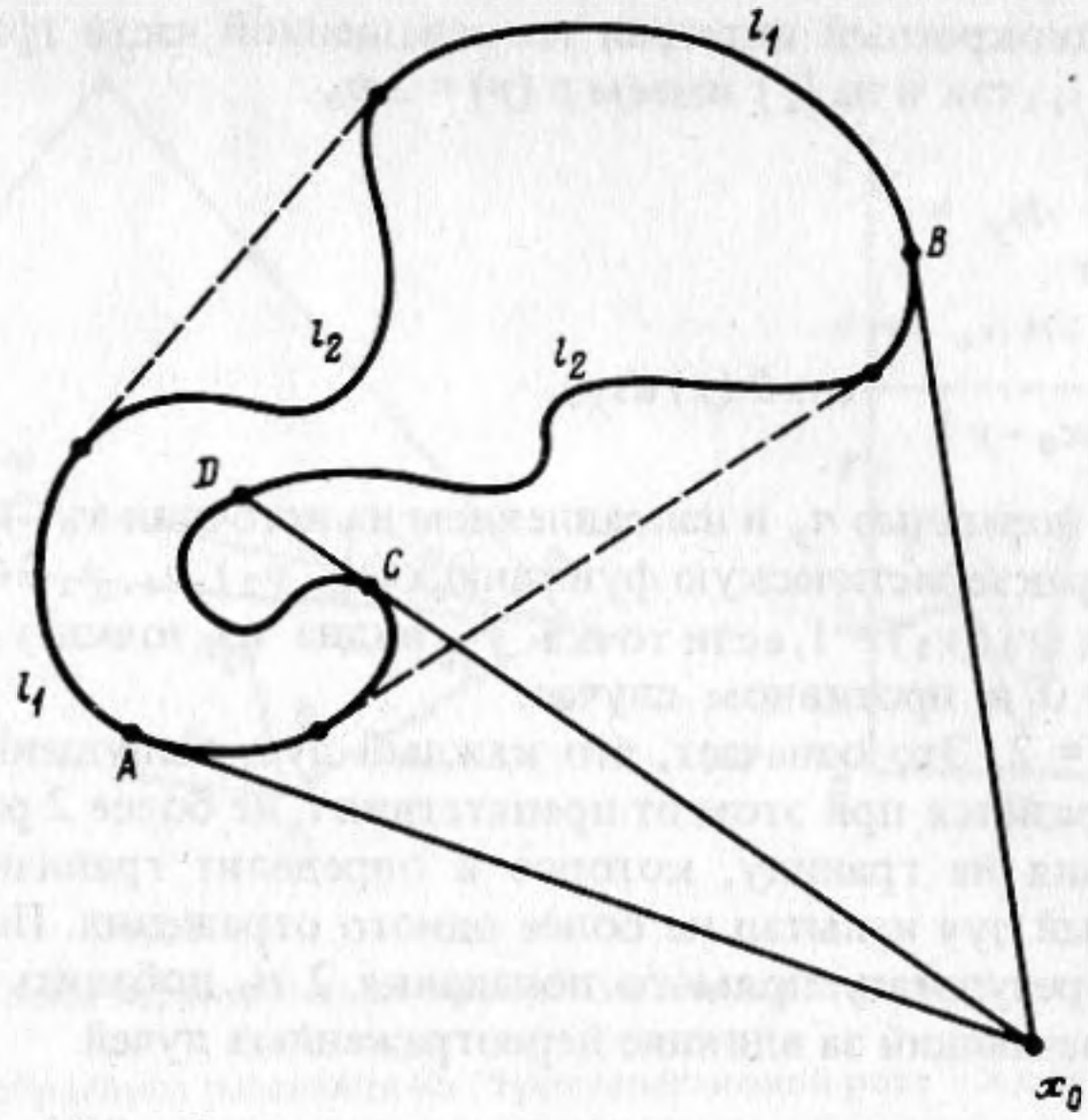

Рис. 2. К построению ФТД для невыпуклых тел: AB – область глобальной тени, AC и DB – освещенные участки, CD – область локальной тени

Перейдем к построению ФТД. Сначала строится выпуклая оболочка области [4], т.е. наименьший выпуклый контур, содержащий рассматриваемый контур l (см. рис. 2). Это означает проведение касательных, которые отделяют участки вогнутости l_2 от участков выпуклости l_1. Далее проведением касательных Ax_0 и Bx_0 определяется область глобальной тени AB, где значение давления на границе $p(y) = 0$. Очевидно, что точки A и B всегда принадлежат выпуклым участкам l_1. В итоге дифрагированное поле в любой точке x_1, расположенной в зоне света, определится формулой Кирхгофа по освещенной части AB. Для простоты записи ограничимся случаем обратного рассеяния, когда x_1 совпадает с x_0:

$$p_s(x_0) = \int\limits_G p(y) \frac{\partial \Phi}{\partial n_y} ds_y, \quad G = AB \setminus CD. \tag{11}$$

В (11) учтено, что из области AB должны быть изъяты участки локальной тени типа CD.

В дальнейшем под l_1 и l_2 будем понимать только те участки соответственно выпуклых и вогнутых зон, которые находятся на лицевой стороне AB. Поскольку на выпуклые участки границы не могут попадать переотраженные лучи, то в приближении Кирхгофа

$$p(y)|_{l_1} = 2p_0 = 2\frac{e^{ik|y-x_0|}}{\sqrt{|y-x_0|}}. \tag{12}$$

Если бы рассматриваемый контур l был выпуклым, то все свелось бы к подстановке (12) в (11) и вычислению интеграла по G. На самом же деле проблема вычисления граничного давления $p(y)$ на l_2 является довольно сложной, поскольку на этих участках происходит многократное переотражение. Подход, который предлагается в данной работе, основан на следующем очевидном утверждении: ФТД отличается от ГТД лишь тем, что в ней соответствующие интегралы, вычисляемые в геометрической теории методом стационарной фазы, вычисляются точно. На этом пути следует сначала проследить пути всех лучей, вышедших и вернувшихся в точку x_0, подсчитав максимальное число переотражений N каждого луча на участках l_2.

Если $N = 1$, то для каждого луча возможно лишь простое отражение от препятствия (без переотражений). В этом случае интеграл Кирхгофа представляет собой, как и для

выпуклого объекта, однократный интеграл по освещенной части границы, поскольку всюду на свету (как на l_1, так и на l_2) имеем $p(y) = 2p_0$

$$p_s(x_0) = \int_G 2p_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n_y} ds_y =$$

$$= -e^{3\pi i/4}\sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int \frac{e^{2ik|x_0 - y|}}{|x_0 - y|} \cos\theta(y)\, ds_y, \qquad (13)$$

где $\theta(y)$ – угол между нормалью n_y и направлением на источник $x_0 - y$.

При $N > 1$ введем характеристическую функцию $\chi(y_1, y_2), y_1, y_2 \in G$, определяемую следующим образом: $\chi(y_1, y_2) = 1$, если точка y_2 видна из точки y_1 (и, естественно, наоборот); $\chi(y_1, y_2) = 0$ в противном случае.

Пусть, например, $N = 2$. Это означает, что каждый луч, выпущенный из точки x_0 и вернувшийся в нее, отразился при этом от препятствия l не более 2 раз. Следовательно, до последнего попадания на границу, которое и определит граничное значение $p(y)$ в формуле (11), каждый луч испытал не более одного отражения. Поэтому при вычислении $p(y)$ следует к результату прямого попадания $2p_0$ добавить еще однократный интеграл Кирхгофа, отвечающий за влияние переотраженных лучей

$$p(y) = 2p_0(y) + \int_G 2p_0(y_1) \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \chi(y, y_1)\, ds_1, \quad y \in G. \qquad (14)$$

В (14) учтено, что точка y_1 может оказать влияние на граничное значение $p(y)$ в точке y лишь в том случае, если последняя видна из y_1. В итоге при $N = 2$ ФТД сводится к вычислению двукратного интеграла, получающегося после подстановки (14) в (11).

Ясно, что для произвольного $N \geqslant 3$ ФТД сводится к вычислению некоторого N-кратного интеграла. Соответствующие формулы из-за громоздкости здесь не выписываются. Если для некоторого контура число N из каких-либо простых соображений известно приближенно, то его можно взять "с запасом", увеличив на несколько единиц. Это связано с тем, что если на самом деле вклад переотраженных лучей на граничное значение $p(y)$ отсутствует, то соответствующий повторный интеграл будет асимптотически мал по сравнению с результатом прямого попадания. Заметим, однако, что при $N \geqslant 3$ эффективность теории Кирхгофа существенно снижается, поскольку вычисления при этом требуют порядка M^N арифметических операций, где M – число узлов в квадратурных формулах. В то же время прямое решение граничного интегрального уравнения методом коллокации требует порядка M^3 операций.

Заметим, что, как и в ГТД, результат ФТД для мягкой границы отличается от результата для твердой тем, что перед соответствующими N-кратными интегралами добавляется множитель $(-1)^N$. Это приводит к очень важному физическому следствию. Известно [2], что для выпуклого объекта в классической теории Кирхгофа, где присутствуют лишь интегралы с $N = 1$, амплитуды отраженного поля для твердой и мягкой границ отличаются лишь знаком и поэтому совпадают по модулю. В отличие от этого для невыпуклых тел с $N \geqslant 1$ происходит суммирование вкладов лучей, отразившихся от поверхности различное число раз. При этом вклады лучей с четными N для обоих видов границ будут одинаковыми, а с нечетными N будут входить в противофазе. Следовательно, результат суммирования таких вкладов в общем случае будет различным. Это говорит о том, что два идентичных по форме объекта, из которых один имеет абсолютно твердую, а второй абсолютно мягкую границу, даже на очень коротких волнах могут иметь совершенно различные диаграммы обратного рассеяния.

Тем не менее может быть выделен довольно широкий класс невыпуклых областей, для которых невозможны переотражения и, следовательно, для них всегда $N = 1$. Для препятствий этого класса отражение от мягкой и твердой границ будут одинаковыми по модулю. Для построения этого класса проследим еще раз ход переотраженного луча, вернувшегося в исходную точку x_0 (рис. 3). Рассмотрим треугольник, образован-

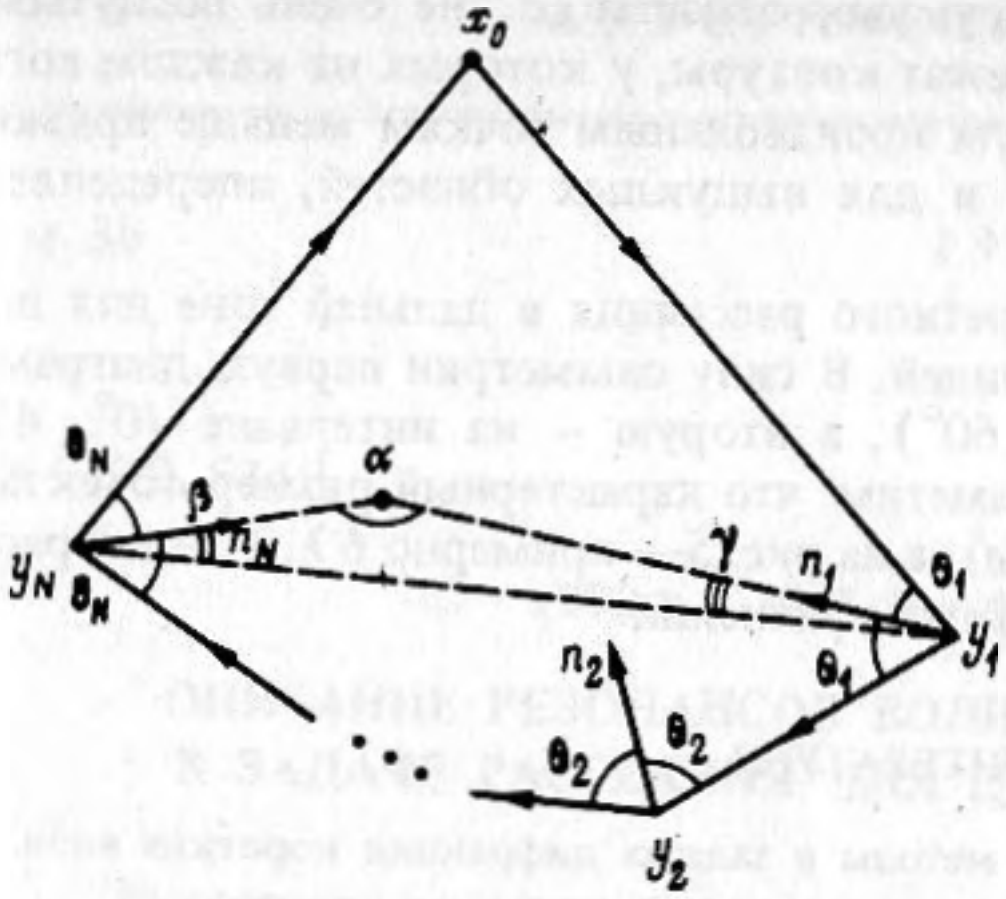

Рис. 3

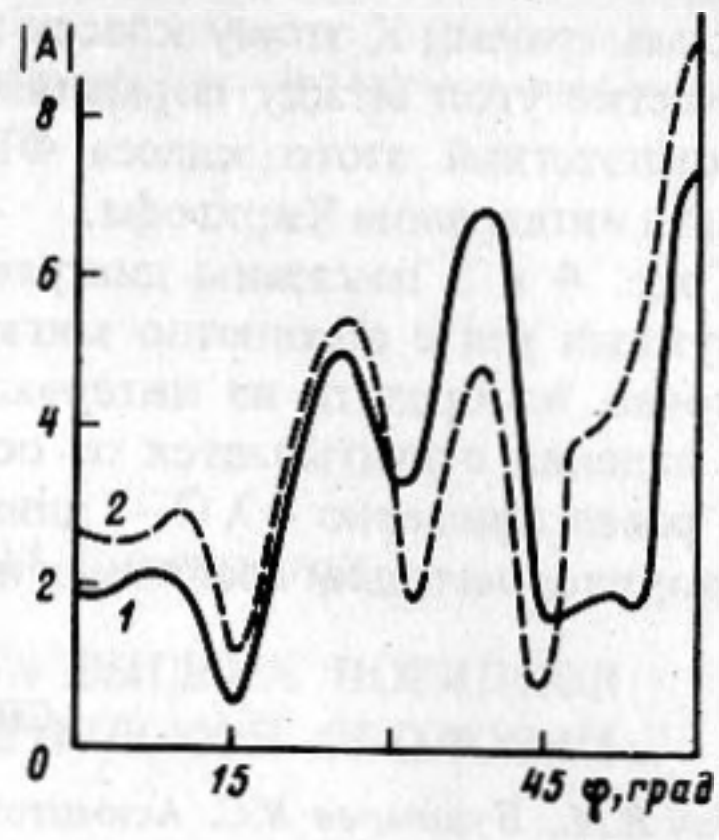

Рис. 4

Рис. 3. Схема переотражения луча на "не очень вогнутом" участке границы

Рис. 4. Диаграмма обратного рассеяния на "трехлепестковой розе" $k\rho(\varphi) = 5(2 + \cos 3\varphi)$: *1* – точный расчет, *2* – ГТД

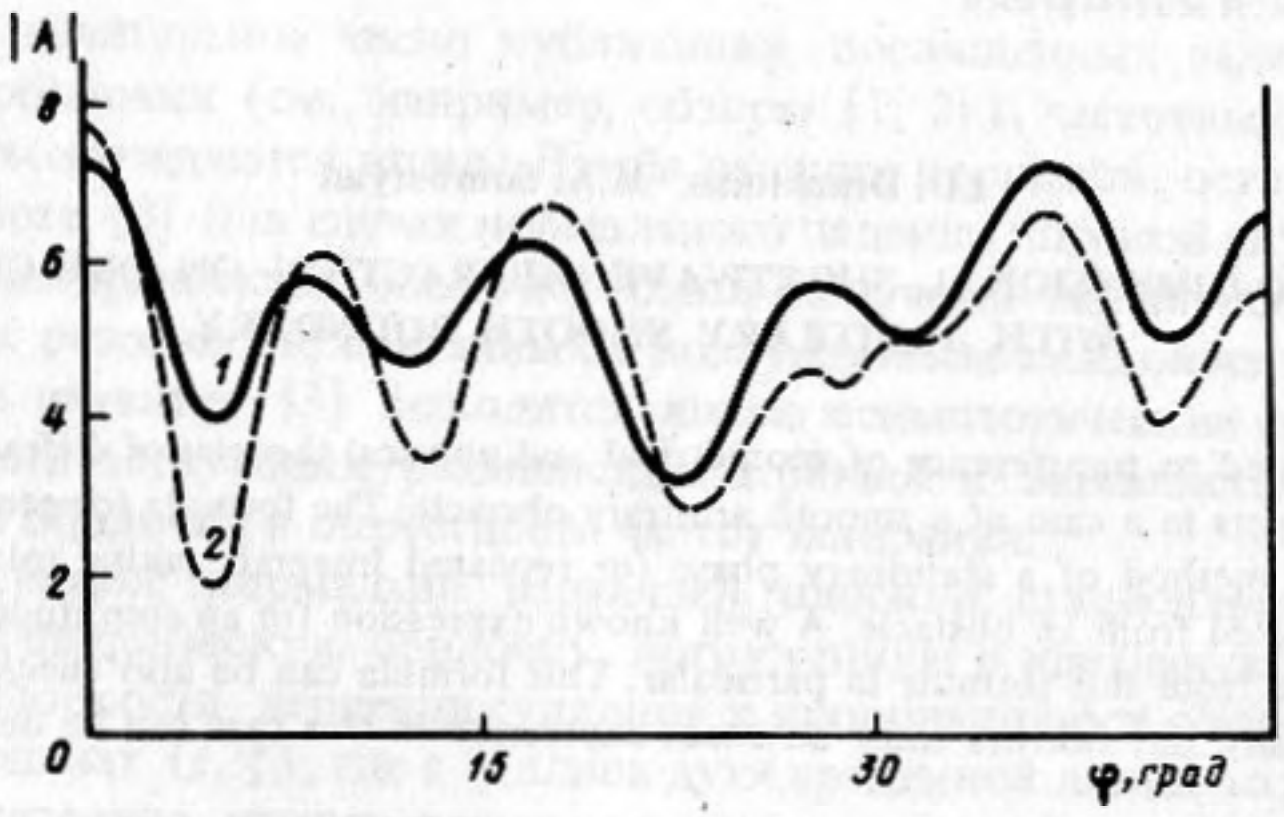

Рис. 5. Диаграмма обратного рассеяния на "четырехлепестковой розе" $k\rho(\varphi) = 6(2 + \cos 4\varphi)$: *1* – точный расчет, *2* – ФТД

ный точками y_1, y_N и точкой пересечения нормалей n_1 и n_N. Обозначим внутренние углы этого треугольника через α, β, γ. Тогда, очевидно,

$$\theta_1 + \theta_N + \beta + \gamma \leqslant 180^\circ, \tag{15}$$

причем равенство имеет место при облучении из дальней зоны. Поскольку $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, то из (15) следует, что

$$\alpha \geqslant \theta_1 + \theta_N. \tag{16}$$

С другой стороны, $\gamma \leqslant \theta_1$, $\beta \leqslant \theta_N$, поэтому

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma \geqslant 180^\circ - \theta_1 - \theta_N. \tag{17}$$

Из (16) и (17) имеем следующее основное неравенство:

$$\alpha \geqslant 90^\circ.$$

Таким образом, если на вогнутом участке границы угол между двумя любыми нормалями меньше прямого ($\alpha < 90^\circ$), то на таком участке заведомо не могут происходить переотражения лучей.

Следовательно, выделяется класс невыпуклых областей с "не очень вогнутыми" участками границ. К этому классу принадлежат контуры, у которых на каждом вогнутом участке угол между нормалями к двум произвольным точкам меньше прямого. Для препятствий этого класса ФТД, как и для выпуклых областей, опеределяется обычным интегралом Кирхгофа.

На рис. 4 и 5 показаны диаграммы обратного рассеяния в дальней зоне для двух невыпуклых тел с абсолютно мягкой границей. В силу симметрии первую диаграмму достаточно изобразить на интервале $(0^\circ, 60^\circ)$, а вторую – на интервале $(0^\circ, 45^\circ)$ (угол падения отсчитывается от оси x). Заметим, что характерный размер объекта на рис. 4 равен примерно 4λ (λ – длина волны), а на рис. 5 – примерно 6λ. Точный расчет производился методом граничных интегральных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
2. *Шендеров Г.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.
3. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
4. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989. 480 с.

Ростовский государственный университет

Научно-исследовательский институт
механики и прикладной математики

Поступила в редакцию
01.04.91

I.D. Druzhinina, M.A. Sumbatyan

TWO-DIMENSIONAL SHORTWAVE DIFFRACTION ON OBJECTS WITH ARBITRARY SMOOTH BOUNDARY

The artiole is devoted to transference of geometrical and physical theories of diffraction that are applied usually to convex objects in a case of a smooth arbitrary obstacle. The formula for geometrical (ray) theory is obtained using the method of a stationary phase for repeated integrals taking into account a deposit of rays multiply reflected from an obstacle. A well known expression for an amplitude of a one time reflected ray can be derived from this formula in particular. This formula can be also checked on a case when all reflectors present locally flat mirrors since an exact expression in this case can be derived out of a simple physical consideration.

A development of a physical theory of diffraction starts from a stage when all border is divided in convex and concave parts. On convex parts a boundary value at illuminated sections is equal to double incident field and at shadowed sections is equal to zero as in the classic Kirhgoff theory. On concave parts of the boundary a deposit of multiple reflections must be taken into account as well as that of a direct incident field. Taking account of these multiple reflections is reduced to a calculation of some repeated integrals.

Two examples when a backscattering diagram for nonconvex objects in a far wave field is constructed are considered. In the first of them ray theory data are compared with an exact diagram, and in the second-physical theory data.