

УДК 534.222

© 1992 г. А.Г. Мусатов, О.В. Руденко, О.А. Сапожников

### УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕФРАКЦИИ И НЕЛИНЕЙНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ ПРИ ФОКУСИРОВКЕ МОЩНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Проанализирован процесс фокусировки мощных акустических импульсов. Проведено упрощение уравнения Хохлова–Заболотской в предположении несущественности дифракции, но с учетом зависимости скорости фронта волны от ее амплитуды. Это позволило описать как нелинейное поглощение импульса, так и его нелинейную рефракцию. Из-за указанных эффектов увеличивается размер фокальной области, смещается фокус, а пиковое давление в фокусе с ростом исходной амплитуды насыщается на определенном уровне, зависящем от внутреннего давления жидкости и угла схождения пучка.

Развитие экстракорпоральной ударноволновой литотрипсии в медицине вызвало новую волну интереса к описанию фокусировки мощных акустических импульсов. Максимально достижимые пиковые давления в литотриптерах составляют около 1 кбар, т.е. соответствующие значения числа Маха  $M$  в жидкостях невелики:  $M < 0,1$ . Поэтому ударные волны можно считать слабыми, и описывать их в рамках приближений нелинейной акустики.

Базовым уравнением для слабосходящихся пучков является уравнение Хохлова–Заболотской [1]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\epsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} \right] = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p, \quad (1)$$

где  $p$  – акустическое давление,  $\epsilon$ ,  $\rho_0$ ,  $c_0$  – нелинейный параметр, плотность и скорость звука среды,  $x$  – продольная координата,  $\tau = t - x/c_0$  – время в сопровождающей системе координат,  $\Delta_{\perp} = (1/r)(\partial/\partial r)(r\partial/\partial r)$  – лапласиан по поперечной координате  $r$ .

Анализ нелинейной фокусировки на основе уравнения (1) ранее проводился лишь численно, что не дало возможности понять основные физические закономерности. Имеет смысл искать более простые приближения для описания нелинейных эффектов при фокусировке импульсов. В работе [2] предложена модель, учитывающая нелинейное поглощение и нелинейную рефракцию импульса. Ниже аналогичные результаты получаются на основе упрощения уравнения (1). Основное место в данной работе занимает анализ результатов расчета различных режимов нелинейной фокусировки.

Принципиальной для ударных волн является нелинейная рефракция, вызванная тем обстоятельством, что скорость фронта волны зависит от величины давления за фронтом. Это явление хорошо известно в физике сильных ударных волн (см., например, [3]); результаты, полученные применительно к слабым ударным волнам, изложены в книге [4]. При локализации возмущений в виде пучка нелинейная рефракция проявляется следующим образом. На оси, где амплитуда волны максимальна, скорость фронта больше, чем на краях пучка. Из-за этого сходящийся волновой фронт выпрямляется – происходит своеобразная самодефокусировка. В результате образуется нелинейная перетяжка, ограничивающая поле в фокусе.

Для учета нелинейной рефракции введем величину  $\psi = \psi(x, r)$  – сдвиг фронта мощной волны относительно фронта линейной плоской волны. Заменой переменных  $x \rightarrow x$ ,

$r \rightarrow r, \theta \rightarrow \tau - \psi/c_0$  перейдем в систему координат, в которой фронт покоится. Из уравнения (1) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\epsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} \right]^2 \right] \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\Delta_{\perp} \psi}{2} p \right] = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p.$$

Дальнейшее рассмотрение проведем в приближении геометрической акустики, полагая правую часть уравнения, описывающую дифракцию, пренебрежимо малой:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\epsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} \right]^2 \right] \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\Delta_{\perp} \psi}{2} p = 0. \quad (2)$$

Если в среду входит волна с гладким профилем, то из-за нелинейности он начинает искажаться, и на некотором расстоянии образуется разрыв. До образования разрыва фронт волны распространяется со скоростью звука  $c_0$ . Уравнение эйконала при этом имеет простой вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} \right]^2 = 0. \quad (3)$$

уравнение (2) запишется так:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\epsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\Delta_{\perp} \psi}{2} p = 0. \quad (4)$$

После образования разрыва в профиле волны скорость ее фронта становится отличной от  $c_0$ , т.е. начинает проявляться нелинейная рефракция. Учтем, что нелинейная добавка к скорости фронта слабой ударной волны, распространяющейся по невозмущенной среде, составляет половину от нелинейной добавки скорости распространения возмущений непосредственно за фронтом [1]. В результате имеем [2]

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} \right]^2 = - \frac{\epsilon}{2 \rho_0 c_0^2} A, \quad (5)$$

где  $A$  — акустическое давление за ударным фронтом. Уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\epsilon}{\rho_0 c_0^3} \left[ p - \frac{A}{2} \right] \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\Delta_{\perp} \psi}{2} p = 0. \quad (6)$$

Таким образом, мы разбиваем путь, проходимый волной, на два участка — до образования ударного фронта и после образования. На первом участке волна описывается уравнениями (3) и (4), на втором — уравнениями (5) и (6). На границе участков необходимо провести сшивку соответствующих решений.

Для дальнейшего упрощения используем безабберационное приближение [3], согласно которому волновой фронт всюду считается параболическим:  $\psi = \psi_0(x) + \beta(x)r^2/2$ , здесь  $\beta(x)$  — кривизна фронта. Перейдем к новым переменным:

$$\xi = \int_0^x dx'/f(x'), \quad \rho = r/f, \quad V = p \cdot f, \quad B = A \cdot f,$$

где  $f$  — вспомогательная функция, определяемая соотношением

$$f = \exp\left(\int_0^x \beta(x') dx'\right).$$

Можно показать [5], что величина  $f$  равна расстоянию между каким-либо лучом

и осью пучка, нормированному на свое значение при  $x = 0$ . Тогда уравнения (4) и (6) переходят в уравнения простых волн:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\epsilon}{\rho_0 c_0^3} V \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \quad (4')$$

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\epsilon}{\rho_0 c_0^3} \left[ V - \frac{B}{2} \right] \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0. \quad (6')$$

Решения этих уравнений могут быть выписаны аналитически. Соответствующие уравнения эйконала (3) и (5) сводятся к следующим:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \quad (3'), \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = - \frac{\epsilon f}{\rho_0 c_0^2} \cdot \frac{\partial A}{\partial (r^2)} \Big|_{r=0}. \quad (5')$$

Конкретизируем вид изучаемых волн. Пусть на входе в среду задан импульс со сферически-вогнутым волновым фронтом:  $\beta(x=0) = -1/R$ , где  $R$  — радиус кривизны волнового фронта. Нетрудно получить граничное (при  $x=0$ ) условие для функции  $f$ :  $f=1$ ,  $df/dx = -1/R$ . Отсюда и из (3') следует, что на участке до образования разрыва  $f(x) = 1 - (x/R)$ . Для определенности будем считать, что при  $x=0$  задан монополярный импульс с временным профилем в форме равнобедренного треугольника с длительностью по основанию  $2\tau_0$  (по полувысоте —  $\tau_0$ ) и амплитудой  $A(x=0, r)$ , распределенной поперек пучка по гауссовскому закону:

$$A(x=0, r) = p_0 \Phi(r/a_0), \text{ где } \Phi(r/a_0) = \exp(-r^2/a_0^2).$$

Здесь  $p_0$  — амплитуда импульса на оси,  $a_0$  — поперечный радиус пучка. Согласно (4'), при распространении волны до образования разрыва ее амплитуда изменяется так же, как в линейном случае:  $A(x, r) = p_0 \Phi\{r/[a_0(1-x/R)]\} / (1-x/R)$ . Ударный фронт на оси образуется на расстоянии  $x_1$ , где  $x_1 = R[1 - \exp(-x_p/R)]$ , а

$$x_p = \rho_0 c_0^3 \tau_0 / (\epsilon p_0) \quad (7)$$

— длина образования разрыва в плоской волне. Как уже отмечалось, при  $x > x_1$  распространение импульса описывается уравнениями (5') и (6'). Решение уравнения простых волн (6') при учете правила проведения разрыва по "равенству площадей" [1] дает следующее выражение для зависимости амплитуды рассматриваемого треугольного импульса от координат:

$$A(x, r) = \frac{p_0}{f} \Phi\left[\frac{r/a_0}{f(x)}\right] \cdot \left[1 + \frac{1}{2x_p} \Phi\left[\frac{r/a_0}{f(x)}\right] \cdot \int_{x_1}^x \frac{dx'}{f(x')}\right]^{-1/2}. \quad (8)$$

Следовательно, нахождение  $A$  сводится к расчету функции  $f(x)$ . Уравнение для  $f$  (5') с учетом (8) принимает вид

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{2x_p x_D f^2} \left[1 + \frac{1}{4x_p} \int_{x_1}^x \frac{dx'}{f}\right] \cdot \left[1 + \frac{1}{2x_p} \int_{x_1}^x \frac{dx'}{f}\right]^{-3/2}. \quad (9)$$

Граничными условиями (при  $x = x_1$ ) для функции  $f$  являются:  $f = 1 - x_1/R$ ,  $df/dx = -1/R$ . В уравнении (9) величина

$$x_D = a_0^2 / 2c_0 \tau_0 \quad (10)$$

имеет смысл масштаба дифракции [2].

При проведении численного счета удобнее перейти к функции

$$H(z) = \int_{z_1}^z dz' / f,$$

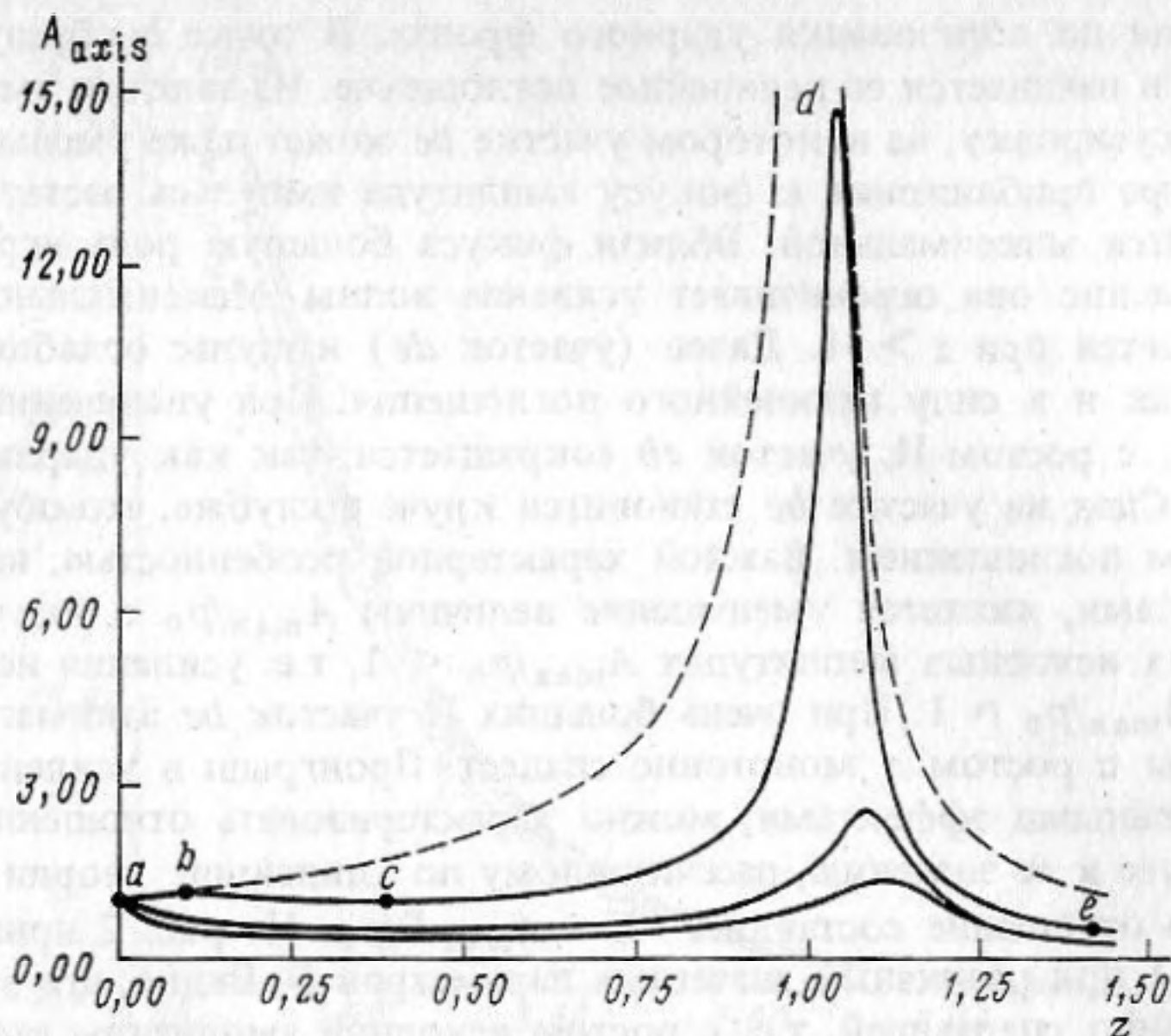


Рис. 1. Амплитуда импульса на оси, нормированная на свое значение при  $x = 0$  ( $A_{\text{axis}} = A/p_0$ ) в зависимости от безразмерного расстояния  $z = x/R$  при  $D = 0,01$ . Кривые 1-3 соответствуют значениям  $\Pi = 10, 56$  и  $100$ , штриховая кривая построена по линейной теории ( $\Pi \ll 1$ ).

где  $z = x/R$ ,  $z_1 = x_1/R$ . Имеем обыкновенное дифференциальное уравнение 3-го порядка:

$$H''' = \frac{2(H'')^2}{H'} - \frac{\Pi D}{2} (H')^4 \left[1 + \frac{\Pi H}{4}\right] \left[1 + \frac{\Pi H}{2}\right]^{-3/2}, \quad (11)$$

причем при  $z = z_1 = 1 - \exp(-\Pi^{-1})$ :  $H = 0$ ,  $H' = \exp(\Pi^{-1})$ ,  $H'' = \exp(2\Pi^{-1})$ . Здесь введены безразмерные параметры:

$$\Pi = R/x_p, \quad D = R/x_d. \quad (12)$$

Параметр  $\Pi$  имеет смысл безразмерной амплитуды (см. (7)) и характеризует влияние нелинейности, параметр  $D$  совпадает с безразмерным радиусом дифракционной перетяжки [2] и не зависит от амплитуды.

Численное интегрирование уравнения (11) было проведено в широкой области изменения параметров  $\Pi$  и  $D$  по схеме Рунге-Кутты 4-го порядка точности в интервале  $0 \leq z \leq 2$ . На основе функции  $f(z)$  рассчитывалась амплитуда импульса (см. (8)). В частности, амплитуда  $A$  на оси и поперечный радиус пучка  $a$  по уровню амплитуды  $1/e$  представляются в виде:

$$\begin{aligned} A/p_0 &= H'(1 + \Pi H/2)^{-1/2}, \\ a/a_0 &= (H')^{-1} [-\ln\{q + (q^2 + b)^{1/2}\}]^{1/2}, \\ q &= (2e)^{-2} \Pi H(1 + \Pi H/2)^{-1}, \quad b = e^{-2}(1 + \Pi H)^{-1}. \end{aligned}$$

Перейдем к анализу основных результатов численных расчетов. Рис. 1 иллюстрирует зависимость амплитуды импульса на оси  $A$ , нормированной на свое исходное значение  $p_0$ , от безразмерного расстояния  $z = x/R$ . Штриховая кривая проведена по линейной теории и соответствует случаю  $\Pi \ll 1$ . При этом максимум амплитуды  $A_{\text{max}}$  достигается при  $z = 1$  и составляет  $A_{\text{max}}/p_0 = 1/D (= 100)$ . Кривые 1-3 относятся к нелинейному режиму фокусировки. Они содержат четыре характерных участка. Участок  $ab$  (кривая 1) является частью штриховой кривой и соответствует сферическому

схождению волны до образования ударного фронта. В точке  $b$  образуется разрыв в профиле волны, и начинается ее нелинейное поглощение. Из-за этого амплитуда волны, несмотря на фокусировку, на некотором участке  $bc$  может даже уменьшаться с увеличением  $z$ . По мере приближения к фокусу амплитуда импульса растет и в некоторой точке  $d$  становится максимальной. Вблизи фокуса большую роль играет нелинейная рефракция — именно она ограничивает усиление волны. Максимальное значение амплитуды достигается при  $z > 1$ . Далее (участок  $de$ ) импульс ослабляется как из-за расходимости, так и в силу нелинейного поглощения. При увеличении исходной амплитуды  $p_0$ , т.е. с ростом  $\Pi$ , участок  $ab$  сокращается, так как ударный фронт образуется быстрее. Спад на участке  $bc$  становится круче и глубже, что обусловлено сильным нелинейным поглощением. Важной характерной особенностью, вызванной нелинейными эффектами, является уменьшение величины  $A_{\max}/p_0$  с ростом  $p_0$ . При достаточно больших исходных амплитудах  $A_{\max}/p_0 < 1$ , т.е. усиления нет вообще. (Так, для кривой 3  $A_{\max}/p_0 \approx 1$ .) При очень больших  $\Pi$  участок  $bc$  занимает всю область: амплитуда волны с ростом  $z$  монотонно спадает. Проигрыш в усилении волны, связанный с нелинейными эффектами, можно характеризовать отношением амплитуды импульса в фокусе к ее значению, рассчитанному по линейной теории при учете дифракции [2]. Это отношение составляет  $K = A_{\max}D/p_0$ . На рис. 2 приведены зависимости  $K = K(\Pi)$  при различных значениях параметров  $D$ . Видно, что эта зависимость является монотонно спадающей, т.е. с ростом исходной амплитуды степень усиления волны уменьшается. Примечательно, что с ростом параметра  $D$  кривая  $K(\Pi)$  незначительно смещается вверх, т.е. зависимость от  $D$  довольно слабая. К зависимости  $K = K(\Pi)$  мы еще вернемся ниже.

На рис. 3 приведено нормированное поперечное распределение амплитуды волны в фокальной плоскости для различных значений исходной амплитуды. Штриховая кривая соответствует линейному случаю. Отметим, что с ростом  $\Pi$  (кривые 1—4) поперечный размер перетяжки пучка значительно увеличивается и при  $\Pi \gg 1$  становится много больше размера линейной дифракционной перетяжки. Кроме того, поперечное распределение из-за нелинейного характера поглощения вблизи оси становится более однородным. Данный эффект изотропизации, или уплощения поперечного распределения амплитуды волны, отмечается в экспериментах (см., например, [6]). Что касается продольного размера фокальной области, то, как видно из рис. 1, он также растет с увеличением  $\Pi$ . Таким образом, нелинейные эффекты "размывают" фокальную область.

Анализ кривых  $K = K(\Pi)$ , изображенных на рис. 2, показал, что они хорошо аппроксимируются зависимостями

$$K = \text{const} \Pi^{\delta-1}, \text{ где } |\delta| \ll 1,$$

т.е. значение  $\Pi K$  изменяется слабо. Этот результат заслуживает более подробного рассмотрения. Дело в том, что величина  $P = \Pi K = \Pi D A_{\max}/p_0$  не зависит от исходной амплитуды импульса  $p_0$  и характеризует абсолютное значение фокальной амплитуды  $A_{\max}$ . Действительно, согласно (7), (10) и (12),  $P = A_{\max}/(p_{\text{вн}} \alpha^2)$ , где  $p_{\text{вн}} = \rho_0 c_0^2 / (2\epsilon)$  — характерное внутреннее давление среды,  $\alpha = a_0/R$  — полуугол схождения пучка на входе.

Рис. 4 иллюстрирует поведение  $P$  в зависимости от безразмерной начальной амплитуды  $\Pi$  при различных значениях параметра  $D$ . Видно, что с увеличением  $\Pi$  величина  $P$  сначала растет, при  $\Pi \approx 10$  достигает максимума и далее медленно спадает. Таким образом, имеет место нелинейное ограничение амплитуды в фокусе. Напомним, что нелинейное поглощение для монополярного импульса (в отличие от пилообразных волн) уменьшает лишь темпы роста  $A_{\max}$  с увеличением  $p_0$  [1], но не приводит к его ограничению. Именно нелинейная рефракция обуславливает указанный эффект. Спад величины  $P$  с ростом  $\Pi$  означает, что  $A_{\max}$  даже уменьшается с увеличением  $p_0$ . Это несколько необычно, но вполне объяснимо: нелинейная рефракция сильно дефокусирует пучок. Эффект насыщения давления в фокусе с ростом мощности исход-

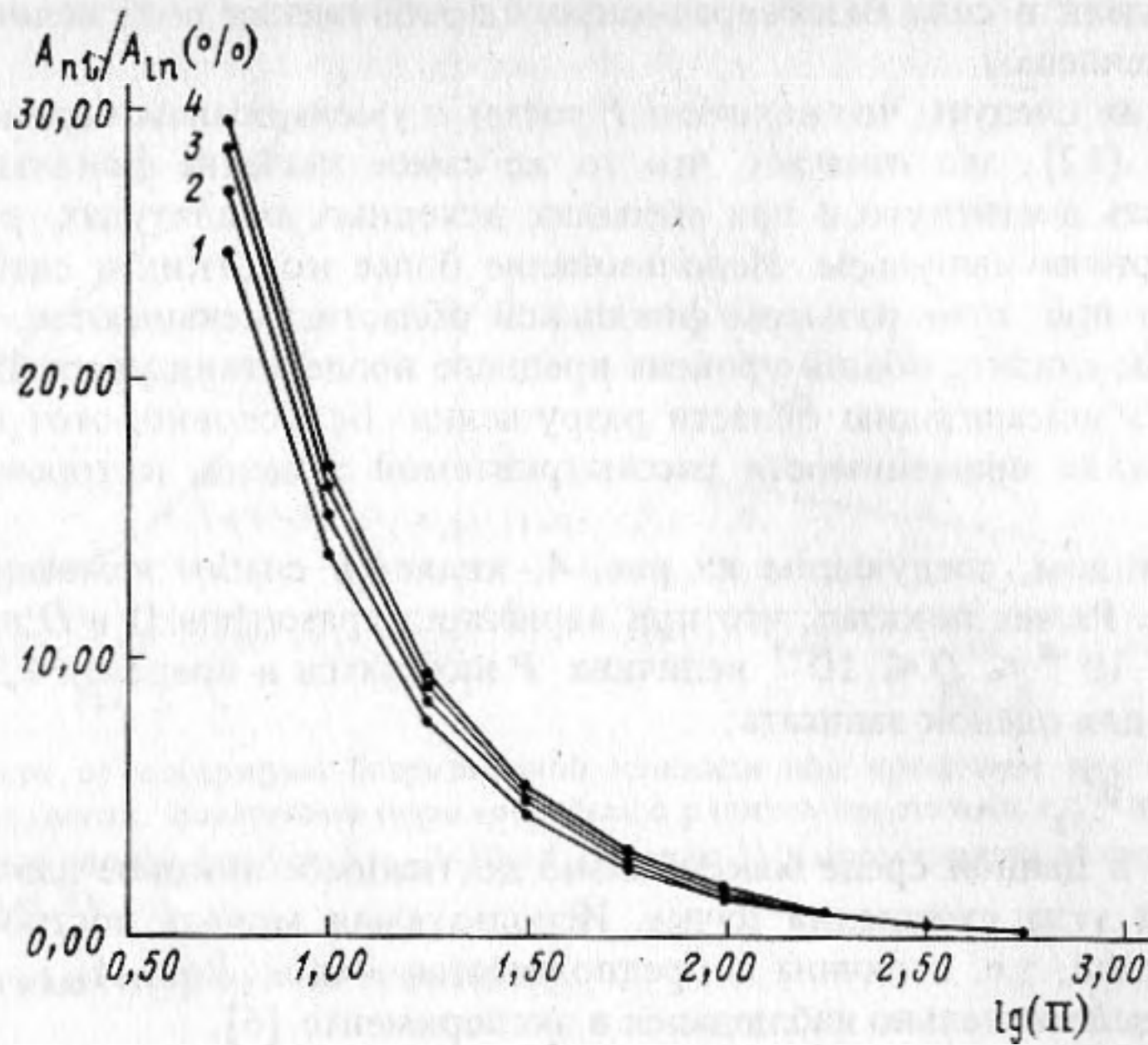


Рис. 2. Амплитуда импульса в фокусе, нормированная на аналогичную величину в линейном случае  $A_{nt}/A_{ln}$ , выраженная в процентах, в зависимости от логарифма безразмерной исходной амплитуды  $\Pi$ . Кривые 1-4 соответствуют  $D = 1,8 \cdot 10^{-2}$ ,  $5,6 \cdot 10^{-3}$ ,  $1,8 \cdot 10^{-3}$ ,  $5,6 \cdot 10^{-4}$

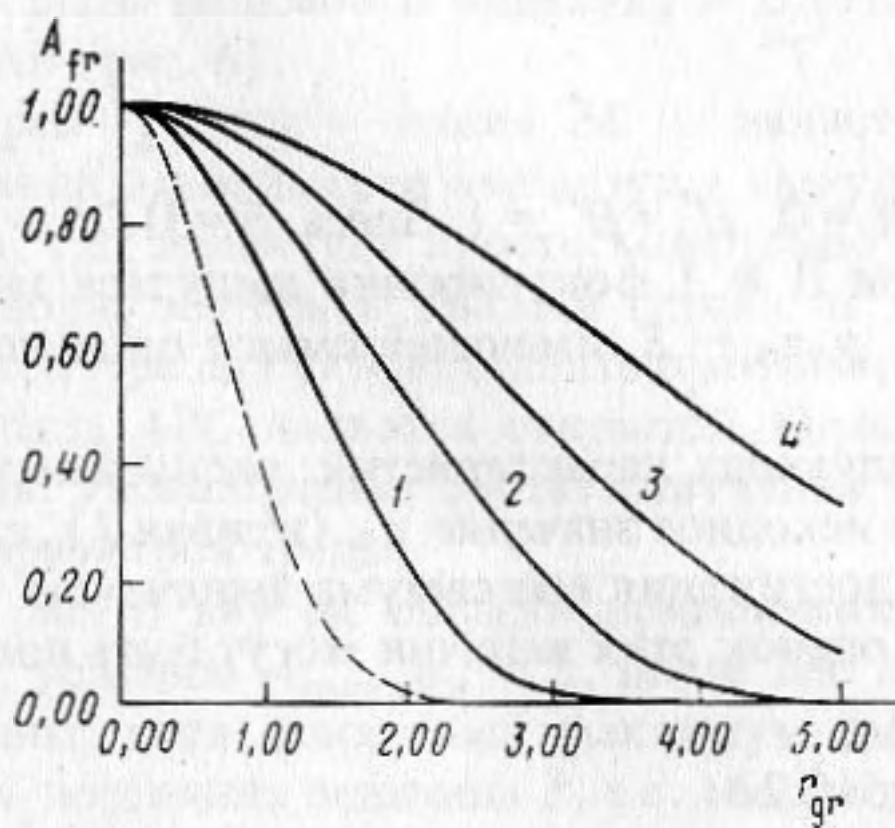


Рис. 3

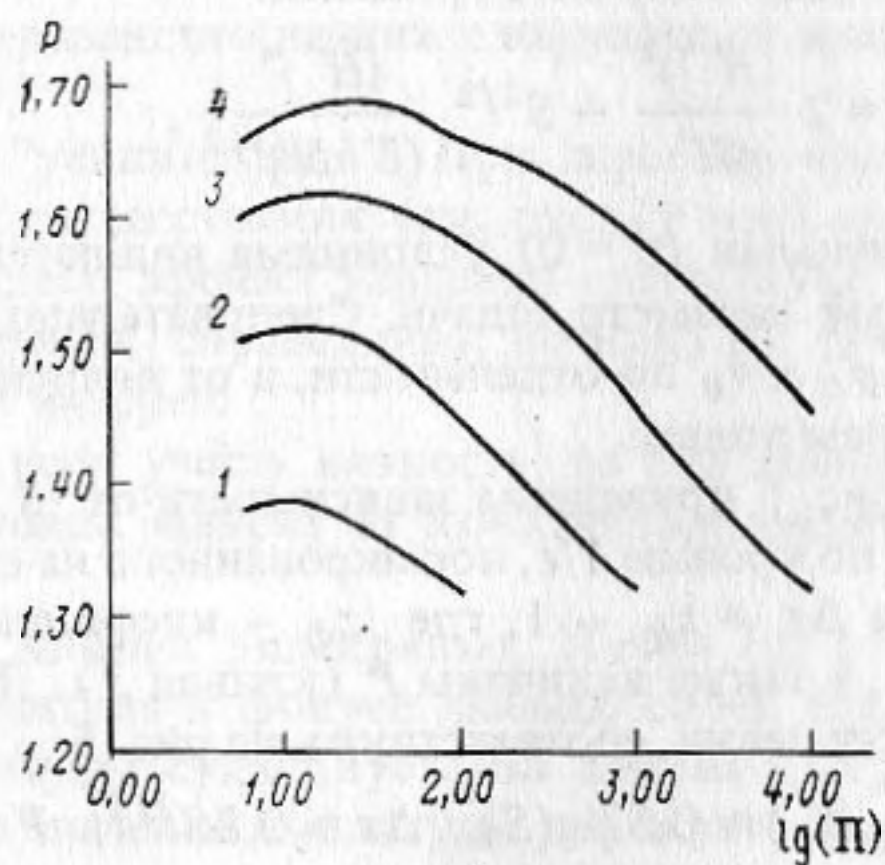


Рис. 4

Рис. 3. Поперечное распределение амплитуды импульса, нормированной на свое значение на оси, в фокальной плоскости  $A_{fr}$ ;  $r_{gr} = r/(a_0 D)$  — безразмерная поперечная координата. Кривые 1-4 соответствуют параметрам  $\Pi = 10, 18, 32$  и  $56$ , причем всюду  $D = 0,01$ . Штриховая кривая построена по линейной теории

Рис. 4. Безразмерная амплитуда импульса в фокусе  $P$  в зависимости от логарифма параметра  $\Pi$ . Для кривых 1-4 соответственно  $D = 1,8 \cdot 10^{-2}$ ,  $5,6 \cdot 10^{-3}$ ,  $1,8 \cdot 10^{-3}$ ,  $5,6 \cdot 10^{-4}$

ного импульса наблюдался и в экспериментах, например при исследовании акустических полей экстракорпоральных литотриптеров [7].

Самодефокусировка может быть ослаблена, если создать в исходном пучке однородное поперечное распределение амплитуды волны. Действительно, в этом случае нелинейная рефракция начинает проявляться позже, так как на начальном этапе все участки волнового фронта будут двигаться с одинаковыми скоростями. Заметим,

что в нашей модели в силу безабберационного приближения роль нелинейной рефракции несколько усилена.

Из рис. 4 также следует, что величина  $P$  растет с уменьшением параметра  $D$ . Согласно (7), (10) и (12), это означает, что то же самое значение фокальной амплитуды  $A_{\max}$  может быть достигнуто и при меньших исходных амплитудах  $p_0$ , если применять более короткие импульсы. Использование более коротких и слабых импульсов удобно тем, что при этом размеры фокальной области уменьшаются. В литотрипсии это позволило бы снизить общий уровень вредного воздействия ударных волн на организм и улучшить локализацию области разрушения. Безусловно, этот вывод справедлив лишь в рамках применимости рассматриваемой модели, которые будут обсуждаться ниже.

Главным выводом, следующим из рис. 4, является слабое изменение  $P$  в зависимости от  $\Pi$  и  $D$ . Расчет показал, что при вариации параметров  $\Pi$  и  $D$  на три порядка:  $10 \leq \Pi \leq 10^4$ ,  $10^{-4} \leq D \leq 10^{-1}$  величина  $P$  находится в пределах  $1,30 \leq P \leq 1,75$ . Поэтому можно для оценок записать:

$$A_{\max} = 1,5 p_{\text{вн}} \alpha^2. \quad (13)$$

Таким образом, в данной среде максимально достижимое пиковое давление в фокусе зависит лишь от угла схождения пучка. Используемая модель построена для слабосходящихся пучков, т.е. величина  $\alpha$  предполагается малой. Рост  $A_{\max}$  с увеличением угла схождения действительно наблюдался в эксперименте [6].

Рассмотрим численный пример. Пусть в воде ( $p_{\text{вн}} = 3,2$  Кбар) производится фокусировка импульса при полуугле схождения  $\alpha = 30^\circ$ . Оценка по формуле (13) дает  $A_{\max} \approx 1,3$  Кбар. Это значение близко к экспериментальной величине, наблюдаемой в литотриптерах [7]. В рассматриваемой задаче имеется два параметра:  $\Pi$  и  $D$ . Однако при  $\Pi \gg 1$  независимым является лишь один параметр. Действительно, при  $\Pi \gg 1$  вместо (11) получаем уравнение

$$H''' = 2 \frac{(H'')^2}{H'} - S^{1/2} \frac{(H')^4}{(8 \cdot H)^{1/2}},$$

а граничными ( $z = 0$ ) условиями являются:  $H = 0$ ,  $H' = H'' = 1$ . Здесь  $S = \Pi D^2$  — единственный параметр задачи. Следовательно, при  $\Pi \gg 1$  фокусировка импульса зависит не от  $p_0$  и  $\tau_0$  по отдельности, а от величины  $p_0 \tau_0 \sim S$ , имеющей смысл площади под профилем волны.

На рис. 5 приведены зависимости от  $S$  следующих характеристик: радиуса перетяжки  $a_\Phi$  по уровню  $1/e$ , нормированного на свое исходное значение  $a_0$  (кривая 1), сдвига фокуса  $\Delta z = z_\Phi - 1$ , где  $z_\Phi$  — координата достижения максимума амплитуды (кривая 2), а также величины  $P$  (кривая 3). Для оценок этих величин могут быть полезны аппроксимации, соответствующие рис. 5:

$$\lg(a_\Phi/a_0) \approx 0,57 \lg(S), \quad \Delta z \approx 0,8 S^{2/5}, \quad P = 1,5 \pm 0,2.$$

Эти формулы справедливы при  $\Pi > 50$  и  $S < 5 \cdot 10^{-2}$ .

Заканчивая анализ результатов численных расчетов, обозначим область применимости предложенной модели фокусировки импульсов. Модель содержит два параметра —  $\Pi$  и  $D$ , однозначно определяющих граничные условия, а также характеристики среды и волны. Поэтому указанную область можно изобразить на плоскости  $(\Pi, D)$ , что и сделано на рис. 6. Счет проводился в широком диапазоне изменения  $\Pi$  и  $D$ :  $1 < \Pi < 10^4$  и  $1 > D > 10^{-4}$ , по осям на рис. 6 отложены логарифмы соответствующих величин. Область применимости заключена внутри угла ABC. Поясним выбор соответствующих границ.

Существенным допущением, сделанным в нашей работе, является пренебрежение дифракцией. Вдали от фокуса такое приближение не вызывает сомнения, однако в области перетяжки дифракция может оказать заметное влияние на распространение импульса. В линейном случае именно дифракция ограничивает поле в фокусе и обус-

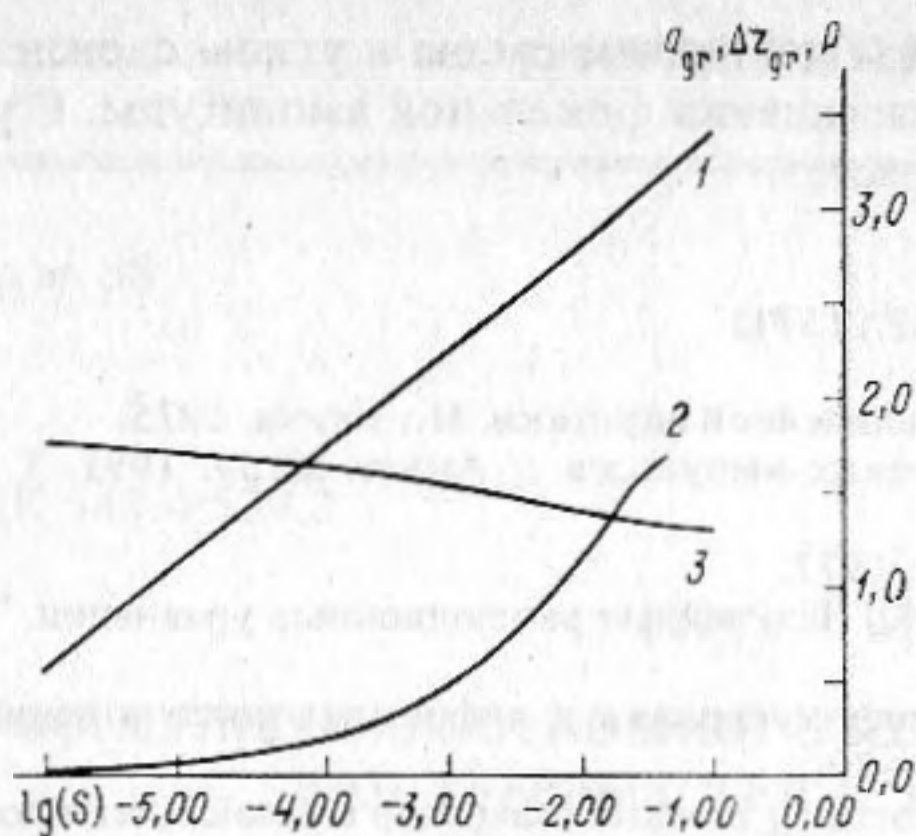


Рис. 5

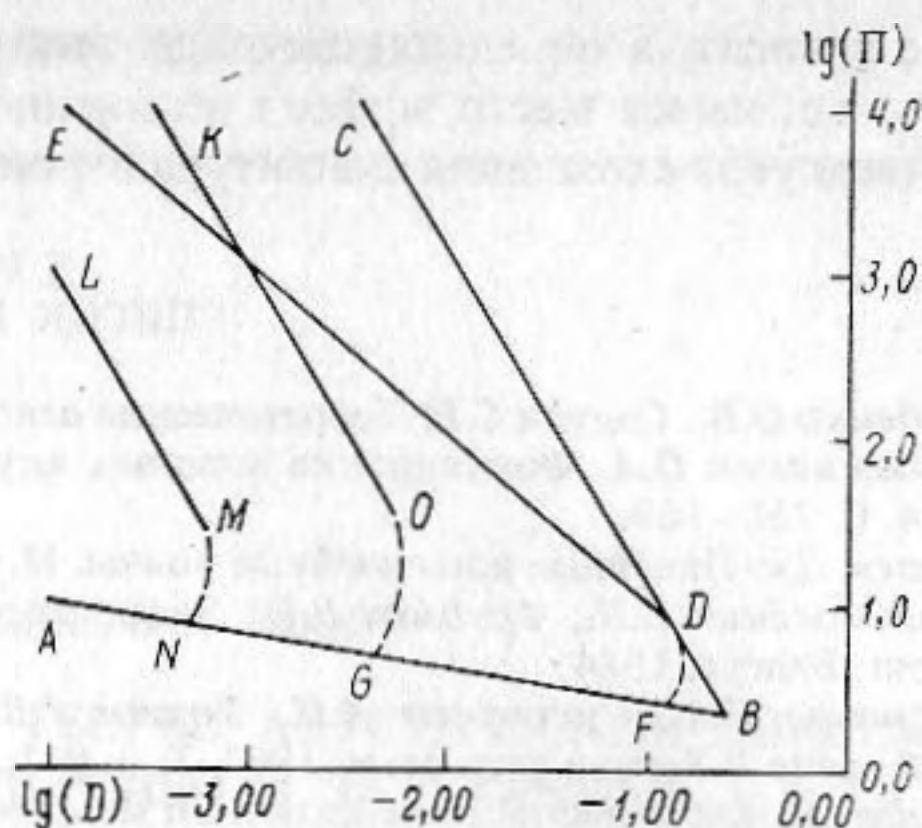


Рис. 6

Рис. 5. Зависимости от логарифма безразмерной площади под профилем исходного импульса  $S$  различных характеристик: логарифма нормированного радиуса перетяжки  $a_{gr} = \lg(10^4 a_{\Phi}/a_0)$  (кривая 1), нелинейного сдвига фокуса  $\Delta z_{gr} = 10\Delta z$  (кривая 2) и нормированной амплитуды импульса в фокусе  $P$  (кривая 3)

Рис. 6. Диаграмма области применимости модели

ловливает ненулевой размер перетяжки пучка. С другой стороны, при учете нелинейной рефракции, как мы увидели, перетяжка конечных размеров образуется даже при пренебрежении дифракцией. Разумно считать, что нелинейная рефракция доминирует, если радиус  $a$  обусловленной ею перетяжки больше радиуса линейного дифракционного пятна  $a_0 D$ . Таким образом, условие допустимости пренебрежения дифракцией может быть записано в виде  $a/a_0 > D$ . Это неравенство начинает нарушаться ниже границы АВ (рис. 6).

Вторая граница — линия ВС — является "усилительной". При переходе через нее на кривой зависимости амплитуды импульса от расстояния (см. рис. 1) исчезает максимум, т.е. амплитуда просто монотонно спадает, эффект усиления отсутствует. Вообще говоря, модель в области справа от линии ВС справедлива, но вряд ли точки из этого сектора могут представить практический интерес.

Область ABC является открытой. Однако если учесть вязкость, то она замыкается и слева. Расположение соответствующей границы зависит от конкретных диссипативных параметров среды.

На рис. 6 внутри области применимости нанесен ряд кривых. Линия ED соответствует условию  $A_{max}/p_0 = 1$ , выше нее амплитуда в фокусе меньше своей исходной величины, хотя локальный максимум амплитуды существует. На линиях CDF, KOG и LMN постоянна величина  $P$ , т.е. абсолютное значение амплитуды в фокусе. При этом кривые, расположенные слева, соответствуют большим значениям  $P$ . В области прямых участков этих линий (LM, KO, CD) модель из двухпараметрической становится однопараметрической и зависит лишь от величины  $S = \Pi D^2$ .

В заключение еще раз подчеркнем, что нелинейность оказывает сильное влияние на процесс фокусировки. Наряду с поглощением, связанным с диссипацией энергии волны на ударном фронте, происходит самофокусировка, обусловленная зависимостью скорости фронта от амплитуды импульса. Из-за самофокусировки размер фокального пятна может значительно превосходить свое линейное значение, причем он увеличивается с ростом исходной амплитуды волны. Продольный размер фокальной области также увеличивается, т.е. в целом нелинейные эффекты "размывают" эту область. Кроме того, поперечное распределение амплитуды волны в фокусе из-за нелинейного поглощения становится более однородным, происходит его уплощение. Нелинейный фокус образуется на большем расстоянии, чем линейный. Амплитуда импульса в фокусе при больших исходных амплитудах  $p_0$  от величины  $p_0$  практичес-

ки не зависит, а определяется лишь внутренним давлением среды и углом схождения пучка, т.е. имеет место эффект нелинейного насыщения фокальной амплитуды. С увеличением угла схождения амплитуда в фокусе растет.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В., Солян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
2. Сапожников О.А. Фокусировка мощных акустических импульсов // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 4. С. 760–769.
3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
4. Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е., Энгельбрехт Ю.К. Нелинейные эволюционные уравнения. Таллинн: Валгус, 1984.
5. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В. Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде // Успехи физ. наук. 1967. Т. 3. № 1. С. 19–70.
6. Muller M. Experimental investigation on shock wave focusing in water using deep ellipsoidal reflectors // Proc. 13th ICA. Belgrade. 1989. V. 1. P. 259–262.
7. Coleman A.J. and Saunders J.E. A survey of the acoustic output of commercial extracorporeal shock wave lithotripters // Ultrasound Med. Biol. 1989. V. 15. P. 213–227.

Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию  
04.06.1991

A.G. Musatov, O.V. Rudenko, O.A. Sapozhnikov

#### NONLINEAR REFRACTION AND ABSORPTION PHENOMENA DUE TO POWERFUL PULSES FOCUSING

A new calculation method of focusing of powerful acoustic pulses of the type used in medical lithotripsy is introduced. The method is based on the simplification of the Khokhlov–Zabolotskaya equation. Diffraction effects are ignored but the dependence of a wave front velocity on its amplitude is taken into account. The model describes the nonlinear absorption and refraction effects affecting strongly the focusing process.

The pulse behavior has the next principal special features. The pulse self-defocusing occurs that is due to the front velocity dependence on the pulse amplitude. The focal region size can exceed its linear value due to self-defocusing being increased with the initial wave amplitude growth. The nonlinear focus arises at greater distance than the linear one. The wave amplitude transversal distribution in the focus becomes more homogeneous and plane due to the nonlinear absorption. In the case of large initial amplitudes the pulse amplitude in the focus does not depend practically on the initial amplitude and is determined only by a medium inner pressure and the beam convergence angle, i.e. the effect of the focal amplitude saturation takes place. The amplitude saturation level increases with the increase of the divergence angle.